

М. РОЗМАН, В. ХИЖНЯКОВ

ДВУХУРОВНЕВАЯ СИСТЕМА В ПОЛЕ ДВУХ ЛАЗЕРНЫХ МОД

1. Задача о двухуровневой системе в резонансном мономодовом поле многие годы привлекает к себе внимание и хорошо изучена как теоретически, так и экспериментально. Поведение же указанной системы в поле нескольких либо даже двух мод изучено гораздо меньше, хотя некоторые исследования выполнены [1]. Цель данной работы — рассмотреть стационарные состояния двухуровневой системы в двухмодовом поле и найти ее оптические спектры. Обсуждается также случай нескольких лазерных мод одинаковой частоты. Используется метод одетых состояний [2].

Рассмотрим вначале состояние двухуровневой системы в поле двух сильно возбужденных мод одинаковых частот $\omega_1 = \omega_2 = \omega_L$. Интенсивность их взаимодействия с системой определяется параметрами $\Gamma_1 = \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_1 \sim d\sqrt{N_1}$ и $\Gamma_2 = \vec{d} \cdot \vec{\epsilon}_2 \sim d\sqrt{N_2}$ соответственно, где \vec{d} — дипольный момент перехода, ϵ_i — напряженность поля, а N_i — число фотонов i -й моды ($i = 1, 2$). Разница частот основного $|g\rangle$ и возбужденного $|e\rangle$ состояний ситемы равна ω_0 . Используем в качестве базиса состояния $|g\rangle|N_1 - 1, N_2 + 1\rangle$, $|e\rangle|N_1 - 1, N_2\rangle$, $|g\rangle|N_1, N_2\rangle$, $|e\rangle|N_1, N_2 - 1\rangle$, $|g\rangle|N_1 + 1, N_2 - 1\rangle \dots$. В этом базисе гамильтониан рассматриваемой системы и двух мод в приближении вращающейся волны имеет вид трехдиагональной матрицы

$$H = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \Gamma_2 \Delta & \Gamma_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \Gamma_1 & -\Delta & \Gamma_2 & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & \Gamma_2 & \Delta & \Gamma_1 & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \Gamma_1 & -\Delta & \Gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\Delta = (\omega_0 - \omega_L)/2$ (за начало отсчета взята энергия $E_g + \omega_0 - \Delta + M\omega_L$, $M = N_1 + N_2$). Гамильтониан (1) совпадает с гамильтонианом колебаний одномерной двухатомной цепочки (см., напр., [3]), собственные функции которого известны. Это позволяет сразу же найти вид искомых собственных состояний

$$|\Psi_{k,M}\rangle = \sum_N (C_{k,2N,M} |g\rangle |N, M - N\rangle + C_{k,2N+1,M} |e\rangle |N, M - N - 1\rangle), \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} C_{k,2N+1,M} &= C_1 \exp[ik(2N+1)], \\ C_{k,2N,M} &= C_2 \exp(ik \cdot 2N), \end{aligned} \quad (3)$$

k — квантовое число, аналогичное квазинимпульсу. Область изменения

k определяется условием, — $\pi/2 < k \leq \pi/2$. По своему физическому смыслу k соответствует скорости перехода фотонов от одной моды к другой, причем указанный поток фотонов возможен вследствие взаимодействия между модами в присутствии двухуровневой системы.

Дальнейшие вычисления почти полностью повторяют аналогичные из теории двухатомной цепочки [3]. Разрешенные значения энергии для каждого M образуют две зоны, определяемые формулой

$$E = \pm \sqrt{\Delta^2 + |R|^2} = \pm \sqrt{\Delta^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + 4\Gamma_1\Gamma_2 \cos^2 k}, \quad (4)$$

где $R = \Gamma_1 e^{-ik} + \Gamma_2 e^{ik}$, а амплитуды C_1 и C_2 имеют вид

$$C_1 = M^{-1/2} (|R|/R) ((E + \Delta)/2E)^{1/2} (|E|/E), \quad (5)$$

$$C_2 = M^{-1/2} ((E - \Delta)/2E)^{1/2}$$

(ниже знаку плюс в (4) соответствует $C_{1,2}^+$, а знаку минус — $C_{1,2}^-$).

2. Рассмотрим теперь оптические переходы между найденными состояниями с излучением (поглощением) фотонов других мод. Соответствующие матричные элементы дипольных переходов имеют вид

$$\langle \psi_{k,M} | \hat{d} | \psi_{k',M'} \rangle = \delta_{k,k'} \delta_{M,M' \pm 1} D, \quad (6)$$

где $D = Md_0 C_1 C_2 \exp(ik)$, $d_0 = \langle e | \hat{d} | g \rangle$. Скорость оптических переходов без изменения ветви в законе дисперсии — $|D^{++}|^2 = |D^{--}|^2 = d_0^2 (E^2 - \Delta^2)/4E^2$, для переходов с ветви плюс на ветвь минус — $|D^{+-}|^2 = d_0^2 (|E| + \Delta)^2/4E^2$, а с ветви минус на ветвь плюс — $|D^{-+}|^2 = d_0^2 (|E| - \Delta)^2/4E^2$. Вычисление интенсивностей соответствующих линий в спектре проведем в предположении, что состояния с разными k в зонах заселены равновероятно. (Это предположение выполнено, если моды не синхронизованы; см. ниже.) Распределение заселенностей (Π_{\pm}) по ветвям найдем из балансного уравнения $\Pi_+ |D^{+-}|^2 = \Pi_- |D^{-+}|^2$, $\Pi_+ + \Pi_- = 1$. Отсюда получаем $\Pi_{\pm} = (|E| \pm \Delta)^2/2(E^2 + \Delta^2)$. Это дает для интенсивности линий на частоте ω_L выражение

$$j_0(E) = d_0^2 (E^2 - \Delta^2)/4E^2, \quad (7)$$

а для интенсивностей их боковых сателлитов на частотах $\omega = \omega_L \pm \pm 2|E|$

$$j_1(E) = d_0^2 (E^2 - \Delta^2)/8E^2 (E^2 + \Delta^2). \quad (8)$$

Ширины линий определяются радиационными эффектами и могут быть найдены методом матрицы плотности одетых состояний [2]. В данной работе эти эффекты не учитываются.

Для нахождения суммарного спектра излучения (поглощения) необходимо знать также плотность состояний, которая в данном случае равна

$$\rho(E) = \pi^{-1} |E| \{ [E^2 - \Delta^2 - (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2] [\Delta^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - E^2] \}^{-1/2}, \quad (9)$$

$$E_{\min} \leq |E| \leq E_{\max}$$

и $\rho(E) = 0$, $|E| < E_{\min}$, $|E| > E_{\max}$, причем $E_{\min} = [\Delta^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2]^{1/2}$, а $E_{\max} = [\Delta^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2]^{1/2}$. Эта функция имеет корневые особенности на границах спектра. При $\Delta \rightarrow 0$, $\Gamma_1 - \Gamma_2 \rightarrow 0$ две средние особенности сливаются и пропадают.

Суммарный спектр состоит из центральной линии

$$I_0(\omega) = \delta(\omega - \omega_L) \int dE j_0(E) \rho(E) \quad (10)$$

и крыльев

$$I_1(\omega) = \rho(|\omega - \omega_L|/2) j_1(|\omega - \omega_L|/2). \quad (11)$$

При малых Δ (по сравнению с большим из Γ_1 и Γ_2) форма последних повторяет плотность состояний, так как при этом $j_1(E) \approx d_0^2/8 = \text{const}$.

3. Рассмотрим предельный переход к одномодовому случаю. Его можно совершить двумя способами. 1) Положим $\Gamma_2 = 0$. Тогда будем иметь две бездисперсные зоны на частотах $\pm \Omega$, где $\Omega = \sqrt{\Delta^2 + \Gamma_1^2}$ — частота Раби. В этом случае спектр есть хорошо известный триплет [2]. 2) Формально можно считать, что две моды получены путем канонического преобразования над базисом, в котором возбуждена одна мода. В нашем случае это будет поворот в двумерном пространстве. Так как вращательный момент до поворота равен 0, то коэффициенты при новых состояниях будут вещественными. Значит при рассматриваемом преобразовании заселяются только состояния с $k=0$ и энергиями $\pm \Omega$. Переходы между этими состояниями по-прежнему дают триплет.

4. Выше не учитывалась зависимость Γ_1 и Γ_2 от числа фотонов в модах. Однако, как отмечалось выше, возбуждению с квантовым числом k можно сопоставить пакет, движущийся в пространстве $L = N_1 - N_2$ с постоянной скоростью. За время $t \sim \sqrt{M}/d_0$ указанный пакет может переместиться на расстояние $|L| \sim M$. Тогда изменения Γ_1 и Γ_2 станут заметными. Они приведут к искажению зон на концах «решетки», что в свою очередь вызовет отражение пакета от указанных концов. В результате возникнет колебательное движение пакета и, как следствие этого, осцилляционная перекачка интенсивности от одной моды к другой. В частности в случае $\Delta \gg \Gamma = d_0 \sqrt{M/2}$, зависимость энергии возбуждения от L и k в области дна верхней зоны и потолка нижней зоны, согласно (4), описывается формулой

$$E(L, k) = \pm (\Delta + Md_0^2 k^2 / \Delta + d_0^2 L^2 / 4M\Delta). \quad (12)$$

Такой гамильтониан описывает гармонические колебания интенсивности каждой из мод с частотой $d_0^2/2\Delta < d_0/\sqrt{2M} \sim 10 - 10^6 \text{ сек}^{-1}$ (предполагается, что $d_0 \sim 10^8 \text{ сек}^{-1}$, $M \sim 10^5 - 10^{15}$). Отметим также, что указанные колебания можно раскачать небольшими осцилляциями интенсивности одной или обеих мод с удвоенной частотой по механизму параметрического резонанса.

5. Рассмотрим теперь случай двух мод разных частот. Здесь мы исследуем лишь наиболее простой случай мод одинаковой интенсивности с частотами, расположенными симметрично относительно частоты перехода ω_0 : $\omega_1 - \omega_0 = \omega_0 - \omega_2 = \Delta$. В этом случае

$$H = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2\Delta & \Gamma & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \Gamma & \Delta & \Gamma & 0 & 0 \\ \cdot & 0 & \Gamma & 0 & \Gamma & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & \Gamma & -\Delta & \Gamma \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (13)$$

(за начало отсчета взята энергия $E_g + \omega_1 N_1 + \omega_2 (M - N_1)$). Из вида гамильтониана (13) следует, что спектр энергии эквидистантен: $E_v = v\Delta$, $v = 0, \pm 1, \dots$. Поэтому собственные функции H можно записать в виде

$$|\psi_{v, M}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [C_{2n}(E_v)|g\rangle|n, M-n\rangle + C_{2n+1}(E_v)|e\rangle|n, M-n-1\rangle], \quad (14)$$

где

$$C_n(E_v) = e^{i\alpha p} C_{n-p}(E_v - \Delta p), \quad n, p = 0, \pm 1, \dots, \quad (15)$$

$e^{i\alpha p}$ — несущественный для дальнейшего фазовый множитель. Соотношение (15) позволяет выразить коэффициенты $C_n(E_v)$ через $C_n(0) \equiv C_n$. Последние, как это следует из стационарного уравнения Шредингера, удовлетворяют рекуррентному соотношению $\Gamma C_{n+1} - \Delta n C_n + \Gamma C_{n-1} = 0$, совпадающему с рекуррентным соотношением для функций Бесселя. Поэтому

$$C_n = J_n(2\Gamma/\Delta). \quad (16)$$

Это решение удовлетворяет условию ортонормированности.

Матричный элемент дипольного момента равен

$$\begin{aligned} \langle \psi_{v, M} | \hat{d} | \psi_{v', M'} \rangle &= \delta_{M, M' \pm 1} d_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n-v}(2\Gamma/\Delta) J_{2n+1-v'}(2\Gamma/\Delta) = \\ &= 1/2 \delta_{M, M' \pm 1} d_0 (\delta_{v+1-v', 0} + (-1)^v J_{v'-1-v}(4\Gamma/\Delta)). \end{aligned} \quad (17)$$

Поэтому оптический спектр получается в виде:

$$I(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l \delta(\omega - \omega_0 + \Delta \cdot l) \cdot d_0^2, \quad (18)$$

где

$$I_l = J_l^2/4 + \delta_{l,0} [1/4 + J_0^2 / (\sum_{h=-\infty}^{\infty} J_{2h}^2 + 1)], \quad J_n \equiv J_n(4\Gamma/\Delta). \quad (19)$$

В пределе $\Delta \rightarrow 0$, $\Delta \cdot l = \omega - \omega_0 = \text{const}$ огибающая спектра совпадает с аналогичным пределом результата, полученного в пункте 2. При конечных Δ , таких что $\Gamma/\Delta \gg 1$, огибающая содержит осцилляции, период и амплитуда которых спадают к центру, краевые же максимумы расположены на расстоянии порядка 4Γ . Именно такой спектр наблюдался в [1].

В заключение сделаем замечание относительно поведения двухуровневой системы в поле произвольного числа n лазерных мод одинаковых частот. В этом случае нахождение энергетического спектра и собственных состояний аналогично задаче динамики $n(n-1)/2$ -мерного двухатомного кристалла. Здесь также каждому фиксированному $M = N_1 + N_2 + \dots + N_m$ (N_i — число фотонов в i -й моде) соответствуют две зоны, причем законы дисперсии, матричные элементы дипольного момента перехода и плотность энергетических состояний находятся аналитически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич А. М., Вартамян Т. А., Чигирь Н. А. Ж. эксперим. и теор. физ., 77, 1899—1909 (1979).
2. Cohen-Tannoudji, C., Reynaud, S. J. Phys. B: Atom. and Mol. Phys., 10, 345—365 (1977).
3. Завт Г. С. Теория колебаний кристаллической решетки. Тарту, ТГУ, 1966.

Институт физики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/11 1983

M. ROZMAN, V. HIZNJAKOV

KAHENIVOOLINE SÜSTEEM KAHE LASERIMOODI VÄLJAS

On leitud kahe laserimoodi väljas asuva kahenivoolise süsteemi statsionaarsed seisundid ja optilised spektrid ning näidatud, et võrdsete sageduste korral süsteemi aatom—väli seisundid moodustavad tsoone, mis on analoogilised kaheaatomilise ühemöötmelise ahela tsooniseisunditega. Resonantsfluorestsentsi spektris määravad need tsoonid laseri-joone satelliitide kuju. On vaadeldud võrdse intensiivsusega, kuid erinevate sagedustega moode, mis paiknevad süsteemi siirdesageduse suhtes sümmeetriliselt, ja näidatud, et spektril on ostsilleeriv mähisjoon, mille maksimumid vähenevad keskpunkti suunas.

M. ROZMAN, V. HIZHNYAKOV

TWO-LEVEL SYSTEM IN THE FIELD OF TWO LASER MODES

Stationary states and optical spectra of a two-level system in the field of two laser modes are evaluated. It is shown that for equal frequency excitation the eigenstates of the atom-field system form bands analogous to those of one-dimensional two-atomic chain. These bands are manifested in resonance fluorescence spectrum in the shape of the side satellite of the laser line. The excitation by equal strength fields with different frequencies situated symmetrically with respect to the transition frequency is also studied. It is found that the envelope of the spectrum is of oscillation character representing a set of maxima converging to the transition frequency.