EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1987, 36, 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1987.1.01

УДК 517.986.2

А. КОКК

ОПИСАНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДУЛЬ-АЛГЕБР

(Представил А. Хумал)

Пусть $\mathbf{K}$ — поле $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$ и A — топологическая $\mathbf{K}$-алгебра, т. е. линейное топологическое пространство над $\mathbf{K}$, в котором определено умножение элементов, относительно которого оно является ассоциативной алгеброй, и в топологии которого рассматриваемое умножение элементов (как билинейное отображение $A\times A$ в A) раздельно непрерывно. В частном случае, когда умножение элементов алгебры A непрерывно в совокупности, A называется *топологической* $\mathbf{K}$*-алгеброй с непрерывным умножением*.

Пусть теперь топология алгебры A отделима. Тогда она имеет пополнение $\bar{A}$ (см. напр., [1], с. 131), являющееся отделимым линейным топологическим пространством, но не обязательно алгеброй (см. [2], с. 21). В случае, когда A является отделимой топологической $\mathbf{K}$-алгеброй с непрерывным умножением, то умножение элементов алгебры A непрерывно продолжаемо на $\bar{A}\times\bar{A}$ (см. [3], с. 100). Поэтому в таком случае и пополнение $\bar{A}$ алгебры A является отделимой топологической $\mathbf{K}$-алгеброй с непрерывным умножением. При этом алгебра A является топологически изоморфной всюду плотной подалгебре алгебры $\bar{A}$.

Топологическая $\mathbf{K}$-алгебра B называется *топологической модуль-алгеброй относительно алгебры* A или, коротко, *топологической* $(A, \mathbf{K})$*-алгеброй*, если

1) *A есть топологическая $\mathbf{K}$-алгебра,*
2) *B есть A-бимодуль,*
3) *модульные умножения алгебры B (т. е. отображения $(a, b)\to ab$ и $(b, a)\to ba$ произведений $A\times B$ в B и $B\times A$ в B соответственно) раздельно непрерывны*

и

4) $a(b_1b_2)=(ab_1)b_2$, $(b_1b_2)a=b_1(b_2a)$ *и* $b_1(ab_2)=(b_1a)b_2$ *для всех* $b_1, b_2\in B$ *и* $a\in A$.

При этом, если алгебра A имеет единицу (здесь и всюду в дальнейшем через e_A обозначается единица алгебры A), то $e_Ab=b=be_A$ для всех $b\in B$, а если алгебра B имеет единицу, то $ae_B=e_Ba$ для всех $a\in A$. Топологическая $(A, \mathbf{K})$-алгебра B называется *топологической* $(A, \mathbf{K})$*-алгеброй с непрерывным умножением*, если она является топологической $\mathbf{K}$-алгеброй с непрерывным умножением.

Целью данной статьи является описание гомоморфизмов топологической $(A, \mathbf{K})$-алгебры в топологическую $\mathbf{K}$-алгебру. Для этого, пусть A — топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с единицей, C и D — топологические $\mathbf{K}$-алгебры, $\mathrm{hom}\,(A, D)$ — множество всех нетривиальных непрерывных $\mathbf{K}$-гомоморфизмов A в D, наделенное слабой топологией, $\mathrm{hom}\,A=$ $=\mathrm{hom}\,(A, \mathbf{K})$ и $H_{ADC}=\mathrm{hom}\,(A, C)\times\mathrm{hom}\,(D, C)$. Пусть далее $\mathbf{N}_n=$ $=\{1, 2, \ldots, n\}$ для каждого $n\in\mathbf{N}$, Θ_A — нулевой элемент алгебры

A, B — топологическая $(A, \mathbf{K})$-алгебра с единицей, Z — подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$, AZ — A-подмодуль алгебры B, порожденный алгеброй Z и

$$\Lambda[\lambda; \varrho]\left(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda(a_k)\varrho(z_k)$$

для всех $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, $n \in \mathbf{N}$, $a_k \in A$ и $z_k \in Z$ с $k \in \mathbf{N}_n$.

В случае, когда отображение $\Lambda \in \hom(AZ, C)$ имеет продолжение на замыкание $\mathrm{cl}_B AZ$ подмножества AZ в топологии алгебры B, то это продолжение будем обозначать через $\overline{\Lambda}$. Кроме того, через S_{AZC} будем обозначать подмножество тех пар $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, для которых выполнены условия

(α) *если $m \in \mathbf{N}$, $a_k \in A$ и $z_k \in Z$ для каждого $k \in \mathbf{N}_m$ суть такие, что $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_m z_m = \Theta_{AZ}$, то*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda(a_k)\varrho(z_k) = \Theta_C,$$

(β) *$\lambda(a)\varrho(z) = \varrho(z)\lambda(a)$ при всех $a \in A$ и $z \in Z$,*

(γ) *$\lambda(e_A) = \varrho(e_B)$*

и

(δ) *отображение $\Lambda[\lambda, \varrho]$ непрерывно на AZ.*

Основные результаты данной статьи следующие.

Теорема 1. *Пусть A — топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с единицей, C — топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с непрерывным умножением, B — топологическая $(A, \mathbf{K})$-алгебра с единицей и Z — подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если*

(а) *$az = za$ при всех $a \in A$ и $z \in Z$*

и

(б) *множество $\hom(AZ, C)$ непусто,*

то каждый гомоморфизм $\Lambda \in \hom(AZ, C)$ определяет элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \Lambda[\lambda, \varrho]$ и отображение φ, определяемое равенством $\varphi(\lambda, \varrho) = \Lambda[\lambda, \varrho]$ для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$, является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\hom(AZ, C)$.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 пусть алгебра C полна и отделима, умножение в алгебре B непрерывно и пусть выполнено условие*

(в) *подмодуль AZ алгебры B всюду плотен в B.*

Тогда каждый гомоморфизм $\Lambda \in \hom(B, C)$ определяет элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \overline{\Lambda[\lambda, \varrho]}$, и отображение Φ, определяемое равенством $\Phi(\lambda, \varrho) = \overline{\Lambda[\lambda, \varrho]}$ при всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$, является биекцией S_{AZC} на $\hom(B, C)$, обратное отображение которой непрерывно на $\hom(B, C)$.

В частном случае, когда выполнено и условие

(г) *пространство $\hom(AZ, C)$ локально равностепенно непрерывно, то Φ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\hom(B, C)$.*

Теорема 3. *Пусть A — топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с единицей, C — полная отделимая топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с непрерывным умножением, B — отделимая топологическая $(A, \mathbf{K})$-алгебра с единицей и с непрерывным умножением, а Z — такая подалгебра алгебры B, что $e_B \in Z$. Если выполнены условия (а), (б), (в) и (г), то пространства S_{AZC} и $\hom(\overline{B}, C)$ гомеоморфны.*

1. Доказательство теоремы 1. Ясно, что подмодуль AZ образует (по условию (а)) подалгебру алгебры B. Пусть $\Lambda \in \hom(AZ, C)$. Положим $\varrho_\Lambda = \Lambda | Z$ (т. е. ϱ_Λ является сужением отображения Λ на Z) и

$\lambda_\Lambda(a) = \Lambda(ae_B)$ для каждого $a \in A$. Поскольку гомоморфизм Λ нетривиален на AZ, то и отображения λ_Λ и ϱ_Λ нетривиальны на A и Z соответственно, ибо $\lambda_\Lambda(e_A) = \varrho_\Lambda(e_B) = \Lambda(e_B)$. Нетрудно заметить, что отображения λ_Λ и ϱ_Λ непрерывны, линейны и мультипликативны на A и Z соответственно. Кроме того, пара $(\lambda_\Lambda; \varrho_\Lambda)$ удовлетворяет условиям (β) и (γ) (по условию (a)). Так как

$$\Lambda\left(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_\Lambda(a_k)\varrho_\Lambda(z_k)$$

при всех $n \in \mathbf{N}$, $a_i \in A$ и $z_i \in Z$ с $i \in \mathbf{N}_n$, то $\Lambda = \Lambda[\lambda_\Lambda, \varrho_\Lambda]$ и выполнены условия (α) и (δ). Значит, $(\lambda_\Lambda, \varrho_\Lambda) \in S_{AZC}$.

Пусть теперь $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$. Поскольку $\varrho \in \mathrm{hom}(Z, C)$, то $\varrho(e_B) \neq \neq \Theta_C$. Поэтому $\Lambda[\lambda, \varrho](e_B) = \lambda(e_A)\varrho(e_B) \neq \Theta_C$ (по условию (γ)). Следовательно, отображение $\Lambda[\lambda, \varrho]$ нетривиально на AZ. Кроме того, отображение $\Lambda[\lambda, \varrho]$ линейно, непрерывно (по условию (δ)) и мультипликативно (по условию (β)) на AZ. Таким образом, $\Lambda[\lambda, \varrho] \in \mathrm{hom}(AZ, C)$.

Пусть далее $(\lambda_1; \varrho_1)$, $(\lambda_2, \varrho_2) \in S_{AZC}$ и $(\lambda_1, \varrho_1) \neq (\lambda_2, \varrho_2)$. Тогда справедливо либо $\Lambda[\lambda_1, \varrho_1](a_0 e_B) = \lambda_1(a_0) \neq \lambda_2(a_0) = \Lambda[\lambda_2, \varrho_2](a_0 e_B)$, либо $\Lambda[\lambda_1, \varrho_1](z_0) = \varrho_1(z_0) \neq \varrho_2(z_0) = \Lambda[\lambda_2, \varrho_2](z_0)$ для некоторых $a_0 \in A$ и $z_0 \in Z$ (по условию (γ)). Поэтому $\Lambda[\lambda_1, \varrho_1] \neq \Lambda[\lambda_2, \varrho_2]$. Следовательно, φ (определяемое равенством $\varphi(\lambda, \varrho) = \Lambda[\lambda, \varrho]$ при всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$) отображает множество S_{AZC} взаимно однозначно на $\mathrm{hom}(AZ, C)$.

Покажем теперь непрерывность отображения φ. Для этого, пусть $(\lambda_0, \varrho_0) \in S_{AZC}$ и $O_0(\Lambda_0)$ — любая окрестность элемента $\Lambda_0 = \varphi(\lambda_0, \varrho_0)$ в топологии пространства $\mathrm{hom}(AZ, C)$. Тогда существуют число $r \in \mathbf{N}$ и для каждого $k \in \mathbf{N}_r$ число $m(k) \in \mathbf{N}$, элементы $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,m(k)} \in A$ и $z_{k,1}, z_{k,2}, \ldots, z_{k,m(k)} \in Z$ и окрестность нуля U_k алгебры C такие, что

$$\bigcap_{k=1}^{r} \{\Lambda \in \mathrm{hom}(AZ, C) : (\Lambda - \Lambda_0)(d_k) \in U_k\} \subseteq O_0(\Lambda_0),$$

где $d_k = a_{k,1}z_{k,1} + a_{k,2}z_{k,2} + \ldots + a_{k,m(k)}z_{k,m(k)}$. Пусть $x_{k,i} = \Lambda_0(a_{k,i}z_{k,i})$ и $y_k = \Lambda_0(d_k)$ для всех $k \in \mathbf{N}_r$ и $i \in \mathbf{N}_{m(k)}$. Тогда в алгебре C найдутся окрестности $T_{k,i}$ элементов $x_{k,i}$ такие, что $T_{k,1} + T_{k,2} + \ldots + T_{k,m(k)} \subset y_k + U_k$ при всех $k \in \mathbf{N}_r$. В силу непрерывности умножения в алгебре C найдутся, в свою очередь, окрестности $S_{k,i}$ элементов $\lambda_0(a_{k,i})$ и окрестности $R_{k,i}$ элементов $\varrho_0(z_{k,i})$ такие, что $S_{k,i}R_{k,i} \subset T_{k,i}$ при всех $k \in \mathbf{N}_r$ и $i \in \mathbf{N}_{m(k)}$.

Пусть теперь $S_{k,i} = \lambda_0(a_{k,i}) + V_{k,i}$ и $R_{k,i} = \varrho_0(z_{k,i}) + W_{k,i}$, где $V_{k,i}$ и $W_{k,i}$ — окрестности нуля алгебры C для всех $k \in \mathbf{N}_r$ и $i \in \mathbf{N}_{m(k)}$. Кроме того, пусть

$$O_1 = \bigcap_{k=1}^{r} \bigcap_{i=1}^{m(k)} \{\lambda \in \mathrm{hom}(A, C) : (\lambda - \lambda_0)(a_{k,i}) \in V_{k,i}\}$$

и

$$O_2 = \bigcap_{k=1}^{r} \bigcap_{i=1}^{m(k)} \{\varrho \in \mathrm{hom}(Z, C) : (\varrho - \varrho_0)(z_{k,i}) \in W_{k,i}\}.$$

Тогда из $(\lambda, \varrho) \in O_3 = (O_1 \times O_2) \cap S_{AZC}$ следует, что $\lambda(a_{k,i}) \in S_{k,i}$ и $\varrho(z_{k,i}) \in R_{k,i}$. Поэтому $\lambda(a_{k,i})\varrho(z_{k,i}) \in T_{k,i}$ при всех $(\lambda, \varrho) \in O_3$, $k \in \mathbf{N}_r$ и $i \in \mathbf{N}_{m(k)}$. Таким образом, элемент $c_k = \varphi(\lambda, \varrho)(d_k)$ принадлежит окрестности $y_k + U_k$, а элемент $(\varphi(\lambda, \varrho) - \Lambda_0)(d_k) = c_k - y_k$ — окрестности U_k для всех $k \in \mathbf{N}_r$. Значит, $\varphi(\lambda, \varrho) \in O_0(\Lambda_0)$ при всех $(\lambda, \varrho) \in O_3$. Поскольку O_3 является окрестностью точки (λ_0, ϱ_0) в топологии, индуцированной на S_{AZC} пространством H_{AZC}, то биекция φ непрерывна в любой точке $(\lambda_0, \varrho_0) \in S_{AZC}$.

Покажем теперь и непрерывность отображения φ^{-1}. Для этого пусть $\Lambda_1 \in \mathrm{hom}(AZ, C)$ и O — любая окрестность элемента $(\lambda_1, \varrho_1) = \varphi^{-1}(\Lambda_1)$ в топологии пространства S_{AZC}. Тогда в алгебре C существуют окрестности нуля $V_1, V_2, \ldots, V_n, W_1, W_2, \ldots, W_m$ и элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $z_1, z_2, \ldots, z_m \in Z$ такие, что $(O_4 \times O_5) \cap S_{AZC} \subset O$, где

$$O_4 = \bigcap_{k=1}^{n} \{\lambda \in \mathrm{hom}(A, C) : (\lambda - \lambda_1)(a_k) \in V_k\}$$

и

$$O_5 = \bigcap_{\nu=1}^{m} \{\varrho \in \mathrm{hom}(Z, C) : (\varrho - \varrho_1)(z_\nu) \in W_\nu\}.$$

Пусть далее

$$O_6 = \bigcap_{k=1}^{n} \{\Lambda \in \mathrm{hom}(AZ, C) : (\Lambda - \Lambda_1)(a_k e_B) \in V_k\}$$

и

$$O_7 = \bigcap_{\nu=1}^{m} \{\Lambda \in \mathrm{hom}(AZ, C) : (\Lambda - \Lambda_1)(z_\nu) \in W_\nu\}.$$

Тогда $O_1(\Lambda_1) = O_6 \cap O_7$ является окрестностью элемента Λ_1 в топологии пространства $\mathrm{hom}(AZ, C)$. Пусть теперь $\Lambda \in O_1(\Lambda_1)$. Тогда, по изложенному выше, $\Lambda = \Lambda[\lambda, \varrho]$ для некоторого элемента $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$. Так как $(\lambda - \lambda_1)(a_k) = (\Lambda - \Lambda_1)(a_k e_B) \in V_k$ для всех $k \in \mathbf{N}_n$ и $(\varrho - \varrho_1)(z_\nu) = (\Lambda - \Lambda_1)(z_\nu) \in W_\nu$ для всех $\nu \in \mathbf{N}_m$, то $\varphi^{-1}(\Lambda) = (\lambda, \varrho) \in O$. Итак, отображение φ^{-1} непрерывно в любой точке $\Lambda_1 \in \mathrm{hom}(AZ, C)$. Следовательно, отображение φ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\mathrm{hom}(AZ, C)$.

2. Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

Предложение* 1. *Пусть D — топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с непрерывным умножением, E — всюду плотная подалгебра алгебры D и H — полная отделимая топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с непрерывным умножением такие, что множество $\mathrm{hom}(E, H)$ непусто. Тогда каждый гомоморфизм $\omega \in \mathrm{hom}(E, H)$ продолжим до гомоморфизма $\bar{\omega} \in \mathrm{hom}(D, H)$ и отображение μ, определяемое равенством $\mu(\varrho) = \varrho | E$ для всех $\varrho \in \mathrm{hom}(D, H)$, является непрерывным и взаимно однозначным отображением пространства $\mathrm{hom}(D, H)$ на $\mathrm{hom}(E, H)$. В частном случае, когда пространство $\mathrm{hom}(E, H)$ локально равностепенно непрерывно, μ является гомеоморфизмом пространств $\mathrm{hom}(D, H)$ и $\mathrm{hom}(E, H)$.*

Доказательство. Пусть ϱ — любой элемент пространства $\mathrm{hom}(D, H)$. Поскольку E есть всюду плотная подалгебра алгебры D, то $\varrho | E \in \mathrm{hom}(E, H)$. Чтобы показать сюръективность отображения μ, возьмем любой элемент $\omega \in \mathrm{hom}(E, H)$. Тогда существует нетривиальное непрерывное линейное отображение $\bar{\omega} : D \to H$ такое, что $\omega = \bar{\omega} | E$ (см. [1], с. 129). Оказывается, что отображение $\bar{\omega}$ является и мультипликативным на D. Действительно, пусть $d_1, d_2 \in D$ и O — любая окрестность нуля алгебры H. Поскольку умножение в алгебре H непрерывно, то в ней существует закругленная окрестность нуля O_1 такая, что $O_1^2 + O_1 \bar{\omega}(d_2) + \bar{\omega}(d_1) O_1 + O_1 \subset O$. В силу равномерной непрерывности отображения $\bar{\omega}$, в алгебре D существует окрестность нуля U такая, что при $d - d' \in U$ справедливо $\bar{\omega}(d) - \bar{\omega}(d') \in O_1$. Теперь окрестность нуля U определяет (в силу непрерывности умножения в D) закругленную окрестность нуля U_1 алгебры D такую, что $U_1 \subset U$ и $U_1^2 + U_1 d_2 + d_1 U_1 \subset U$, а окрестность нуля U_1, в свою очередь, определяет (ввиду всюду плотности подалгебры

* Аналогичный результат в частном случае сформулирован в [4] с. 346.

E в D) элементы $e_1, e_2 \in E$ такие, что $e_1 - d_1 \in U_1$ и $e_2 - d_2 \in U_1$. Поскольку

$$d_1 d_2 - e_1 e_2 = (e_1 - d_1)(d_2 - e_2) + (d_1 - e_1) d_2 + d_1 (d_2 - e_2),$$

то $d_1 d_2 - e_1 e_2 \in U$. Поэтому по равенству

$$\bar{\omega}(d_1)\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(d_1 d_2) = (\bar{\omega}(e_1) - \bar{\omega}(d_1))(\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(e_2)) +$$

$$+ (\bar{\omega}(d_1) - \bar{\omega}(e_1))\bar{\omega}(d_2) + \bar{\omega}(d_1)(\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(e_2)) - (\bar{\omega}(d_1 d_2) - \bar{\omega}(e_1 e_2))$$

справедливо $\bar{\omega}(d_1)\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(d_1 d_2) \in O$. В силу отделимости алгебры H отсюда вытекает равенство $\bar{\omega}(d_1)\bar{\omega}(d_2) = \bar{\omega}(d_1 d_2)$. Итак, $\bar{\omega} \in \mathrm{hom}(D, H)$.

Так как алгебра H отделима и подалгебра E всюду плотна в D, то $\varrho_1 | E \neq \varrho_2 | E$ для двух различных гомоморфизмов $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathrm{hom}(D, H)$. Поэтому μ является взаимно однозначным отображением пространства $\mathrm{hom}(D, H)$ на $\mathrm{hom}(E, H)$.

Пусть теперь $\varrho_0 \in \mathrm{hom}(D, H)$ и $O(\omega_0)$ — любая окрестность элемента $\omega_0 = \varrho_0 | E$ в топологии пространства $\mathrm{hom}(E, H)$. Нетрудно заметить, что множество $\mu^{-1}(O(\omega_0)) = \{\varrho \in \mathrm{hom}(D, H) : \varrho | E \in O(\omega_0)\}$ является окрестностью гомоморфизма ϱ_0 в топологии пространства $\mathrm{hom}(D, H)$. Значит, отображение μ непрерывно в любой точке $\varrho_0 \in \mathrm{hom}(D, H)$.

Остается показать непрерывность отображения μ^{-1} на $\mathrm{hom}(E, H)$, при условии, что пространство $\mathrm{hom}(E, H)$ локально равностепенно непрерывно. Для этого пусть $\omega_1 \in \mathrm{hom}(E, H)$ и $\varrho_1 \in \mathrm{hom}(D, H)$ такой гомоморфизм, что $\varrho_1 | E = \omega_1$. Пусть далее $O(\varrho_1)$ — любая окрестность гомоморфизма ϱ_1 в топологии пространства $\mathrm{hom}(D, H)$. Тогда существуют окрестности нуля $V_1, V_2, \ldots, V_m$ алгебры H и элементы $d_1, d_2, \ldots, d_m \in D$ такие, что

$$\bigcap_{k=1}^{m} \{\varrho \in \mathrm{hom}(D, H) : (\varrho - \varrho_1)(d_k) \in V_k\} \subseteq O(\varrho_1).$$

Теперь окрестности $V_1, V_2, \ldots, V_m$ определяют открытые окрестности нуля $U_1, U_2, \ldots, U_m$ алгебры H такие, что $U_k - U_k \subset V_k$ для всех $k \in \mathbf{N}_m$. Так как пространство $\mathrm{hom}(E, H)$ локально равностепенно непрерывно, то в $\mathrm{hom}(E, H)$ существует равностепенно непрерывная окрестность $O_0(\omega_1)$ элемента ω_1.

Далее покажем, что множество $K = \mu^{-1}(O_0(\omega_1))$ является равностепенно непрерывным в пространстве $\mathrm{hom}(D, H)$. Пусть W_0 — любая окрестность нуля алгебры H. Тогда найдутся замкнутая окрестность нуля $W_1 \subset W_0$ и открытая окрестность нуля T в топологии подалгебры E такие, что $\omega(T) \subset W_1$ при всех $\omega \in O_0(\omega_1)$. Пусть $T = S \cap E$, где S — открытая окрестность нуля алгебры D, и $O(d_0)$ — любая окрестность элемента $d_0 \in S$ в алгебре D. Тогда $O(d_0) \cap S$ является также окрестностью элемента d_0 в топологии алгебры D и $O(d_0) \cap T = (O(d_0) \cap S) \cap E$. Поскольку подалгебра E всюду плотна в D, то $O(d_0) \cap T$ непусто. Следовательно, элемент d_0 принадлежит $\mathrm{cl}_D T$. Таким образом, справедливо $S \subset \mathrm{cl}_D T$, в силу чего $\mathrm{cl}_D T$ является окрестностью нуля алгебры D.

Пусть теперь ϱ любой элемент в K. Тогда, ввиду непрерывности гомоморфизма ϱ и включения $T \subset E$ имеем $\varrho(\mathrm{cl}_D T) \subseteq \mathrm{cl}_H(\varrho(T)) = \mathrm{cl}_H(\varrho | E(T)) \subset W_1 \subset W_0$. Значит, K является равностепенно непрерывным в точке Θ_D. Следовательно. K есть равностепенно непрерывное подмножество в $\mathrm{hom}(D, H)$. Поэтому в алгебре D существуют окрестности $O(d_k)$ элементов d_k такие, что $\varrho(g) - \varrho(d_k) \in -U_k$ при всех $\varrho \in K$ и $g \in O(d_k)$ с $k \in \mathbf{N}_m$. В силу этого для каждого $k \in \mathbf{N}_m$ существуют $m_k \in O(d_k) \cap E$ такие, что $\omega_1(m_k) - \varrho_1(d_k) = \varrho_1(m_k) - \varrho_1(d_k) \in -U_k$.

Следовательно, $P_k = -U_k + \varrho_1(d_k) - \omega_1(m_k)$ является окрестностью нуля алгебры H при всех $k \in \mathbf{N}_m$. Пусть далее

$$O_1(\omega_1) = \bigcap_{k=1}^{m} \{\omega \in \operatorname{hom}(E, H) : (\omega - \omega_1)(m_k) \in P_k\}$$

и $O_2(\omega_1) = O_0(\omega_1) \cap O_1(\omega_1)$. Тогда $O_2(\omega_1)$ есть окрестность гомоморфизма ω_1 в топологии пространства $\operatorname{hom}(E, H)$. Теперь $\overline{\omega} = \mu^{-1}(\omega) \in K$ при $\omega \in O_2(\omega_1)$ и

$$(\overline{\omega} - \varrho_1)(d_k) = (\overline{\omega}(d_k) - \overline{\omega}(m_k)) + (\omega(m_k) - \omega_1(m_k)) +$$
$$+ \omega_1(m_k) - \varrho_1(d_k) \in U_k + P_k + \omega_1(m_k) - \varrho_1(d_k) = U_k - U_k \subset V_k$$

для всех $k \in \mathbf{N}_m$. Следовательно, μ^{-1} является непрерывным отображением в любой точке $\omega_1 \in \operatorname{hom}(E, H)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Lambda \in \operatorname{hom}(B, C)$. Тогда $\Lambda | AZ \in \operatorname{hom}(AZ, C)$ в силу условия (В). Поэтому по теореме 1 существует элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda | AZ = \Lambda[\lambda, \varrho]$. По предложению 1 гомоморфизм $\Lambda[\lambda, \varrho]$ продолжим до гомоморфизма $\overline{\Lambda[\lambda, \varrho]} \in \operatorname{hom}(B, C)$. Поскольку алгебра C отделима, то $\Lambda = \overline{\Lambda[\lambda, \varrho]}$. Итак, гомоморфизм Λ определяет элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \overline{\Lambda[\lambda, \varrho]}$.

Пусть далее φ — отображение, определенное в теореме 1, а μ — отображение $\operatorname{hom}(B, C)$ на $\operatorname{hom}(AZ, C)$, определяемое равенством $\mu(\Lambda) = \Lambda | AZ$ при всех $\Lambda \in \operatorname{hom}(B, C)$. Так как φ есть гомеоморфизм пространств S_{AZC} и $\operatorname{hom}(AZ, C)$, а μ — непрерывная биекция $\operatorname{hom}(B, C)$ на $\operatorname{hom}(AZ, C)$ (по предложению 1), то отображение $\Phi = \mu^{-1} \circ \varphi$ является биекцией S_{AZC} на $\operatorname{hom}(B, C)$, обратное отображение которой непрерывно на $\operatorname{hom}(B, C)$. Если при этом выполнено и условие (г), то μ есть гомеоморфизм пространств $\operatorname{hom}(B, C)$ и $\operatorname{hom}(AZ, C)$. Поэтому в таком случае отображение Φ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\operatorname{hom}(B, C)$. Теорема 2 доказана.

Вдобавок к вышеупомянутым условиям (а) и (б) при $C = \mathbf{K}$ пусть выполнено условие

(д) для каждого $\varrho \in \operatorname{hom} Z$ существует непрерывный A-гомоморфизм Φ_ϱ алгебры B на A такой, что $\Phi_\varrho(z) = e_A \varrho(z)$ для всех $z \in Z$. Тогда при всех $(\lambda, \varrho) \in H_{AZ\mathbf{K}}$, $n \in \mathbf{N}$, $a_i \in A$ и $z_i \in Z$ с $i \in \mathbf{N}_n$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(a_k) \varrho(z_k) = \lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k \varrho(z_k)\Big) = (\lambda \circ \Phi_\varrho)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big).$$

Поэтому в данном случае $S_{AZ\mathbf{K}} = H_{AZ\mathbf{K}}$. Учитывая это, из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. (ср. [5], с. 2). *Пусть A — отделимая топологическая $\mathbf{K}$-алгебра с единицей, B — топологическая $(A, \mathbf{K})$-алгебра с единицей** и Z подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если выполнены условия* (а), (б) (*при* $C = \mathbf{K}$), (в) *и* (д), *то каждый $\Lambda \in \operatorname{hom} B$ определяет $\lambda \in \operatorname{hom} A$ и $\varrho \in \operatorname{hom} Z$ такие, что $\Lambda = \lambda \circ \Phi_\varrho$ и $\Lambda \to (\lambda, \varrho)$ отображает $\operatorname{hom} B$ взаимно однозначно на $H_{AZ\mathbf{K}}$*.

Доказательство теоремы 3. Пусть f — топологический изоморфизм, полученный при пополнении алгебры B. Тогда отображение f^*, определяемое равенством $f^*(\omega) = \omega \circ f$ при всех $\omega \in \operatorname{hom}(f(B), C)$, является

** Так как по условию (д) каждый гомоморфизм $\Lambda[\lambda, \varrho] \in \operatorname{hom} AZ$ продолжим до гомоморфизма $\overline{\Lambda[\lambda, \varrho]} = \lambda \circ \Phi_\varrho$, то непрерывности умножения в алгебре B не требуется.

гомеоморфизмом пространств $\hom(f(B), C)$ и $\hom(B, C)$. Нетрудно заметить, что из локально равностепенной непрерывности пространства $\hom(AZ, C)$ вытекает локально равностепенная непрерывность пространства $\hom(B, C)$ (см. доказательство предложения 1). Поэтому и пространство $\hom(f(B), C)$ является локально равностепенно непрерывным.

Пусть теперь φ — гомеоморфизм S_{AZC} на $\hom(AZ, C)$, определенный в теореме 1, а $\mu_1 : \hom(B, C) \to \hom(AZ, C)$ и $\mu_2 : \hom(\overline{B}, C) \to \hom(f(B), C)$ — гомеоморфизмы, определяемые равенствами $\mu_1(\varrho) = \varrho | AZ$ при всех $\varrho \in \hom(B, C)$ и $\mu_2(\Lambda) = \Lambda | f(B)$ при всех $\Lambda \in \hom(\overline{B}, C)$. Тогда отображение $\Psi = \mu_2^{-1} \circ (f^*)^{-1} \circ \mu_1^{-1} \circ \varphi$ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\hom(\overline{B}, C)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Horváth, J.* Topological Vector Spaces and Distributions. V. 1. Massachusetts, Addison-Wesley Reading, 1966.
2. *Cochran, A. C., Keown, R., Williams, C. R.* Pacif. J. Math., **34**, 17—25 (1970).
3. *Бурбаки Н.* Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., «Наука», 1969.
4. *Mallios, A.* Lect. Notes in Math., **399**. Berlin, Springer-Verlag, 1974, 342—377.
5. *Abel, M.* In: Abstracts. Colloquium on Topology, Eger, Aug. 9—13, 1983. Budapest, Janos Bolyai Math. Soc., 1983, 2.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
7/IV 1986

A. KOKK.

TOPOLOOGILISTE MOODULALGEBRATE HOMOMORFISMIDE KIRJELDUS

On antud ühikuga topoloogilise moodulalgebra kõigi mittetriviaalsete pidevate homomorfismide kirjeldus.

A. KOKK

THE REPRESENTATION OF HOMOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL MODULE-ALGEBRAS

Let $\mathbf{K}$ be the field of real or complex numbers; let A be a topological $\mathbf{K}$-algebra with the unit e_A, and let C be a topological $\mathbf{K}$-algebra with a jointly continuous multiplication. Let B be a topological $(A, \mathbf{K})$-algebra with the unit e_B (that is a topological $\mathbf{K}$-algebra with a unit which at the same time is a A-bimodule with separately continuous module multiplications and in which the conditions $a(b_1b_2) = (ab_1)b_2$, $(b_1b_2)a = b_1(b_2a)$, $b_1(ab_2) = (b_1a)b_2$, $e_Ab = b = be_A$ and $ae_B = e_Ba$ hold for each $a \in A$ and $b_1, b_2 \in B$), let Z be a subalgebra of B with the unit e_B and hom (B, C) be the set of all non-zero continuous $\mathbf{K}$-homomorphisms of B into C, endowed with the topology of simple convergence in B.

If the conditions

(a) *$az = za$ for each $a \in A$ and $z \in Z$,*

and

(b) *the A-submodule AZ of B, generated by Z, is dense in B*

are satisfied then the spaces hom (AZ, C), hom(B, C) and hom $(\overline{B}, C)$ (where $\overline{B}$ stands for the completion of B) are characterized.