EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR. PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 1

УДК 517.586 : 519.644

А. МАРШАК

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНТ

A. MARŠAK. MÄRKUS INTEGRAALEKSPONENDI APROKSIMATSIOONI KOHTA

A. MARSHAK. A REMARK ON THE APPROXIMATION OF THE INTEGRAL EXPONENTS

(Представил Г. Кузмин)

В данной заметке результаты [1] применяются для аппроксимации интегральных экспонент

$$E_p(\tau)=\int_0^1 \exp(-\tau/\mu)\,\mu^{p-2}\,d\mu;\quad \tau\geqslant 0,\quad p=2,3,\ldots \tag{1}$$

при помощи квадратурных формул (КФ)

$$E_p^n(\tau)=\sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(-\tau/\mu_j)\,\mu_j^{p-2},\quad \tau\geqslant 0,\quad p=2,3,\ldots. \tag{2}$$

Через c мы будем обозначать положительные постоянные, принимающие различные значения для различных целей.

1. Аппроксимация интегральных экспонент

Обозначим через $\psi_\tau{}^p$ подынтегральную функцию в интеграле (1). Известно, что ее производные по μ имеют вид [2]:

$$[\psi_\tau^p(\mu)]^{(k)}=(-1)^{k+p-1}(k-p+1)!\,\mu^{-k-1}\tau^{p-1}\exp(-\tau/\mu)\,L_{k-p+1}^{(p-1)}(\tau/\mu),$$

$$k\geqslant p-1, \tag{3}$$

где $L_k^{(\alpha)}(x)$ — обобщенный многочлен Лагерра. Функция $\psi_\tau{}^p\in C^\infty$, а из (3) следует, что $[\psi_\tau{}^p(\mu)]^{(k)}|_{\mu=0}=0$, $k=p-1, p, \ldots$, однако, начиная с $k=p-1$, производные порядка k не ограничены в совокупности, причем

$$|[\psi_\tau^p(\mu)]^{(k)}|\leqslant c_{k,p}\mu^{p-k-2},\quad 0<\mu\leqslant 1,\quad \tau\geqslant 0,\quad k\geqslant p-2, \tag{4}$$

$$|[\psi_\tau^p(\mu)]^{(k)}|\leqslant c_{k,p}\tau^{p-k-2},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1,\quad \tau>0,\quad k\geqslant p-2.$$

Используя неравенство «элементарной интерполяции»

$$\min\{r,s\}\leqslant r^\sigma s^{1-\sigma},\quad \sigma\in[0,1],$$

которое верно при всех r и $s\geqslant 0$, получим

$$|[\psi_\tau^p(\mu)]^{(k)}|\leqslant c_{k,p}\mu^{-(k+2-p)\sigma}\tau^{-(k+2-p)(1-\sigma)},\quad 0<\mu\leqslant 1,\quad \tau>0,\quad k\geqslant p-2. \tag{5}$$

Имеет место

Лемма 1. *При всех* $\tau\geqslant 0$ *функция* $\mu^{k-p}|[\psi_\tau{}^{p+1}(\mu)]^{(k)}|$ *суммируема от* 0 *до* 1.

Доказательство следует из непосредственного интегрирования с учетом асимптотических неравенств для обобщенных многочленов Лагерра [3].

Предположим теперь, что КФ

$$\int_0^1 f(\mu)\,d\mu \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mu_j), \tag{6}$$

$\alpha_j \geqslant 0, \quad j=1, 2, \ldots, n, \quad 0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n\leqslant 1, \quad n=1, 2, \ldots, \mu_{n+1}$

А) точна для многочленов степени, непревосходящей N,

Б) при некотором $s\leqslant N+1$ удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \mu_j^{i-1} = (\mu_{l+1}^i + \mu_l^i)/2i + O(\mu_1)\mu_l^{i-1}; \quad l=1, 2, \ldots, n, \quad i=1, 2, \ldots, s,$$

В) степень сгущения узлов в направлении к левому концу отрезка интегрирования $\varrho\in[0, 1)$ такова, что

$$\mu_{j+1}-\mu_j \leqslant c\mu_1^{1-\varrho}\mu_j^{\varrho}, \quad j=1, 2, \ldots, n.$$

Для таких КФ, используя результаты [1], неравенство (4) и лемму 1, можно показать, что справедлива

Теорема 1. *Пусть КФ* (6) *удовлетворяет условиям* А) *и* Б). *Тогда для определенных в* (1) *и* (2) *функций имеет место оценка*

$$\max_{\tau\geqslant 0} |E_p(\tau)-E_p^n(\tau)| \leqslant c\mu_1^{p-1}\times$$

$$\times\begin{cases} 1+\varkappa_N(s, t), & \begin{cases} 2p-3=t\leqslant N-s+1, & s_1/2<s<N, \\ 2p-3<t\leqslant N-s+1, & 0<s<N, \end{cases} \\ 1+\varkappa_N(s, t)\,|\ln\mu_1|, & \begin{cases} 2p-4=t\leqslant N-s+1; & s_1\leqslant s<N, \\ 2p-3=t\leqslant N-s+1; & s_1/2=s<N, \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$

где $s_1=1/(1-\varrho)$, *параметр* ϱ *определен в* В), *а функция*

$$\varkappa_N(s, t)=\mu_1^{-t/2}/(N-s)^t. \tag{8}$$

2. Поточечная и интегральная оценки

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого* $\sigma\in(1/2, 1]$, $\sigma\neq\varrho$ *справедливы оценки*

$$|E_2(\tau)-E_2^n(\tau)| \leqslant c\mu_1\left(\frac{\mu_1}{\tau}\right)^{s(1-\sigma)} + c_1\mu_1\varkappa_N(s, t)\times$$

$$\times\begin{cases} (\mu_1/\tau)^{\theta}, & \begin{cases} s\geqslant s_1, & \theta<t/2, \\ s<s_1, & \theta<t/2+s_2, \end{cases} \\ (\mu_1/\tau)^{\theta}(1+|\ln\mu_1|), & \begin{cases} s\geqslant s_1, & \theta=t/2, \\ s<s_1, & \theta=t/2+s_2, \end{cases} \\ \mu_1^{t/2+s_2}/\tau^{\theta}, & \begin{cases} s=s_1, & \theta>t/2, \\ s<s_1, & t/2+s_2<\theta<t/2, \end{cases} \\ \mu_1^{t/2}/\tau^{\theta}, & s>s_1;\ t/2<\theta<t/2+s_2, \\ (\mu_1/\tau)^{\theta}|\ln\mu_1|+\mu_1^{t/2+s_2}/\tau^{\theta}, & s<s_1,\ \theta=t/2, \\ (\mu_1/\tau)^{\theta}|\ln\mu_1|+\mu_1^{t/2}/\tau^{\theta}, & s>s_1,\ \theta=t/2+s_2, \\ \mu_1^{t/2}(1+\mu_1^{s_2})/\tau^{\theta}, & \begin{cases} s>s_1, & \theta>t/2+s_2, \\ s<s_1, & \theta>t/2, \end{cases} \end{cases} \tag{9}$$

где $s_2 = s(1-\varrho)-1$, $\theta=(s+t)(1-\sigma)$, *а функция* $\varkappa_N$ *определена в* (8). *Здесь* s *и* t *целые, причем* $0<s<N$, $0\leqslant t\leqslant N-s+1$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, но для оценки производных от функции ψ_τ^2 вместо неравенства (4) применяется неравенство (5).

Следующая теорема дает нам интегральную оценку.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *где в условии* Б) $s=s_1$. *Тогда, если* $|\ln \mu_1|/(N-s)\to 0$, $n\to\infty$, *то справедливо равенство*

$$\int_0^b |E_2(\tau)-E_2^n(\tau)|\,d\tau = o(\mu_1), \qquad b=\mathrm{const}<\infty. \tag{10}$$

Доказательство. Разбивая отрезок интегрирования на две части — от 0 до μ_1 и от μ_1 до b, и применяя к первому интегралу оценку (7), а ко второму оценку (9) при $s=s_1$, придем к неравенству (10).

Замечание. При $0\leqslant\varrho<1$ и $1/2<\sigma<1$, $\sigma\neq\varrho$ введем целочисленные множества

$$L_1(\varrho,\sigma)=\{(s,t):1<\theta<t/2,\ s_1<s<N,\ 0\leqslant t\leqslant N-s+1\},$$
$$L_2(\varrho,\sigma)=\{(s,t):1<\theta<t/2+s_2;\ 0<s<\min\{s_1,N\},\ 0\leqslant t\leqslant N-s+1\}.$$

Тогда в условиях теоремы 1, если $(s,t)\in L_1(\varrho,\sigma)$ или $(s,t)\in L_2(\varrho,\sigma)$, $0\leqslant\varrho<1$, $1/2<\sigma<1$, $\sigma\neq\varrho$, справедлива более точная, чем (10), оценка

$$\int_0^b |E_2(\tau)-E_2^n(\tau)|\,d\tau\leqslant c\mu_1^2\,(1+\varkappa_N(s,t)),$$

где $\varkappa_N$ определена в (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маршак А.* Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 35, № 4, 390—399 (1986).
2. *Маршак А. Л.* О скорости сходимости метода дискретных ординат решения уравнения переноса. Автореф. дис. канд. физ.-матем. наук. Новосибирск, 1983.
3. *Суэтин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М., «Наука», 1979.

Институт астрофизики и физики атмосферы Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 11/V 1986