EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED.
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА
PROCEEDINGS OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE ESTONIAN SSR.
PHYSICS * MATHEMATICS

1985, 34, 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1985.1.11

УДК 517.954 : 517.968.2

В. ТЕМКИНА

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представил И. Эпик)

Работа посвящена методу решения некоторых стационарных задач теории теплопроводности, где искомой величиной наряду с температурой является тепловой поток на части границы тела. Такие задачи возникают, например, при исследовании систем охлаждения силовых полупроводниковых приборов. Дается обоснование метода, основанного на применении интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарное температурное поле $T(X)$, $X=(x_1, x_2, x_3)$ в некотором объеме D неоднородной изотропной среды. Граница неодносвязной области D состоит из двух замкнутых поверхностей ($\partial D = S \cup \Sigma$), не имеющих общих точек. Поверхность S удовлетворяет условиям Ляпунова, Σ кусочно-гладкая. Через наружную поверхность Σ (или ее часть) в область D поступает заданный тепловой поток от охлаждаемого прибора, на внутренней поверхности S происходит теплообмен с промежуточным теплоносителем (например, с кипящей жидкостью при испарительном охлаждении [1]). Предполагается известным распределение температуры на поверхности S, задача состоит в вычислении плотности теплового потока на этой поверхности, что даст возможность найти коэффициент теплоотдачи α как функцию координат, $\alpha = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial n} / (T - T_0)$, где λ — коэффициент теплопроводности, T_0 — температура кипения охлаждающей жидкости, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S. Обычно при расчетах теплового сопротивления охладителей в качестве коэффициента теплоотдачи принимается среднее по координатам значение $\overline{\alpha} = \int\limits_S \alpha\, dX/\mathrm{mes}\, S$, которое определяется из кривой кипения $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\overline{q})$, где $\overline{q}$ — среднее значение плотности теплового потока, $\overline{q} = Q/\mathrm{mes}\, S$, Q — поступающая от прибора мощность тепловых потерь. Такой подход дает приемлемую точность, когда тепловой поток распределен по поверхности S почти равномерно. Представляет интерес распределение плотности теплового потока и коэффициента теплоотдачи вдоль поверхности S в случае, когда поступающий в область заданный тепловой поток существенно неоднороден, например, тело нагревается только с одной стороны.

В соответствии со сказанным выше математическая постановка задачи имеет вид:

$$\mathrm{div}(\lambda(X)\,\mathrm{grad}\, T(X)) = 0, \qquad X = (x_1, x_2, x_3) \in D, \tag{1.1}$$

$$T = \varphi(X), \qquad X \in S; \tag{1.2}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \psi(X), \quad X \in \Sigma, \tag{1.3}$$

где $\lambda > 0$ в $\bar{D}$, $\lambda \in C^{(1,\nu)}\bar{D}$, $\varphi \in C^{(1,\mu)}(S)$, $\psi \in L_1(\Sigma)$, $C^{(1,\nu)}$ — класс функций, имеющих первые частные производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем $\nu > 0$; подлежит определению нормальная производная $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\Big|_S = q(X)$. Такая задача представляет собой одну из обратных задач теории теплообмена.

2. Интегральные уравнения

Для решения уравнения (1.1) имеет место интегральное представление (формула Грина—Стокса)

$$p(X)T(X) = \int\limits_{S \cup \Sigma} \lambda(Y) H(X,Y) \frac{\partial T}{\partial n} dS_Y - \int\limits_{S \cup \Sigma} \lambda(Y) \frac{\partial H(X,Y)}{\partial n_Y} T(Y) dS_Y, \tag{2.1}$$

где $p(X) = 0$ при $X \notin \bar{D}$, $p(X) = 1$ при $X \in D$ и $p(X) = 1/2$ при $X \in S \cup \Sigma$, если в точке X существует касательная плоскость, в противном случае p равно величине соответствующего телесного угла, отнесенного к 4π, $H(X,Y)$ — главное фундаментальное решение уравнения (1.1), т. е. функция, являющаяся решением уравнения (1.1) во всем пространстве при $Y \neq X$, стремящаяся к нулю при $r \to \infty$ и допускающая представление

$$\begin{gathered} H(X,Y) = (4\pi\lambda(X) r(X,Y))^{-1} + \omega(X;Y), \\ r = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)^{1/2}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

функция $\omega(X,Y)$ ограничена, при $X \neq Y$ непрерывна вместе с частными производными до второго порядка и удовлетворяет оценкам вида [2]

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = O(r^{-1}), \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{-2}), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Существование главного фундаментального решения известно [2].

Дифференцируя обе части равенства (2.1) при $X \in D$ по направлению внешней нормали n_0 к поверхности S, проведенной в точке $X_0 \in S$, и переходя к пределу при $X \to X_0$, получим с использованием граничных условий (1.2)—(1.3), обобщенной формулы Гаусса, а также с учетом скачка нормальной производной обобщенного потенциала простого слоя

$$\begin{gathered} \frac{1}{2} q(X_0) = \lambda(X_0) \left[\int\limits_S \frac{\partial H(X_0,Y)}{\partial n_0} q(Y) dS_Y + \right. \\ \left. + \int\limits_\Sigma \frac{\partial^2 H(X_0,Y)}{\partial n_0 \partial n_Y} \lambda(Y) T(Y) dS_Y \right] + F_1(X_0), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} F_1(X_0) = -\lambda(X_0) \int\limits_\Sigma \frac{\partial H(X_0,Y)}{\partial n_0} \psi(Y) dS_Y + \lim_{D \ni X \to X_0} J(X), \\ q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$J(X)=\lambda(X)\int\limits_S \frac{\partial^2 H(X;Y)}{\partial n_0\,\partial n_Y}\lambda(Y)\left(\varphi(Y)-\varphi(X_0)\right)dS_Y. \tag{2.6}$$

Ядро первого интеграла в (2.4) имеет слабую особенность на диагонали, второй интеграл в (2.4) и первый в (2.5) имеют гладкие ядра. Второе слагаемое в (2.5) будет рассмотрено ниже (раздел 3).

Уравнение (2.4) на поверхности S содержит кроме $q|_S$ еще одну неизвестную функцию $T|_\Sigma$, поэтому для получения замкнутой системы необходимо добавить к (2.4) интегральное уравнение, получающееся из (2.1) при $X\in\Sigma$, с учетом граничных условий (1.2)—(1.3)

$$\frac{1}{2}T(X)=-\int\limits_S H(X,Y)q(Y)\,dS_Y-\int\limits_\Sigma \lambda(Y)\frac{\partial H(X,Y)}{\partial n_Y}T(Y)\,dS_Y+F_2(X), \tag{2.7}$$

$$F_2(X)=\int\limits_\Sigma H(X,Y)\psi(Y)\,dS_Y-\int\limits_S \lambda(Y)\frac{\partial H(X,Y)}{\partial n_Y}\varphi(Y)\,dS_Y. \tag{2.8}$$

Интегралы по поверхности Σ в (2.7) и (2.8) имеют на диагонали слабую особенность, остальные слагаемые являются интегралами с гладкими ядрами.

Сразу обратим внимание на тот факт, что однородная система интегральных уравнений, соответствующая (2.4) и (2.7), имеет нетривиальное решение $q_0=0$, $T_0=\text{const}$.

Проверим, что это нетривиальное решение единственно в классе суммируемых на $S\cup\Sigma$ функций. Пусть $(q_1,\ T_1)$ — некоторое решение системы (2.4), (2.7) при $F_1=F_2=0$. Из суммируемости решения системы уравнений со слабой особенностью следует его непрерывность [3]. Рассмотрим функцию

$$\Phi(X)=-\int\limits_S H(X,Y)q_1(Y)\,dS_Y-\int\limits_\Sigma \lambda(Y)\frac{\partial H(X,Y)}{\partial n_Y}T_1(Y)\,dS_Y, \tag{2.9}$$

являющуюся решением уравнения (1.1) в $R^3\backslash S\backslash\Sigma$.

Пусть $X\in D_e$ (D_e — область, внешняя по отношению к поверхности Σ). Из уравнения (2.7) следует, что $\lim\limits_{X\to X_0\in\Sigma}\Phi=0$. Кроме того, $\Phi\underset{|X|\to\infty}{\to}0$, и по единственности решения внешней задачи Дирихле $\Phi\equiv0$ в области D_e. Тогда $\lim\limits_{X\to X_0\in\Sigma}\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}=0$, и существует конечный предел нормальной производной потенциала двойного слоя (второго слагаемого в (2.9)). Следовательно [2], существует предел изнутри области D, равный пределу извне (плотность потенциала непрерывна), и $\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\to0$ при $X\in D$, $X\to X_0\in\Sigma$, если Σ удовлетворяет в точке X_0 условиям Ляпунова.

Рассмотрев аналогично функцию Φ в области D_0, заключенной внутри S, из уравнения (2.4) получим, что Φ удовлетворяет на S однородному условию Неймана, и $\Phi=\text{const}$ при $X\in\bar{D}_0$. Тогда $\Phi=\text{const}$ на S, и по единственности решения смешанной задачи для области D получим, что $\Phi\equiv\text{const}$ в D. Из формул (2.9), (2.4), (2.7) следует, что $q_1=-\lambda\left[\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_S\equiv0$, $T_1=[\Phi]_\Sigma\equiv\text{const}$. Таким образом, система интегральных уравнений (2.4), (2.7) при $F_1=F_2=0$ имеет единственное суммируемое нетривиальное решение.

Поэтому при проведении расчетов необходимо строить конечномерную аппроксимацию интегральных уравнений (2.4), (2.7) в подпространстве $L_2(S\cup\Sigma)$, ортогональном к элементу $(0; 1)$. Проще всего это сделать, применяя к решению системы (2.4), (2.7) метод моментов. А именно, при аппроксимации неизвестной функции системой ортогональных полиномов следует исключить из этой системы полином, равный постоянной на поверхности Σ. Опишем кратко схему метода моментов применительно к рассматриваемой задаче.

Пусть $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ — полные ортогональные в метрике пространства L_2 системы функций на S и на Σ соответственно, и пусть $\varphi_1\equiv 1$, $\psi_1\equiv 1$. Представляя неизвестные функции $q|_S$ и $T|_\Sigma$ в виде рядов

$$q=\sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi_j, \qquad T=\sum_{j=2}^{\infty} b_j\psi_j, \tag{2.10}$$

и записывая систему уравнений (2.4), (2.7) в операторной форме

$$\begin{aligned} &q+A_{11}q+A_{12}T=F_1,\\ &T+A_{21}q+A_{22}T=F_2; \end{aligned} \tag{2.11}$$

получим относительно коэффициентов a_i, b_i систему уравнений

$$\begin{gathered} a_i\|\varphi_i\|^2+\sum_{j=1}^{\infty} a_j(A_{11}\varphi_j,\varphi_i)+\sum_{j=2}^{\infty} b_j(A_{12}\psi_j,\varphi_i)=(F_1,\varphi_i),\\ \sum_{j=1}^{\infty} a_j(A_{21}\varphi_j,\psi_1)+\sum_{j=2}^{\infty} b_j(A_{22}\psi_j,\psi_1)=(F_2,\psi_1),\\ b_i\|\psi_i\|^2+\sum_{j=1}^{\infty} a_j(A_{21}\varphi_j,\psi_i)+\sum_{j=2}^{\infty} b_j(A_{22}\psi_j,\psi_i)=(F_2,\psi_i), \quad i=2,\ldots . \end{gathered} \tag{2.12}$$

Заметим, что соотношение, получающееся из первого уравнения (2.11) при $i=1$, обращается в тождество при любом наборе коэффициентов a_i, b_i (это следует из того факта, что сопряженная однородная система, соответствующая (2.11), имеет нетривиальное решение $q\equiv 1$, $T\equiv 0$). Поэтому это соотношение в систему уравнений (2.12) не входит.

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (2.12) не имеет нетривиального решения при $F_1\equiv 0$, $F_2\equiv 0$. Приближая ряды (2.10) конечными суммами $q_m=\sum\limits_{j=1}^{m} a_j\varphi_j$, $T_n=\sum\limits_{j=2}^{n} b_j\psi_j$, получим систему $m+n-1$ уравнений относительно коэффициентов $a_1, \ldots, a_m$ и $b_2, \ldots, b_n$.

Остановимся также кратко на решении системы интегральных уравнений (2.4), (2.7) методом механических квадратур. Непосредственное применение этого метода приводит в данном случае к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей близкий к нулю определитель (не равный нулю только за счет погрешностей аппроксимации), и в связи с этим необходимо предварительно преобразовать систему (2.4), (2.7). В общем виде схема такого преобразования может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$u+Au=F, \tag{2.13}$$

где A — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве H. Пусть для простоты u_0 — единственный нуль оператора $I+A$, v_0 — нуль оператора $I+A^*$. Выберем произвольные элементы $\bar{u}\in H$, $\bar{v}\in H$ так, чтобы

$$(\bar{u},u_0)\neq 0, \qquad (\bar{v},v_0)\neq 0, \tag{2.14}$$

и рассмотрим также уравнение

$$u+Au+\frac{(u,\bar{u})\bar{v}}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}=F_0,\qquad F_0=\frac{c_1\bar{v}}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}+F. \tag{2.15}$$

Соответствующее однородное уравнение не имеет нетривиального решения в H. Действительно, предположив, что u_1 — решение уравнения (2.15) при $F_0=0$, получим скалярным умножением этого равенства на v_0

$$(u_1+Au_1,\ v_0)+\frac{(u_1,\bar{u})\,(\bar{v},v_0)}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}=0,$$

и вследствие равенств $(u_1+Au_1, v_0)=0$ и (2.14) $(u_1,\bar{u})=0$. Из уравнения (2.15) имеем $u_1+Au_1=0$, а тогда $u_1=u_0$, что противоречит первому из условий (2.14).

Следовательно, уравнение (2.15) разрешимо при любой правой части, принадлежащей H. Если же F удовлетворяет условию $(F, v_0)=0$, решение u_1 уравнения (2.15) является решением исходного уравнения (2.13), таким, что $(u_1,\bar{u})=c_1$. Действительно, при таком F уравнение (2.13) имеет решение вида $u=cu_0+u_1$, постоянная c может быть выбрана так, что $(u_1,\bar{u})=c_1$. Тогда u_1 — решение уравнения (2.15), и это решение единственно.

В случае системы интегральных уравнений (2.4), (2.7) естественно положить $c_1=0$, $\bar{u}=u_0=(0;1)$, $\bar{v}=v_0=(1;0)$, тогда уравнение (2.7) останется без изменения, к правой части уравнения (2.4) добавится слагаемое $\lambda\int\limits_{\Sigma} T\,dS/(\operatorname{mes} S)^{1/2}\cdot\operatorname{mes}\sum$.

Как ясно из вышеизложенного, система интегральных уравнений (2.4), (2.7) определяет температуру на поверхности Σ с точностью до постоянного слагаемого, при этом интересующая нас функция $q|_S$ (плотность теплового потока) определяется однозначно.

Если нужно найти также $T|_\Sigma$, то к решению T_1, найденному из системы уравнений (2.4), (2.7), следует добавить слагаемое $C=\text{const}$, вычисляемое следующим образом.

Записывая формулу (2.1) при $X\in S$, учитывая граничное условие (1.2) и полагая $T|_\Sigma=T_1+C$, получим

$$\frac{1}{2}\varphi(X)=-\int\limits_S Hq\,dS_Y+\int\limits_\Sigma H\psi\,dS_Y-\int\limits_S \lambda\frac{\partial H}{\partial n_Y}\varphi\,dS_Y-\int\limits_\Sigma \lambda\frac{\partial H}{\partial n_Y}T_1\,dS_Y+C.$$

Последнее тождество верно при всех $X\in S$. Выбирая произвольную точку X, вычислим C.

3. О сингулярном интеграле $J(X)$

Используя (2.2), имеем для интеграла (2.6)

$$J(X)=\int\limits_S \lambda(Y)\,[\varphi(Y)-\varphi(X_0)]\left[\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial^2\dfrac{1}{r(X,Y)}}{\partial n_0\,\partial n_Y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\lambda(X)\,\frac{\partial\omega(X,Y)}{\partial n_Y}\right)\right]dS_Y. \tag{3.1}$$

По предположению $\varphi(X)$ имеет на S частные производные, удовлетворяющие условию Гёльдера. Тогда φ удовлетворяет условию Ляпунова [4], достаточному для существования конечного предела нормальной производной потенциала двойного слоя (первое слагаемое в (3.1)). Предел второго слагаемого в силу оценок (2.3) имеет ядро с интегрируемой особенностью. Наибольшие трудности для вычислений представляет первое слагаемое в (3.1). Преобразуем его к более удобному виду. Обозначив $L(X, Y) = 1/4\pi r(X, Y)$, $\mu(Y) = \lambda(Y)[\varphi(Y) - \varphi(X_0)]$, рассмотрим интеграл

$$J_0(X) = \int_S \mu(Y) \frac{\partial^2 L(X, Y)}{\partial n_0 \, \partial n_Y}. \tag{3.2}$$

Пусть $X \in D$, причем X лежит на нормали к S, проведенной в точке X_0. С использованием формулы Стокса градиент потенциала двойного слоя может быть записан в виде [4]

$$\operatorname{grad} \int_S \mu(Y) \frac{\partial L}{\partial n_Y} dS_Y = -\int_S [\operatorname{grad}_X L, [\mathbf{n}_Y, \operatorname{grad} \mu]] dS_Y,$$

а тогда

$$J_0(X) = \left(\mathbf{n}_0, \operatorname{grad} \int_S \mu(Y) \frac{\partial L}{\partial n_Y} dS_Y\right) = \int_S ([\mathbf{n}_0, \operatorname{grad}_X L], [\mathbf{n}_Y, \operatorname{grad} \mu]) dS_Y$$

или в скалярной форме

$$J_0(X) = \int_S \left[\left(\beta_0 \frac{\partial L}{\partial x_3} - \gamma_0 \frac{\partial L}{\partial x_2}\right)\left(\beta_Y \frac{\partial \mu}{\partial y_3} - \gamma_Y \frac{\partial \mu}{\partial y_2}\right) + \left(\gamma_0 \frac{\partial L}{\partial x_1} - \alpha_0 \frac{\partial L}{\partial x_3}\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\gamma_Y \frac{\partial \mu}{\partial y_1} - \alpha_Y \frac{\partial \mu}{\partial y_3}\right) + \left(\alpha_0 \frac{\partial L}{\partial x_2} - \beta_0 \frac{\partial L}{\partial x_1}\right)\left(\alpha_Y \frac{\partial \mu}{\partial y_2} - \beta_Y \frac{\partial \mu}{\partial y_1}\right)\right] dS_Y, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{n}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, $\mathbf{n}_Y = (\alpha_Y, \beta_Y, \gamma_Y)$ — единичные векторы нормали в точках X_0 и $Y = (y_1, y_2, y_3)$; $X = (x_1, x_2, x_3)$. Из (3.3) видно, что J_0 представляет собой комбинацию производных от потенциала простого слоя по направлениям, касательным к S. Следовательно, по теореме Ляпунова J_0 не испытывает скачка при стремлении X к поверхности S, и предельное значение интеграла равно его прямому значению. Пусть $X \in S$. Представим $J_0(X)$ в виде

$$J_0(X) = \int_S (([\mathbf{n}_X, \operatorname{grad}_X L], [\mathbf{n}_Y, \operatorname{grad} \mu(Y)]) +$$
$$+ ([\mathbf{n}_Y, \operatorname{grad}_Y L], [\mathbf{n}_X, \operatorname{grad} \mu(X)])) dS_Y. \tag{3.4}$$

Интеграл от добавленного второго слагаемого равен нулю по формуле Стокса. Подынтегральная функция в (3.4) имеет на диагонали слабую особенность. Заметим, что каждое слагаемое в отдельности в (3.4) интегрируемо только в смысле главного значения по Коши. Пусть, в частности, область D осесимметрична с осью симметрии z. В цилиндрических координатах (ϱ, θ, z), записывая уравнение поверхности S в параметрической форме $\varrho = \varrho(s)$, $z = z(s)$, где s — длина дуги образующей, представим сингулярный интеграл (3.3) при $X \in S$ в виде

$$J_0(X) = \int_S \left[\cos\delta \frac{\partial L}{\partial s_X} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial s_Y} + \right.$$
$$+ \sin\delta\left(-\frac{\varrho'(s_X)}{\varrho(s_X)} \frac{dL}{d\theta_X} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial s_Y} + \frac{\varrho'(s_Y)}{\varrho(s_Y)} \frac{\partial L}{\partial s_X} \frac{\partial \mu}{\partial \theta_Y}\right) + \tag{3.5}$$

$$+\frac{\varrho'(s_X)\varrho'(s_Y)\cos\delta+z'(s_X)z'(s_Y)}{\varrho(s_X)\varrho(s_Y)}\cdot\frac{\partial L}{\partial\theta_X}\frac{\partial\mu}{\partial\theta_Y}\Big]\,dS_Y,\qquad \delta=(\theta_X-\theta_Y).$$

Если функция μ осесимметрична, формула (3.5) упрощается

$$J_0(X)=\int\limits_S\left(\cos\delta\frac{\partial L}{\partial s_X}-\sin\delta\frac{\varrho'(s_X)}{\varrho(s_X)}\cdot\frac{\partial L}{\partial\theta_X}\right)\mu'(s_Y)\,dS_Y.$$

В случае, когда все данные задачи осесимметричны, т. е. осесимметрично искомое решение, проинтегрировав ядра всех интегральных операторов в уравнениях (2.4), (2.7) по полярному углу, получим систему одномерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

4. Метод функций Грина

Систему уравнений (2.4), (2.7) удается существенно упростить за счет использования метода функций Грина. А именно, если известна функция $H(X, Y)$, удовлетворяющая условию Неймана $\lambda\,\partial H/\partial n_Y=\mathrm{const}$ при $\varphi\in\Sigma$ (или хотя бы условию $\partial H/\partial n_Y=f(Y)$ при $Y\in\Sigma$), то, выбрав эту функцию Грина в качестве ядра в уравнении (2.4), получаем, что второй интеграл в правой части обращается в нуль, и вместо системы (2.4), (2.7) мы имеем одно уравнение только на интересующей нас части границы

$$\frac{1}{2}q(X)=\int\limits_S\lambda(X)\frac{\partial H}{\partial n_X}q(Y)\,dS_Y+F_1(X),\tag{4.1}$$

где $F_1(X)$ определяется формулой (2.5). Если же построить такую функцию Грина затруднительно, можно попытаться найти функцию $H(X, Y)$, удовлетворяющую условию Неймана хотя бы на части поверхности Σ. Это даст возможность исключить из уравнений (2.4), (2.7) соответствующие интегралы.

Заметим, что однородное уравнение, соответствующее (4.1), имеет некоторое нетривиальное решение q_0 (очевидно, что сопряженное однородное уравнение имеет решение $v_0\equiv\mathrm{const}$). Покажем, что

$$\int\limits_S q_0\,dS\neq 0.\tag{4.2}$$

Рассмотрим функцию

$$\Phi(X)=\int\limits_S H(X, Y)\,q_0(Y)\,dS_Y.$$

Эта функция является решением уравнения (1.1) в области D_0, а ее нормальная производная обращается в 0 на границе S этой области в силу уравнения. Следовательно, $\Phi(X)\equiv C=\mathrm{const}$ при $X\in\overline{D}_0$. Удовлетворяющая уравнению (1.1) в области D функция $\Phi(X)$ равна C на S,

$$\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Sigma=\lambda\frac{\partial H}{\partial n}\Big|_\Sigma\int\limits_S q_0\,dS_Y.$$

Допустив, что $\int\limits_S q_0\,dS_Y=0$, мы получим, что $\Phi(X)\equiv C$ при $X\in\overline{D}$ (по единственности решения смешанной задачи), а тогда

$$\frac{q_0}{\lambda}=\lim_{D\ni X\to X_0}\int\limits_S\frac{\partial H}{\partial n_X}q_0\,dS_Y-\lim_{D_0\ni X\to X_0}\int\limits_S\frac{\partial H}{\partial n_X}q_0\,dS_Y=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]_S=0,\qquad X_0\in S.$$

Полученное противоречие доказывает (4.2).

Применяя описанную в разделе 2 схему и положив в (2.15) $\bar{u}\equiv 1$, $\bar{v}\equiv 1$ (это возможно, так как в силу (4.2) выполнены условия (2.14)), преобразуем уравнение (4.1) к виду

$$\frac{1}{2}q(X)-\int\limits_S \lambda(X)\frac{\partial H}{\partial n_X}q\,dS_Y+\int\limits_S q\,dS/\mathrm{mes}\,S=F_1(X)+\int\limits_\Sigma \psi\,dS/\mathrm{mes}\,S. \tag{4.3}$$

Здесь учтено условие теплового баланса $c_1=\int\limits_S q\,dS=\int\limits_\Sigma \psi\,dS$.

Уравнение (4.3) имеет единственное решение. За счет выбора $\bar{u}$ и $\bar{v}$ здесь удается избежать предварительного вычисления решения q_0 однородного уравнения.

В заключение отметим, что предложенный метод в случае $\lambda=\mathrm{const}$ был применен для расчета испарителя системы испарительного охлаждения силовых полупроводниковых приборов (см. [5]). Проведенные расчеты показали существенно неоднородный характер распределения плотности теплового потока q и коэффициента теплоотдачи α на поверхности кипения фреона при односторонней подаче тепла к испарителю. Так, максимальное значение q превышает его среднее значение (соответствующее однородному распределению теплового потока) в 4,89 раза.

Актуальность задачи определения локальной теплоотдачи подчеркивается в [6], где рассматривается сопряженная задача о турбулентном течении жидкости в трубе с одновременным определением температуры стенки. Для расчета последней в [6] предлагается специальный вариант метода Галеркина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маресмаа Р. Р., Спирка В. М., Темкин Л. А.* В кн.: Докл. 25 Междунар. коллоквиума техн. института Ильменау. 2, 1980, 85—88.
2. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
3. *Михлин С. Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., Физматгиз, 1959.
4. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
5. *Суй Х. Н., Темкин Л. А., Темкина В. С., Техвер Я. Х.* Тез. докл. Всесоюз. конф. «Теплофизика и гидрогазодинамика процессов кипения и конденсации». Рига, 1982, 241—242.
6. *Галин Н. М.* Исследование турбулентного теплообмена в трубах при сложных граничных условиях. Автореф. докт. дис. М., 1982.

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/XII 1983

V. TEMKINA

SOOJUSVOO TIHEDUSE ARVUTAMISEST KESKKONNA PIIRIL INTEGRAALVÕRRANDITE MEETODIL

Artiklis on esitatud integraalvõrrandite meetod soojusjuhtivuse teooria statsionaarse rajaülesande lahendamiseks, kui otsitavad funktsioonid on nii temperatuur kui ka soojusvoog vaadeldava keskkonna sisepiiril. Seejuures esinevad raskused on seotud vastava integraalvõrrandite süsteemi lahendi pluraalsusega ning integreeritavate avaldiste singulaarsusega.

V. TEMKINA

ON CALCULATION OF THE HEAT FLUX DENSITY ON THE BOUNDARY OF THE REGION BY THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS

In this paper the method of the boundary integral equation is considered in regard to the stationary problem of the heat conduction theory when the unknown functions are the temperature as well as the heat flux on a part of the boundary of the considered uniform medium. That problem arises in particular at the investigation of heat sink constructions for the power semiconductor devices, when on the boiling surface of liquid the heat flux density is to be determined by the measured temperature.

The considered mixed boundary problem for an elliptic equation is reduced to the system of Fredholm's integral equations of the second kind in regard to the boundary values of the temperature and its normal derivative. In the present paper the considered method is grounded. The arisen difficulties are connected with the singularities in the kernels of integral operators as well as with the existance of a non-trivial solution by the corresponding uniform system.