

УДК 517.986.2

А. КОКК

ОПИСАНИЕ ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МОДУЛЬ-АЛГЕБР

(Представил А. Хумал)

Пусть K — поле S или R и A — топологическая K -алгебра, т. е. линейное топологическое пространство над K , в котором определено умножение элементов, относительно которого оно является ассоциативной алгеброй, и в топологии которого рассматриваемое умножение элементов (как билинейное отображение $A \times A$ в A) раздельно непрерывно. В частном случае, когда умножение элементов алгебры A непрерывно в совокупности, A называется *топологической K -алгеброй с непрерывным умножением*.

Пусть теперь топология алгебры A отделима. Тогда она имеет пополнение \bar{A} (см. напр., [1], с. 131), являющееся отдельным линейным топологическим пространством, но не обязательно алгеброй (см. [2], с. 21). В случае, когда A является отделимой топологической K -алгеброй с непрерывным умножением, то умножение элементов алгебры A непрерывно продолжаемо на $\bar{A} \times \bar{A}$ (см. [3], с. 100). Поэтому в таком случае и пополнение \bar{A} алгебры A является отделимой топологической K -алгеброй с непрерывным умножением. При этом алгебра A является топологически изоморфной всюду плотной подалгебре алгебры \bar{A} .

Топологическая K -алгебра B называется *топологической модуль-алгеброй относительно алгебры A* или, коротко, *топологической (A, K) -алгеброй*, если

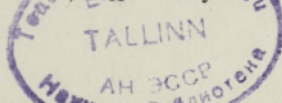
- 1) A есть топологическая K -алгебра,
- 2) B есть A -бимодуль,
- 3) модульные умножения алгебры B (т. е. отображения $(a, b) \rightarrow ab$ и $(b, a) \rightarrow ba$ произведений $A \times B$ в B и $B \times A$ в B соответственно) раздельно непрерывны

и

- 4) $a(b_1 b_2) = (ab_1) b_2$, $(b_1 b_2) a = b_1 (b_2 a)$ и $b_1 (ab_2) = (b_1 a) b_2$ для всех $b_1, b_2 \in B$ и $a \in A$.

При этом, если алгебра A имеет единицу (здесь и всюду в дальнейшем через e_A обозначается единица алгебры A), то $e_A b = b = b e_A$ для всех $b \in B$, а если алгебра B имеет единицу, то $a e_B = e_B a$ для всех $a \in A$. Топологическая (A, K) -алгебра B называется *топологической (A, K) -алгеброй с непрерывным умножением*, если она является топологической K -алгеброй с непрерывным умножением.

Целью данной статьи является описание гомоморфизмов топологической (A, K) -алгебры в топологическую K -алгебру. Для этого, пусть A — топологическая K -алгебра с единицей, S и D — топологические K -алгебры, $\text{hom}(A, D)$ — множество всех нетривиальных непрерывных K -гомоморфизмов A в D , наделенное слабой топологией, $\text{hom } A = \text{hom}(A, K)$ и $H_{ADC} = \text{hom}(A, C) \times \text{hom}(D, C)$. Пусть далее $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, 0_A — нулевой элемент алгебры



A, B — топологическая (A, K) -алгебра с единицей, Z — подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$, AZ — A -подмодуль алгебры B , порожденный алгеброй Z и

$$\Lambda[\lambda; \varrho] \left(\sum_{k=1}^n a_k z_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda(a_k) \varrho(z_k)$$

для всех $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in A$ и $z_k \in Z$ с $k \in \mathbb{N}_n$.

В случае, когда отображение $\Lambda \in \text{hom}(AZ, C)$ имеет продолжение на замыкание $\text{cl}_B AZ$ подмножества AZ в топологии алгебры B , то это продолжение будем обозначать через $\bar{\Lambda}$. Кроме того, через S_{AZC} будем обозначать подмножество тех пар $(\lambda, \varrho) \in H_{AZC}$, для которых выполнены условия

(а) если $m \in \mathbb{N}$, $a_k \in A$ и $z_k \in Z$ для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ суть такие, что $a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m = \Theta_{AZ}$, то

$$\sum_{k=1}^m \lambda(a_k) \varrho(z_k) = \Theta_C,$$

(б) $\lambda(a) \varrho(z) = \varrho(z) \lambda(a)$ при всех $a \in A$ и $z \in Z$,

(γ) $\lambda(e_A) = \varrho(e_B)$

и

(δ) отображение $\Lambda[\lambda, \varrho]$ непрерывно на AZ .

Основные результаты данной статьи следующие.

Теорема 1. Пусть A — топологическая K -алгебра с единицей, C — топологическая K -алгебра с непрерывным умножением, B — топологическая (A, K) -алгебра с единицей и Z — подалгебра алгебры B такая, что $e_B \in Z$. Если

(а) $az = za$ при всех $a \in A$ и $z \in Z$

и

(б) множество $\text{hom}(AZ, C)$ непусто,

то каждый гомоморфизм $\Lambda \in \text{hom}(AZ, C)$ определяет элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \Lambda[\lambda, \varrho]$ и отображение Φ , определяемое равенством $\Phi(\lambda, \varrho) = \Lambda[\lambda, \varrho]$ для всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$, является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\text{hom}(AZ, C)$.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 пусть алгебра C полна и отделима, умножение в алгебре B непрерывно и пусть выполнено условие

(в) подмодуль AZ алгебры B всюду плотен в B .

Тогда каждый гомоморфизм $\Lambda \in \text{hom}(B, C)$ определяет элемент $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \bar{\Lambda}[\lambda, \varrho]$, и отображение Φ , определяемое равенством $\Phi(\lambda, \varrho) = \bar{\Lambda}[\lambda, \varrho]$ при всех $(\lambda, \varrho) \in S_{AZC}$, является биекцией S_{AZC} на $\text{hom}(B, C)$, обратное отображение которой непрерывно на $\text{hom}(B, C)$.

В частном случае, когда выполнено и условие

(г) пространство $\text{hom}(AZ, C)$ локально равностепенно непрерывно, то Φ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\text{hom}(B, C)$.

Теорема 3. Пусть A — топологическая K -алгебра с единицей, C — полная отделимая топологическая K -алгебра с непрерывным умножением, B — отделимая топологическая (A, K) -алгебра с единицей и с непрерывным умножением, а Z — такая подалгебра алгебры B , что $e_B \in Z$. Если выполнены условия (а), (б), (в) и (г), то пространства S_{AZC} и $\text{hom}(B, C)$ гомеоморфны.

1. Доказательство теоремы 1. Ясно, что подмодуль AZ образует (по условию (а)) подалгебру алгебры B . Пусть $\Lambda \in \text{hom}(AZ, C)$. Положим $\varrho_\Lambda = \Lambda|Z$ (т.е. ϱ_Λ является сужением отображения Λ на Z) и

$\lambda_{\Lambda}(a) = \Lambda(ae_B)$ для каждого $a \in A$. Поскольку гомоморфизм Λ нетривиален на AZ , то и отображения λ_{Λ} и q_{Λ} нетривиальны на A и Z соответственно, ибо $\lambda_{\Lambda}(e_A) = q_{\Lambda}(e_B) = \Lambda(e_B)$. Нетрудно заметить, что отображения λ_{Λ} и q_{Λ} непрерывны, линейны и мультипликативны на A и Z соответственно. Кроме того, пара $(\lambda_{\Lambda}; q_{\Lambda})$ удовлетворяет условиям (β) и (γ) (по условию (a)). Так как

$$\Lambda\left(\sum_{k=1}^n a_k z_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_{\Lambda}(a_k) q_{\Lambda}(z_k)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ и $z_i \in Z$ с $i \in \mathbb{N}_n$, то $\Lambda = \Lambda[\lambda_{\Lambda}, q_{\Lambda}]$ и выполнены условия (a) и (δ) . Значит, $(\lambda_{\Lambda}, q_{\Lambda}) \in S_{AZC}$.

Пусть теперь $(\lambda, q) \in S_{AZC}$. Поскольку $q \in \text{hom}(Z, C)$, то $q(e_B) \neq \theta_C$. Поэтому $\Lambda[\lambda, q](e_B) = \lambda(e_A)q(e_B) \neq \theta_C$ (по условию (γ)). Следовательно, отображение $\Lambda[\lambda, q]$ нетривиально на AZ . Кроме того, отображение $\Lambda[\lambda, q]$ линейно, непрерывно (по условию (δ)) и мультипликативно (по условию (β)) на AZ . Таким образом, $\Lambda[\lambda, q] \in \text{hom}(AZ, C)$.

Пусть далее $(\lambda_1, q_1), (\lambda_2, q_2) \in S_{AZC}$ и $(\lambda_1, q_1) \neq (\lambda_2, q_2)$. Тогда справедливо либо $\Lambda[\lambda_1, q_1](a_0 e_B) = \lambda_1(a_0) \neq \lambda_2(a_0) = \Lambda[\lambda_2, q_2](a_0 e_B)$, либо $\Lambda[\lambda_1, q_1](z_0) = q_1(z_0) \neq q_2(z_0) = \Lambda[\lambda_2, q_2](z_0)$ для некоторых $a_0 \in A$ и $z_0 \in Z$ (по условию (γ)). Поэтому $\Lambda[\lambda_1, q_1] \neq \Lambda[\lambda_2, q_2]$. Следовательно, φ (определяемое равенством $\varphi(\lambda, q) = \Lambda[\lambda, q]$ при всех $(\lambda, q) \in S_{AZC}$) отображает множество S_{AZC} взаимно однозначно на $\text{hom}(AZ, C)$.

Покажем теперь непрерывность отображения φ . Для этого, пусть $(\lambda_0, q_0) \in S_{AZC}$ и $O_0(\Lambda_0)$ — любая окрестность элемента $\Lambda_0 = \varphi(\lambda_0, q_0)$ в топологии пространства $\text{hom}(AZ, C)$. Тогда существуют число $r \in \mathbb{N}$ и для каждого $k \in \mathbb{N}_r$ число $m(k) \in \mathbb{N}$, элементы $a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,m(k)} \in A$ и $z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,m(k)} \in Z$ и окрестность нуля U_k алгебры C такие, что

$$\bigcap_{k=1}^r \{ \Lambda \in \text{hom}(AZ, C) : (\Lambda - \Lambda_0)(d_k) \in U_k \} \subseteq O_0(\Lambda_0),$$

где $d_k = a_{k,1}z_{k,1} + a_{k,2}z_{k,2} + \dots + a_{k,m(k)}z_{k,m(k)}$. Пусть $x_{k,i} = \Lambda_0(a_{k,i}z_{k,i})$ и $y_k = \Lambda_0(d_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}_r$ и $i \in \mathbb{N}_{m(k)}$. Тогда в алгебре C найдутся окрестности $T_{k,i}$ элементов $x_{k,i}$ такие, что $T_{k,1} + T_{k,2} + \dots + T_{k,m(k)} \subset y_k + U_k$ при всех $k \in \mathbb{N}_r$. В силу непрерывности умножения в алгебре C найдутся, в свою очередь, окрестности $S_{k,i}$ элементов $\lambda_0(a_{k,i})$ и окрестности $R_{k,i}$ элементов $q_0(z_{k,i})$ такие, что $S_{k,i}R_{k,i} \subset T_{k,i}$ при всех $k \in \mathbb{N}_r$ и $i \in \mathbb{N}_{m(k)}$.

Пусть теперь $S_{k,i} = \lambda_0(a_{k,i}) + V_{k,i}$ и $R_{k,i} = q_0(z_{k,i}) + W_{k,i}$, где $V_{k,i}$ и $W_{k,i}$ — окрестности нуля алгебры C для всех $k \in \mathbb{N}_r$ и $i \in \mathbb{N}_{m(k)}$. Кроме того, пусть

$$O_1 = \bigcap_{k=1}^r \bigcap_{i=1}^{m(k)} \{ \lambda \in \text{hom}(A, C) : (\lambda - \lambda_0)(a_{k,i}) \in V_{k,i} \}$$

и

$$O_2 = \bigcap_{k=1}^r \bigcap_{i=1}^{m(k)} \{ q \in \text{hom}(Z, C) : (q - q_0)(z_{k,i}) \in W_{k,i} \}.$$

Тогда из $(\lambda, q) \in O_3 = (O_1 \times O_2) \cap S_{AZC}$ следует, что $\lambda(a_{k,i}) \in S_{k,i}$ и $q(z_{k,i}) \in R_{k,i}$. Поэтому $\lambda(a_{k,i})q(z_{k,i}) \in T_{k,i}$ при всех $(\lambda, q) \in O_3$, $k \in \mathbb{N}_r$ и $i \in \mathbb{N}_{m(k)}$. Таким образом, элемент $c_k = \varphi(\lambda, q)(d_k)$ принадлежит окрестности $y_k + U_k$, а элемент $(\varphi(\lambda, q) - \Lambda_0)(d_k) = c_k - y_k$ — окрестности U_k для всех $k \in \mathbb{N}_r$. Значит, $\varphi(\lambda, q) \in O_0(\Lambda_0)$ при всех $(\lambda, q) \in O_3$. Поскольку O_3 является окрестностью точки (λ_0, q_0) в топологии, индуцированной на S_{AZC} пространством H_{AZC} , то биекция φ непрерывна в любой точке $(\lambda_0, q_0) \in S_{AZC}$.

Покажем теперь и непрерывность отображения φ^{-1} . Для этого пусть $\Lambda_1 \in \text{hom}(AZ, C)$ и O — любая окрестность элемента $(\lambda_1, q_1) = \varphi^{-1}(\Lambda_1)$ в топологии пространства S_{AZC} . Тогда в алгебре C существуют окрестности нуля $V_1, V_2, \dots, V_n, W_1, W_2, \dots, W_m$ и элементы $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ и $z_1, z_2, \dots, z_m \in Z$ такие, что $(O_4 \times O_5) \cap S_{AZC} \subset O$, где

$$O_4 = \bigcap_{k=1}^n \{ \lambda \in \text{hom}(A, C) : (\lambda - \lambda_1)(a_k) \in V_k \}$$

и

$$O_5 = \bigcap_{v=1}^m \{ q \in \text{hom}(Z, C) : (q - q_1)(z_v) \in W_v \}.$$

Пусть далее

$$O_6 = \bigcap_{k=1}^n \{ \Lambda \in \text{hom}(AZ, C) : (\Lambda - \Lambda_1)(a_k e_B) \in V_k \}$$

и

$$O_7 = \bigcap_{v=1}^m \{ \Lambda \in \text{hom}(AZ, C) : (\Lambda - \Lambda_1)(z_v) \in W_v \}.$$

Тогда $O_1(\Lambda_1) = O_6 \cap O_7$ является окрестностью элемента Λ_1 в топологии пространства $\text{hom}(AZ, C)$. Пусть теперь $\Lambda \in O_1(\Lambda_1)$. Тогда, по изложенному выше, $\Lambda = \Lambda[\lambda, q]$ для некоторого элемента $(\lambda, q) \in S_{AZC}$. Так как $(\lambda - \lambda_1)(a_k) = (\Lambda - \Lambda_1)(a_k e_B) \in V_k$ для всех $k \in \mathbb{N}_n$ и $(q - q_1)(z_v) = (\Lambda - \Lambda_1)(z_v) \in W_v$ для всех $v \in \mathbb{N}_m$, то $\varphi^{-1}(\Lambda) = (\lambda, q) \in O$. Итак, отображение φ^{-1} непрерывно в любой точке $\Lambda_1 \in \text{hom}(AZ, C)$. Следовательно, отображение φ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\text{hom}(AZ, C)$.

2. Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

Предложение* 1. Пусть D — топологическая K -алгебра с непрерывным умножением, E — всюду плотная подалгебра алгебры D и H — полная отделимая топологическая K -алгебра с непрерывным умножением такие, что множество $\text{hom}(E, H)$ непусто. Тогда каждый гомоморфизм $\omega \in \text{hom}(E, H)$ продолжим до гомоморфизма $\bar{\omega} \in \text{hom}(D, H)$ и отображение μ , определяемое равенством $\mu(q) = q|E$ для всех $q \in \text{hom}(D, H)$, является непрерывным и взаимно однозначным отображением пространства $\text{hom}(D, H)$ на $\text{hom}(E, H)$. В частном случае, когда пространство $\text{hom}(E, H)$ локально равностепенно непрерывно, μ является гомеоморфизмом пространств $\text{hom}(D, H)$ и $\text{hom}(E, H)$.

Доказательство. Пусть q — любой элемент пространства $\text{hom}(D, H)$. Поскольку E есть всюду плотная подалгебра алгебры D , то $q|E \in \text{hom}(E, H)$. Чтобы показать сюръективность отображения μ , возьмем любой элемент $\omega \in \text{hom}(E, H)$. Тогда существует нетривиальное непрерывное линейное отображение $\bar{\omega} : D \rightarrow H$ такое, что $\bar{\omega} = \omega|E$ (см. [1], с. 129). Оказывается, что отображение $\bar{\omega}$ является и мультипликативным на D . Действительно, пусть $d_1, d_2 \in D$ и O — любая окрестность нуля алгебры H . Поскольку умножение в алгебре H непрерывно, то в ней существует закругленная окрестность нуля O_1 такая, что $O_1^2 + O_1 \bar{\omega}(d_2) + \bar{\omega}(d_1) O_1 + O_1 \subset O$. В силу равномерной непрерывности отображения $\bar{\omega}$, в алгебре D существует окрестность нуля U такая, что при $d - d' \in U$ справедливо $\bar{\omega}(d) - \bar{\omega}(d') \in O_1$. Теперь окрестность нуля U определяет (в силу непрерывности умножения в D) закругленную окрестность нуля U_1 алгебры D такую, что $U_1 \subset U$ и $U_1^2 + U_1 d_2 + d_1 U_1 \subset U$, а окрестность нуля U_1 , в свою очередь, определяет (ввиду всюду плотности подалгебры

* Аналогичный результат в частном случае сформулирован в [4] с. 346.

E в D) элементы $e_1, e_2 \in E$ такие, что $e_1 - d_1 \in U_1$ и $e_2 - d_2 \in U_1$. Поскольку

$$d_1 d_2 - e_1 e_2 = (e_1 - d_1)(d_2 - e_2) + (d_1 - e_1)d_2 + d_1(d_2 - e_2),$$

то $d_1 d_2 - e_1 e_2 \in U$. Поэтому по равенству

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(d_1)\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(d_1 d_2) &= (\bar{\omega}(e_1) - \bar{\omega}(d_1))(\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(e_2)) + \\ &+ (\bar{\omega}(d_1) - \bar{\omega}(e_1))\bar{\omega}(d_2) + \bar{\omega}(d_1)(\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(e_2)) - (\bar{\omega}(d_1 d_2) - \bar{\omega}(e_1 e_2)) \end{aligned}$$

справедливо $\bar{\omega}(d_1)\bar{\omega}(d_2) - \bar{\omega}(d_1 d_2) \in O$. В силу отделимости алгебры H отсюда вытекает равенство $\bar{\omega}(d_1)\bar{\omega}(d_2) = \bar{\omega}(d_1 d_2)$. Итак, $\bar{\omega} \in \text{hom}(D, H)$.

Так как алгебра H отделима и подалгебра E всюду плотна в D , то $q_1|E \neq q_2|E$ для двух различных гомоморфизмов $q_1, q_2 \in \text{hom}(D, H)$. Поэтому μ является взаимно однозначным отображением пространства $\text{hom}(D, H)$ на $\text{hom}(E, H)$.

Пусть теперь $q_0 \in \text{hom}(D, H)$ и $O(\omega_0)$ — любая окрестность элемента $\omega_0 = q_0|E$ в топологии пространства $\text{hom}(E, H)$. Нетрудно заметить, что множество $\mu^{-1}(O(\omega_0)) = \{q \in \text{hom}(D, H) : q|E \in O(\omega_0)\}$ является окрестностью гомоморфизма q_0 в топологии пространства $\text{hom}(D, H)$. Значит, отображение μ непрерывно в любой точке $q_0 \in \text{hom}(D, H)$.

Остается показать непрерывность отображения μ^{-1} на $\text{hom}(E, H)$, при условии, что пространство $\text{hom}(E, H)$ локально равностепенно непрерывно. Для этого пусть $\omega_1 \in \text{hom}(E, H)$ и $q_1 \in \text{hom}(D, H)$ такой гомоморфизм, что $q_1|E = \omega_1$. Пусть далее $O(q_1)$ — любая окрестность гомоморфизма q_1 в топологии пространства $\text{hom}(D, H)$. Тогда существуют окрестности нуля V_1, V_2, \dots, V_m алгебры H и элементы $d_1, d_2, \dots, d_m \in D$ такие, что

$$\bigcap_{k=1}^m \{q \in \text{hom}(D, H) : (q - q_1)(d_k) \in V_k\} \subseteq O(q_1).$$

Теперь окрестности V_1, V_2, \dots, V_m определяют открытые окрестности нуля U_1, U_2, \dots, U_m алгебры H такие, что $U_k - U_k \subset V_k$ для всех $k \in \mathbb{N}_m$. Так как пространство $\text{hom}(E, H)$ локально равностепенно непрерывно, то в $\text{hom}(E, H)$ существует равностепенно непрерывная окрестность $O_0(\omega_1)$ элемента ω_1 .

Далее покажем, что множество $K = \mu^{-1}(O_0(\omega_1))$ является равностепенно непрерывным в пространстве $\text{hom}(D, H)$. Пусть W_0 — любая окрестность нуля алгебры H . Тогда найдутся замкнутая окрестность нуля $W_1 \subset W_0$ и открытая окрестность нуля T в топологии подалгебры E такие, что $\omega(T) \subset W_1$ при всех $\omega \in O_0(\omega_1)$. Пусть $T = S \cap E$, где S — открытая окрестность нуля алгебры D , и $O(d_0)$ — любая окрестность элемента $d_0 \in S$ в алгебре D . Тогда $O(d_0) \cap S$ является также окрестностью элемента d_0 в топологии алгебры D и $O(d_0) \cap T = (O(d_0) \cap S) \cap E$. Поскольку подалгебра E всюду плотна в D , то $O(d_0) \cap T$ непусто. Следовательно, элемент d_0 принадлежит $\text{cl}_D T$. Таким образом, справедливо $S \subset \text{cl}_D T$, в силу чего $\text{cl}_D T$ является окрестностью нуля алгебры D .

Пусть теперь q любой элемент в K . Тогда, ввиду непрерывности гомоморфизма q и включения $T \subset E$ имеем $q(\text{cl}_D T) \subseteq \text{cl}_H(q(T)) = \text{cl}_H(q|E(T)) \subset W_1 \subset W_0$. Значит, K является равностепенно непрерывным в точке Θ_D . Следовательно, K есть равностепенно непрерывное подмножество в $\text{hom}(D, H)$. Поэтому в алгебре D существуют окрестности $O(d_k)$ элементов d_k такие, что $q(g) - q(d_k) \in -U_k$ при всех $q \in K$ и $g \in O(d_k)$ с $k \in \mathbb{N}_m$. В силу этого для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ существуют $m_k \in O(d_k) \cap E$ такие, что $\omega_1(m_k) - q_1(d_k) = q_1(m_k) - q_1(d_k) \in -U_k$.

Следовательно, $P_k = -U_k + Q_1(d_k) - \omega_1(m_k)$ является окрестностью нуля алгебры H при всех $k \in \mathbb{N}_m$. Пусть далее

$$O_1(\omega_1) = \bigcap_{k=1}^m \{ \omega \in \text{hom}(E, H) : (\omega - \omega_1)(m_k) \in P_k \}$$

и $O_2(\omega_1) = O_0(\omega_1) \cap O_1(\omega_1)$. Тогда $O_2(\omega_1)$ есть окрестность гомоморфизма ω_1 в топологии пространства $\text{hom}(E, H)$. Теперь $\bar{\omega} = \mu^{-1}(\omega) \in K$ при $\omega \in O_2(\omega_1)$ и

$$(\bar{\omega} - Q_1)(d_k) = (\bar{\omega}(d_k) - \bar{\omega}(m_k)) + (\omega(m_k) - \omega_1(m_k)) + \\ + \omega_1(m_k) - Q_1(d_k) \in U_k + P_k + \omega_1(m_k) - Q_1(d_k) = U_k - U_k \subset V_k$$

для всех $k \in \mathbb{N}_m$. Следовательно, μ^{-1} является непрерывным отображением в любой точке $\omega_1 \in \text{hom}(E, H)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Lambda \in \text{hom}(B, C)$. Тогда $\Lambda|AZ \in \text{hom}(AZ, C)$ в силу условия (B). Поэтому по теореме 1 существует элемент $(\lambda, q) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda|AZ = \Lambda[\lambda, q]$. По предложению 1 гомоморфизм $\Lambda[\lambda, q]$ продолжим до гомоморфизма $\overline{\Lambda[\lambda, q]} \in \text{hom}(B, C)$. Поскольку алгебра C отделима, то $\Lambda = \overline{\Lambda[\lambda, q]}$. Итак, гомоморфизм Λ определяет элемент $(\lambda, q) \in S_{AZC}$ такой, что $\Lambda = \overline{\Lambda[\lambda, q]}$.

Пусть далее φ — отображение, определенное в теореме 1, а μ — отображение $\text{hom}(B, C)$ на $\text{hom}(AZ, C)$, определяемое равенством $\mu(\Lambda) = \Lambda|AZ$ при всех $\Lambda \in \text{hom}(B, C)$. Так как φ есть гомеоморфизм пространств S_{AZC} и $\text{hom}(AZ, C)$, а μ — непрерывная биекция $\text{hom}(B, C)$ на $\text{hom}(AZ, C)$ (по предложению 1), то отображение $\Phi = \mu^{-1} \circ \varphi$ является биекцией S_{AZC} на $\text{hom}(B, C)$, обратное отображение которой непрерывно на $\text{hom}(B, C)$. Если при этом выполнено и условие (г), то μ есть гомеоморфизм пространств $\text{hom}(B, C)$ и $\text{hom}(AZ, C)$. Поэтому в таком случае отображение Φ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\text{hom}(B, C)$. Теорема 2 доказана.

Вдобавок к вышеупомянутым условиям (а) и (б) при $C = K$ пусть выполнено условие

(д) для каждого $q \in \text{hom } Z$ существует непрерывный A -гомоморфизм Φ_q алгебры B на A такой, что $\Phi_q(z) = e_A q(z)$ для всех $z \in Z$. Тогда при всех $(\lambda, q) \in H_{AZK}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ и $z_i \in Z$ с $i \in \mathbb{N}_n$ справедливо

$$\sum_{k=1}^n \lambda(a_k) q(z_k) = \lambda \left(\sum_{k=1}^n a_k q(z_k) \right) = (\lambda \circ \Phi_q) \left(\sum_{k=1}^n a_k z_k \right).$$

Поэтому в данном случае $S_{AZK} = H_{AZK}$. Учитывая это, из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. (ср. [5], с. 2). Пусть A — отделимая топологическая K -алгебра с единицей, B — топологическая (A, K) -алгебра с единицей $**$ и Z подалгебра алгебры B такая, что $e_K \in Z$. Если выполнены условия (а), (б) (при $C = K$), (в) и (д), то каждый $\Lambda \in \text{hom } B$ определяет $\lambda \in \text{hom } A$ и $q \in \text{hom } Z$ такие, что $\Lambda = \lambda \circ \Phi_q$ и $\Lambda \rightarrow (\lambda, q)$ отображает $\text{hom } B$ взаимно однозначно на H_{AZK} .

Доказательство теоремы 3. Пусть f — топологический изоморфизм, полученный при пополнении алгебры B . Тогда отображение f^* , определяемое равенством $f^*(\omega) = \omega \circ f$ при всех $\omega \in \text{hom}(f(B), C)$, является

** Так как по условию (д) каждый гомоморфизм $\Lambda[\lambda, q] \in \text{hom } AZ$ продолжим до гомоморфизма $\overline{\Lambda[\lambda, q]} = \lambda \circ \Phi_q$, то непрерывности умножения в алгебре B не требуется.

гомеоморфизмом пространств $\text{hom}(f(B), C)$ и $\text{hom}(B, C)$. Нетрудно заметить, что из локально равностепенной непрерывности пространства $\text{hom}(AZ, C)$ вытекает локально равностепенная непрерывность пространства $\text{hom}(B, C)$ (см. доказательство предложения 1). Поэтому и пространство $\text{hom}(f(B), C)$ является локально равностепенно непрерывным.

Пусть теперь φ — гомеоморфизм S_{AZC} на $\text{hom}(AZ, C)$, определенный в теореме 1, а $\mu_1: \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(AZ, C)$ и $\mu_2: \text{hom}(\bar{B}, C) \rightarrow \text{hom}(f(B), C)$ — гомеоморфизмы, определяемые равенствами $\mu_1(q) = q|AZ$ при всех $q \in \text{hom}(B, C)$ и $\mu_2(\Lambda) = \Lambda|f(B)$ при всех $\Lambda \in \text{hom}(\bar{B}, C)$. Тогда отображение $\Psi = \mu_2^{-1} \circ (f^*)^{-1} \circ \mu_1^{-1} \circ \varphi$ является гомеоморфизмом пространств S_{AZC} и $\text{hom}(\bar{B}, C)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horváth, J. Topological Vector Spaces and Distributions. V. 1. Massachusetts, Addison-Wesley Reading, 1966.
2. Cochran, A. C., Keown, R., Williams, C. R. Pacif. J. Math., 34, 17—25 (1970).
3. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М., «Наука», 1969.
4. Mallios, A. Lect. Notes in Math., 399. Berlin, Springer-Verlag, 1974, 342—377.
5. Abel, M. In: Abstracts. Colloquium on Topology, Eger, Aug. 9—13, 1983. Budapest, Janos Bolyai Math. Soc., 1983, 2.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
7/IV 1986

A. KOKK.

TOPOLOGILISTE MOODULALGEBRATE HOMOMORFISMIDE KIRJELDUS

On antud ühikuga topoloogilise moodulalgebra kõigi mittetriviaalsete pidevate homomorfismide kirjeldus.

A. KOKK

THE REPRESENTATION OF HOMOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL MODULE-ALGEBRAS

Let K be the field of real or complex numbers; let A be a topological K -algebra with the unit e_A , and let C be a topological K -algebra with a jointly continuous multiplication. Let B be a topological (A, K) -algebra with the unit e_B (that is a topological K -algebra with a unit which at the same time is a A -bimodule with separately continuous module multiplications and in which the conditions $a(b_1 b_2) = (ab_1)b_2$, $(b_1 b_2)a = b_1(b_2 a)$, $b_1(ab_2) = (b_1 a)b_2$, $e_A b = b = b e_A$ and $a e_B = e_B a$ hold for each $a \in A$ and $b_1, b_2 \in B$), let Z be a subalgebra of B with the unit e_B and $\text{hom}(B, C)$ be the set of all non-zero continuous K -homomorphisms of B into C , endowed with the topology of simple convergence in B .

If the conditions

(a) $az = za$ for each $a \in A$ and $z \in Z$,

and

(b) the A -submodule AZ of B , generated by Z , is dense in B

are satisfied then the spaces $\text{hom}(AZ, C)$, $\text{hom}(B, C)$ and $\text{hom}(\bar{B}, C)$ (where \bar{B} stands for the completion of B) are characterized.