EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 1

УДК 621.391

И. АРРО

АЛГОРИТМ СОКРАЩЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

(Представил Н. Алумяэ)

1. Введение

Известно множество алгоритмов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [1–7], сокращающих количество операций умножения и сложения (вычитания). Как правило, уменьшение количества операций умножения приводит к увеличению операций сложения (вычитания) по сравнению с количеством тех же операций в алгоритме быстрого преобразования Фурье (БПФ), предложенном Кули и Тьюки.

В данной работе предлагается развитие алгоритма БПФ, из которого исключаются все тривиальные умножения, причем спектральные компоненты формируются из циклических составляющих кратного периода. Такое представление алгоритма обеспечивает значительное уменьшение количеств операций как умножения, так и сложения по сравнению с количеством их в типовом БПФ, причем эффективность растет по мере увеличения объема входного массива. Действительность входного массива сокращает общее количество операций (умножения и сложения) вдвое.

Алгоритм имеет регулярную структуру и приводится к подобным преобразованиям.

2. Постановка задачи и ее предварительный анализ

Требуется вычислить ДПФ $X(K)$ от исходного массива

$$Y(I),\ I=\overline{0,\ (N-1)},\ K=\overline{0,\ \ (N-1)},\ N=2^P,$$

P — произвольное, но наперед заданное положительное число, т. е.

$$X(K)=\sum_{I=0}^{N-1} Y(I) \exp\,[T\,2\pi IK/N], \tag{1}$$

где $T=-\sqrt{-1}$ при прямом и $+\sqrt{-1}$ при обратном преобразовании.

Представим $X(K)$ в следующем виде:

$$X(K)=XC(K)+TXS(K), \tag{2}$$

где

$$XC(K)=\sum_{I=1}^{N} Y(I) \cos\,[2\pi IK/N],\quad K=\overline{1,N}; \tag{3}$$

$$XS(K)=\sum_{I=1}^{N-1} Y(I) \sin\,[2\pi IK/N],\quad K=\overline{1,\ (N-1)}, \tag{4}$$

$$Y(N)=Y(0),\quad XC(N)=XC(0).$$

Рассмотрим отдельно вычисление четных и нечетных компонент косинусного и синусного преобразования исходного массива

$$XC(2K)=\sum_{I=1}^{N} Y(I)\cos\,[2\pi IK/(N/2)],\quad K=\overline{1, N/2}, \tag{5}$$

$$XC(2K+1)=\sum_{I=1}^{N} y(I)\cos\,[2\pi I(2K+1)/N],\quad K=\overline{0,\ (N/2-1)}, \tag{6}$$

$$XS(2K)=\sum_{I=1}^{N-1} Y(I)\sin\,[2\pi IK/(N/2)],\quad K=1,\ \overline{(N/2-1)}; \tag{7}$$

$$XS(2K+1)=\sum_{I=1}^{N-1} Y(I)\sin\,[2\pi I(2K+1)/N],\quad K=\overline{0,\ (N/2-1)}. \tag{8}$$

Разобьем в формулах (5)—(8) имеющиеся суммы на две — для интервалов $I=\overline{1, N/2}$ и $I=\overline{(N/2+1), N}$ соответственно и осуществим замену переменной $I=N/2+I$ во втором интервале. Тогда получим

$$XC(2K)=\sum_{I=1}^{N/2} Y2(I)\cos\,[2\pi IK/(N/2)],\quad K=\overline{1, N/2}, \tag{9}$$

$$XC(2K+1)=\sum_{I=1}^{N/2} Y1(I)\cos\,[2\pi I(2K+1)/N],\quad K=\overline{0,\ (N/2-1)}, \tag{10}$$

$$XS(2K)=\sum_{I=1}^{N/2-1} Y2(I)\sin\,[2\pi IK/(N/2)],\quad K=\overline{0,\ (N/2-1)}, \tag{11}$$

$$XS(2K+1)=\sum_{I=1}^{N/2-1} Y1(I)\sin\,[2\pi I(2K+1)/N],\quad K=\overline{0,\ (N/2-1)}, \tag{12}$$

$$Y2(I)=Y(I)+Y(N/2+I),\quad I=\overline{1, N/2}, \tag{13}$$

$$Y1(I)=Y(I)-Y(N/2+I),\quad I=\overline{1,\ (N/2-1)}, \tag{14}$$
$$Y'1(N/2)=Y(N)-Y(N/2);\ \text{т. е.}\ \ I=N/2.$$

3. Нечетное трансформантное преобразование

Остановимся теперь подробнее на вычислениях только нечетных компонент косинусного и синусного преобразований. Для исключения избыточности операций в формулах (10) и (12) проводим суммирование четных и нечетных значений индекса I отдельно, т. е.

$$XC(2K+1)=\sum_{I=0}^{N/4-1} Y1(2I+1)\cos\,[2\pi(2I+1)(2k+1)/N]+$$
$$+\sum_{I=1}^{N/4} Y1(2I)\cos\,[2\pi I(2K+1)/(N/2)],$$
$$XS(2K+1)=\sum_{I=0}^{N/4-1} Y1(2I+1)\sin\,[2\pi(2I+1)(2K+1)/N]+$$
$$+\sum_{I=1}^{N/4-1} Y1(2I)\sin\,[2\pi I(2K+1)/(N/2)].$$

Введем обозначения

$$C1_N(2K+1)=\sum_{I=0}^{N/4-1} Y1(2I+1)\cos\,[2\pi(2I+1)(2K+1)/N], \tag{15}$$

$$S1_N(2K+1)=\sum_{I=0}^{N/4} Y1(2I+1)\sin\,[2\pi(2I+1)(2k+1)/N] \tag{16}$$

и в суммах по четным индексам повторяем разбиения. В итоге образуются следующие последовательности:

$$XC(2K+1)=C1_N(2K+1)+C1_{N/2}(2K+1)+\ldots+C1_8(2K+1)+Y'1(N/2), \quad (17)$$

$$XS(2K+1)=S1_N(2K+1)+S1_{N/2}(2K+1)+\ldots+S1_8(2K+1)+Y'1(N/4), \quad (18)$$

$$Y'(N/4)=(-1)^K Y1(N/4),$$

где

$$C1_{N/R}(2K+1)=\sum_{I=0}^{N/4R-1} Y1[R(2I+1)]\cos[2\pi(2I+1)(2K+1)/(N/R)], \quad (19)$$

$$S1_{N/R}(2K+1)=\sum_{I=0}^{N/4R-1} Y1[R(2I+1)]\sin[2\pi(2I+1)(2K+1)/(N/R)], \quad (20)$$

$$R=2^r, \quad r=\overline{0,\ (P-3)}; \quad K=\overline{0,\ (N/2R-1)}.$$

Следует обратить внимание на тот факт, что N/R определяет период нечетных трансформантов преобразования $C1_{N/R}(2K+1)$ и $S\,1_{N/R}(2K+1)$, причем по мере увеличения R он уменьшается.

Введем аналогичные индексы для нечетных промежуточных компонент косинусного и синусного преобразований, т. е.

$$XC_{N/R}(2K+1)=C1_{N/R}(2K+1)+C1_{N/2R}(2K+1)+\ldots+ + C1_8(2K+1)+Y'1(N/2), \quad (21)$$

$$XS_{N/R}(2K+1)=S1_{N/R}(2K+1)+S1_{N/2R}(2K+1)+\ldots+ + S1_8(2K+1)+Y'1(N/4), \quad (22)$$

то

$$XC_{2N/R}=C1_{2N/R}(2K+1)+XC_{N/R}(2K+1), \quad (23)$$

$$XS_{2N/R}=S1_{2N/R}(2K+1)+XS_{N/R}(2K+1). \quad (24)$$

Это означает, что вычисления по формулам (17) и (18) следует начинать с конца, т. е. от $Y'1(N/2)$ и $Y'1(N/4)$ в сторону увеличения периода трансформантов. Расширение $XC_{N/R}(2K+1)$ и $XS_{N/R}(2K+1)$ на период $2N/2$ осуществляется без каких-либо вычислительных затрат путем обыкновенного периодического продолжения.

4. Свойства симметрии нечетных преобразований

При определении $C1_{N/R}(2K+1)$ и $S1_N(2K+1)$ нет необходимости проведения расчетов для всех $K=\overline{0,\ (N/2R-1)}$, так как достаточным является объем $K=\overline{0,\ (N/8R-1)}$, поскольку

$$C1_{N/R}[N/2R\pm(2K+1)]=-C1_{N/R}(2K+1), \quad K=\overline{0,\ (N/4R-1)}$$

$$C1_{N/R}[N/4R-(2K+1)]=-C1_{N/R}[N/4R+(2K+1)], \quad K=\overline{0,\ (N/8R-1)};$$

$$S1_{N/R}[N/2R\pm(2K+1)]=\mp S1_{N/R}(2K+1), \quad K=\overline{0,\ (N/4R-1)},$$

$$S1_{N/R}[N/4R-(2K+1)]=S1_{N/R}[N/4R+(2K+1)], \quad K=\overline{0,\ (N/8R-1)}.$$

Здесь уместно указать, что

$$XC(2K+1)=XC(N-(2K+1)), \quad K=\overline{0,\ (N/4-1)}$$

$$\text{и}\quad XS(2K+1)=-XS(N-(2K+1)), \quad K=\overline{0,\ (N/4-1)},$$

т. е. $XC(2K+1)$ и $XS(2K+1)$ определены для всего интервала $K=\overline{0,\ (N/2-1)}$ по своим значениям из интервала $K=\overline{0,\ (N/4-1)}$.

5. Представление четных косинусных и синусных компонент спектра через нечетные трансформантные преобразования

Исходными являются формулы (9) и (11). Сравнивая с формулами (3) и (4) замечаем их полную эквивалентность для дважды укороченного массива. Следовательно, для получения формул типа (5)—(24) аналогичные преобразования должны быть повторены относительно массива $Y2(I)$

$$Y4(I)=Y2(I)+Y2(N/4+I),\quad I=\overline{1,\ N/4}, \tag{25}$$

$$Y3(I)=Y2(I)-Y2(N/4+I),\quad I=\overline{1,\ (N/4-1)}, \tag{26}$$
$$Y'3(N/4)=Y2(N/2)-Y2(N/4);$$

$$XC(4K)=\sum_{I=1}^{N/4} Y4(I)\cos\left[2\pi IK/(N/4)\right],\quad K=\overline{1,\ N/4}; \tag{27}$$

$$XC(4K+2)=\sum_{I=1}^{N/4} Y3(I)\cos\left[2\pi I(2K+1)/(N/2)\right],\quad K=\overline{0,\ (N/4-1)}, \tag{28}$$

$$XS(4K)=\sum_{I=1}^{N/4-1} Y4(I)\sin\left[2\pi IK/(N/4)\right],\quad K=\overline{1,\ (N/4-1)}; \tag{29}$$

$$XS(4K+2)=\sum_{I=1}^{N/4-1} Y3(I)\sin\left[2\pi I(2K+1)/(N/2)\right],\quad K=\overline{0;\ (N/4-1)}. \tag{30}$$

Формулы (28) и (30) имеют вид, подобный выражениям (10) и (12). Следовательно, имеет место представление

$$XC(4K+2)=C1_{N/2}(4K+2)+C1_{N/4}(4K+2)+\ldots+$$
$$+C1_8(4K+2)+Y'3(N/4), \tag{31}$$

$$XS(4K+2)=S1_{N/2}(4K+2)+S1_{N/4}(4K+2)+\ldots+$$
$$+S1_8(4K+2)+Y'3(N/8),\quad Y'3(N/8)=(-1)^K Y3(N/8), \tag{32}$$

$$C1_{N/R}(4K+2)=\sum_{I=0}^{N/4R-1} Y3[R/2(2I+1)]\cos[2\pi(2I+1)(2K+1)/(N/R)], \tag{33}$$

$$S1_{N/R}(4K+2)=\sum_{I=0}^{N/4R-1} Y3[R/2(2I+1)]\sin[2\pi(2I+1)(2K+1)/(N/R)], \tag{34}$$

$$R=2^r,\quad r=\overline{1,\ (P-3)},\quad K=\overline{0,\ (N/2R-1)}.$$

Вычисления по формулам (27) и (29) следует провести аналогично, т. е. через нечетные трансформантные преобразования до формирования $XC(0)=XC(N)$.

6. Нечетный трансформант с периодом N

Для полного определения алгоритма сокращенного вычисления ДПФ требуются правила расчета $C1_{N/R}$, $S1_{N/R}$ для всех R. Сравнивая формулы (15), (16) и (19), (20) нетрудно заметить их сходство. Поэтому в дальнейшем исходим из формул (15) и (16), в которых $k=\overline{0,\ (N/8-1)}$.

Для перекрытия спектра в интервале $k=\overline{0,\ (N/8-1)}$ путем спектрального расширения придаем выражениям (15) и (16) следующий вид:

$$C1_N(2K+1)=\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+1)\cos\left[2\pi(NI/G+1)(2K+1)/N\right]+$$
$$+\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+3)\cos\left[2\pi(NI/G+3)(2K+1)/N\right]+\ldots+$$
$$+\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+(N/G-1))\cos[2\pi(NI/G+(N/G-1))(2K+1)/N], \tag{35}$$

$$S1_N(2K+1)=\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+1)\sin[2\pi(NI/G+1)(2K+1)/N]+$$

$$+\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+3)\cos[2\pi(NI/G+3)(2K+1)/N]+\ldots+$$

$$+\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+(N/G-1))\cos[2\pi(NI/G+(N/G-1))(2K+1)/N], \quad (36)$$

Введем обозначения:

$$XC_G^Q(2K+1)=\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+Q)\cos[2\pi I(2K+1)/G], \quad (37)$$

$$XS_G^Q(2K+1)=\sum_{I=0}^{G/2-1} Y1(NI/G+Q)\sin[2\pi I(2K+1)/G], \quad (38)$$

$$RC(Q;\ 2K+1)=\cos[2\pi Q(2K+1)/N]XC_G^Q(2K+1)-$$
$$-\sin[2\pi Q(2K+1)/N]XS_G^Q(2K+1), \quad (39)$$

$$RS(Q;\ 2K+1)=\sin[2\pi Q(2K+1)/N]XC_G^Q(2K+1)+$$
$$+\cos[2\pi Q(2K+1)/N]XS_G^Q(2K+1), \quad (40)$$

$$Q=2m+1,\quad m=\overline{0,\ (N/2G-1)},$$

и тогда

$$C1_N(2K+1)=\sum_{m=0}^{N/2G-1} RC[2m+1;\ 2K+1], \quad (41)$$

$$S1_N(2K+1)=\sum_{m=0}^{N/2G-1} RS[2m+1;\ 2K+1], \quad (42)$$

$$K=\overline{0,\ (N/8-1)}.$$

Формулы (37) — (42) при $K=\overline{0,\ (N/8-1)}$ содержат значительную избыточность, т. к. $XC_G{}^Q(2K+1)$ и $XS_G{}^Q(2K+1)$ полностью определены при $K=\overline{0,\ (G/4-1)}$. Поэтому представляет интерес процесс распространения $XC_G{}^Q(2K+1)$, $XS_G{}^Q(2K+1)$, $RC(Q;\ 2K+1)$, $RS(Q;\ 2K+1)$ из области $K=\overline{0,\ (G/4-1)}$ в область $K=\overline{0,\ (N/8-1)}$.

Для этого рассмотрим частотные интервалы величиной $\pm G/2$ около GH, где $H=\overline{0, N/4G}$, т. е. в формулах (37) — (40) осуществляем замену $2K+1$ на $GH\pm(2K+1)$, причем $K=\overline{0,\ (G/4-1)}$.

Тогда $$XC_G^Q[GH\pm(2K+1)]=XC_G^Q(2K+1), \quad (43)$$

$$XS_G^Q[GH\pm(2K+1)]=\pm XS_G^Q(2K+1), \quad (44)$$

$$RC(Q;\ GH\pm(2K+1))=\cos[2\pi QH/(N/G)]RC(Q;\ 2K+1)\mp$$
$$\mp\sin[2\pi QH/(N/G)]RS(Q;\ 2K+1), \quad (45)$$

$$RS(Q;\ GH\pm(2K+1))=\sin[2\pi QH/(N/G)]RC(Q;\ 2K+1)\pm$$
$$\pm\cos[2\pi QH/(N/G)]RS(Q;\ 2K+1) \quad (46)$$

и

$$C1_N[GH\pm(2K+1)]=\sum_{m=0}^{N/2G-1} RC[2m+1;\ GH\pm(2K+1)], \quad (47)$$

$$S1_N[GH\pm(2K+1)]=\sum_{m=0}^{N/2G-1} RS[2m+1;\ GH\pm(2K+1)], \tag{48}$$

$$H=\overline{0,\ N/4G},\quad K=\overline{0,\ (G/4-1)},\quad N\geqslant 16,\quad 4\leqslant G\leqslant N/4.$$

В выражениях (45), (46) аргумент косинуса и синуса при изменении m от 0 до $N/2G-1$ достигает величины $2\pi H(1-G/N)$ и при $G\leqslant N/4$ принимает значения с определенной дискретностью из всего интервала $\{0,2\pi\}$. Следовательно, преобразованиями типа (13), (14) можно сократить вычисления и здесь:

$$RC1[Q;\ 2K+1]=RC[Q;\ 2K+1]-RC\left[\frac{N}{2G}+Q;\ 2K+1\right], \tag{49}$$

$$RC2[Q;\ 2K+1]=RC[Q;\ 2K+1]+RC\left[\frac{N}{2G}+Q;\ 2K+1\right], \tag{50}$$

$$RS1[Q;\ 2K+1]=RS[Q;\ 2K+1]-RS\left[\frac{N}{2G}+Q;\ 2K+1\right], \tag{51}$$

$$RS2[Q;\ 2K+1]=RS[Q;\ 2K+1]+RS\left[\frac{N}{2G}+Q;\ 2K+1\right], \tag{52}$$

$$Q=2m+1,\quad m=\overline{0,\ (N/4G-1)}.$$

Теперь, вычисляя $C1_N[GH\pm(2K+1)]$, $S1_N[GH\pm(2K+1)]$ раздельно для $2H$ и $2H+1$, получаем:

$$C1_N[G2H\pm(2K+1)]=\sum_{m=0}^{N/4G-1}\{\cos[2\pi H(2m+1)/(N/2G)]\times$$
$$\times RC2[2m+1;\ 2K+1]\mp\sin[2\pi H(2m+1)/(N/2G)]\times$$
$$\times RS2[2m+1;\ 2K+1]\}=C1_{N/2}^{RC2,RS2}[GH\pm(2K+1)], \tag{53}$$

$$S1_N[G2H\pm(2K+1)]=\sum_{m=0}^{N/4G-1}\{\sin[2\pi H(2m+1)/(N/2G)]\times$$
$$\times RC2[2m+1;\ 2K+1]\pm\cos[2\pi H(2m+1)/(N/2G)]\times$$
$$\times RS2[2m+1;\ 2K+1]\}=S1_{N/2}^{RC2,RS2}[GH\pm(2K+1)], \tag{54}$$

$$H=\overline{0,\ N/8G};$$

$$C1_N[G(2H+1)\pm(2K+1)]=\sum_{m=0}^{N/4G-1}\{\cos[2\pi(2H+1)(2m+1)/(N/G)]\times$$
$$\times RC1[2m+1;\ 2K+1]\mp\sin[2\pi(2H+1)(2m+1)/(N/G)]\times$$
$$\times RS1[2m+1;\ 2K+1]\}=C1_{N/G}^{RC1}[2H+1;\ 2K+1]\mp S1_{N/G}^{RS1}[2H+1;\ 2K+1], \tag{55}$$

$$S1_N[G(2H+1)\pm(2K+1)]=\sum_{m=0}^{N/4G-1}\{\sin[2\pi(2H+1)(2m+1)/(N/G)]\times$$
$$\times RC1[2m+1;\ 2K+1]\pm\cos[2\pi(2H+1)(2m+1)/(N/G)]\times$$
$$\times RS1[2m+1;\ 2K+1]\}=S1_{N/G}^{RC1}[2H+1;\ 2K+1]\pm C1_{N/G}^{RS1}[2H+1;\ 2K+1],$$

$$H=\overline{0,\ (N/8G-1)},\quad K=\overline{0,\ (G/4-1)}.$$

Последние части в формулах (53)—(56) записаны на основе выражений (39)—(42) и (19), (20) с той лишь разницей, что здесь верхним индексом указаны признаки массивов, по которым они вычисляются. Для получения всех $C1_N[G2H\pm(2K+1)]$, $S1_N[G2H\pm(2K+1)]$ следует осуществить процедуры сложения-вычитания массивами $RC2[2m+1;\ 2K+1]$ и $RS2[2m+1;\ 2K+1]$, аналогично формулам (49)—(52) и разбиению H на четные и нечетные части (т. е. на следующем этапе рассматриваются окрестности $G(4H+2)$, а $G4H$ окрестности идут на дальнейшее разбиение) до образования компонент $C1_N(2K+1)$ и $S1_N(2K+1)$.

7. Построение алгоритма сокращенного вычисления ДПФ для заданного объема входного массива N

Полный алгоритм сокращенного вычисления ДПФ основывается на нечетных трансформантных преобразованиях с периодами N/R, $R=2^r$, $r\in\{0, P-2\}$ (обозначаем как НТП-N/R), математически описываемые формулами (17) и (18), причем для вычисления нечетных компонент спектра $XC(2K+1)$ и $XS(2K+1)$ требуется лишь НТП-N, а все четные компоненты образуются в результате последовательного применения всех НТП с периодами от $N/2$ до 0. Входными данными для НТП-N/R служат результаты последовательных разностных преобразований $Y1(I)$, $Y(3)(I)$, ..., $Y(N/2-1)(I)$, $Y(N-1)(1)=XC(N/2)$.

Величины $C1_{N/R}(2K+1)$ и $S1_{N/R}(2K+1)$, входящие в выражения (17) и (18), следует определить по формулам (53) и (56) при $N\geqslant16$, а $C1_8(2K+1)$ и $S1_8(2K+1)$ по (15) и (16).

Для определения НТП-N следует определить последовательно все нечетные трансформанты с периодом N (обозначаем как CS_N) включительно. Входными данными нечетных трансформантов служат компоненты нечетного разбиения входного массива.

Например, при определении нечетных гармоник $XC(2K+1)$ и $XS(2K+1)$ по $Y1(I)$ следует прежде всего осуществить разбиение массива на два по четным и нечетным индексам, т. е. $Y1(2I)$, $Y1(2I+1)$, причем по $Y1(2I+1)$ осуществляется преобразование CS_N, т. е. вычисление $C1_N(2K+1)$ и $S1_N(2K+1)$; далее $Y1(2I)$: $Y1(4I)$, $Y1(4I+2)$; по $Y1(4I+2)-CS_{N/2}$; и т. д.; $Y1(NI/8)$, $I=\overline{1,4}$: $Y1(NI/4)$, $I=\overline{1,2}$ и $Y1(NI/4+N/8)$, $I=0{,}1$ по $Y1(NI/4+N/8)-CS_8$; $Y1(NI/4)$: $Y1(N/4)$ и $Y1(N/2)$, т. е. последовательно формировались все потоки входных данных для реализации вычислений по формулам (17) и (18).

Конструирование алгоритма НТП-N следует начинать с построения вычислительных схем CS_8, CS_{16}, ..., CS_N, причем по мере увеличения N следует воспользоваться соотношениями (53)—(56), учитывая, что $XC_G^Q(2K+1)$ и $XS_G^Q(2K+1)$ (формулы (37), (38) не что иное, как НТП-G для подмассива с признаком Q.

На основе фрагментов CS_8, ..., CS_N образуются вычислительные схемы всех НТП-N/R и таким образом определяются все компоненты спектра.

Осуществляя вычисления по предложенным формулам и изложенной последовательности и учитывая, что $RC(Q,\ 2K+1)$ и $RS(Q,\ 2K+1)$ (формулы (39), (40) могут быть получены по $XC_G^Q(2K+1)$ и $XS_G^Q(2K+1)$ тремя операциями умножения и сложения (вычитания) (коэффициенты преобразования предполагаются известными), необходимое количество математических операций для выполнения ДПФ действительного входного массива приведено в таблице.

N	Число вещественных умножений	Число вещественных сложений	Суммарное количество операций
8	2	20	22
16	10	60	70
32	34	164	198
64	98	420	518
128	258	1028	1286
256	642	2436	3078
512	1538	5636	7174
1024	3586	12804	16390
2048	8194	28676	36870
4096	18434	63462	81896
8192	40962	139238	180200

При комплексных входных данных количество всех математических операций удваивается.

8. Заключение

Сравнивая предлагаемый алгоритм с известными, замечаем, что при комплексных входных данных количество операций умножения остается таким же, как в алгоритме Рейдера—Бреннера [7], а количество операций сложения существенно уменьшается.

Данный алгоритм свободен от общего недостатка вычислительной схемы Рейдера—Бреннера: увеличения погрешностей расчета по мере увеличения N.

Общее количество математических операций предложенного сокращенного алгоритма вычисления ДПФ является наименьшим из числа всех известных алгоритмов, в том числе и алгоритма Винограда [7]. Преимущество данного алгоритма растет по мере увеличения объема входного массива N.

Особенно следует отметить, что некомплексность входного массива сокращает количество всех арифметических операций в два раза.

Таким образом, по суммарному количеству арифметических операций найден наиболее эффективный алгоритм ДПФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. М., «Наука», 1966.
2. *Lifermann, J.* Les Methodes Rapides de Transformation du Signal: Fourier, Walsh, Hadamard, Haar. MASSON. Paris—New York—Barcelone—Milan, 1979.
3. Programs for Digital Signal Processing. IEEE Press, 1979.
4. *Ахмед Н., Рао К. Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. М., «Связь», 1980.
5. *Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М., «Радио и связь», 1983.
6. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений. (Под ред. Т. С. Хуанга). М., «Радио и связь», 1984.
7. *Нуссбаумер Г.* Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М., «Радио и связь», 1985.

Специальное конструкторское бюро вычислительной техники Института кибернетики Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 31/I 1986

I. ARRO

DISKREETSE FOURIER' TEISENDUSE KOONDARVUTUSALGORITM

Artiklis on toodud kiire Fourier' teisenduse arvutusalgoritmi arendus, millest on elimineeritud kõik triviaalsed korrutustehted ning mille puhul spektri komponendid leitakse kordsete sagedustega tsükliliste transformantide summana. Aritmeetikatehete koguvaru poolest on esitatud diskreetse Fourier' teisenduse arvutusalgoritm antud ajamomendil kõige efektiivsem.

I. ARRO

VERKÜRZTER ALGORITHMUS FÜR DIE DISKRETE FOURIER-TRANSFORMATION

Es wird die Entwicklung der schnellen Fourier-Transformation betrachtet durch Ausschließung der trivialen Multiplikationsoperationen und Berechnung der Spektrumkomponenten als Summe zyklischer Transformanten mit divisiblen Perioden.

Nach der Summe aller arithmetischen Operationen hat der vorliegende Algorithmus für die diskrete Fourier-Transformation z. Z. den größten Effekt.