

Я. МЕТСАВЭЭР

## О ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ОДНОРОДНЫХ СРЕД

(Представил Н. Алумяэ)

Для аналитического исследования нестационарных волн в сплошных средах требуются динамические модели этих сред. Одной из наиболее общих линейных моделей однородных сред является наследственная. В одномерном случае она имеет вид [1]

$$c_1^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \int_0^t K(t - \xi) \frac{\partial^2 u(x, \xi)}{\partial \xi^2} d\xi = 0, \quad (1)$$

где  $x$  — координата,  $t$  — время,  $u(x, t)$  — перемещение,  $c_1$  — мгновенная скорость распространения волны. Ядро  $K(t)$  уравнения (1) является важной характеристикой среды и поэтому его выбор весьма существен для описания эволюции волны. Но пока, к сожалению, удобные критерии для его прямого выбора отсутствуют.

За основные характеристики стационарного процесса принимаются, как правило, дисперсия и диссипация (поглощение) гармонических волн, которые определяются зависимостями фазовой скорости  $c$  и декремента затухания  $\alpha$  от частоты  $\omega$ . Зависимости  $c(\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$  легко находятся экспериментально, и они известны для многих сред. Учитывая это обстоятельство, поставим перед собой цель использовать их для отыскания ядра, определяющего динамическую модель среды.

Такие задачи рассмотрены, например, в [2, 3]. В первой из них показана процедура определения ядра из экспериментальных данных, а во второй — исследован случай диспергирующих волн. В настоящей статье предлагается физически обоснованная процедура для отыскания функции ядра по известным зависимостям  $c(\omega)$  и  $\alpha(\omega)$ .

Вообще говоря, динамическая модель среды не обязана быть наследственной и поэтому для ее построения по зависимостям  $c(\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$  уравнение движения среды следует представить в более общем виде

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \int_{-\infty}^{\infty} M(t - \xi) \frac{\partial^2 u(x, \xi)}{\partial \xi^2} d\xi = 0. \quad (2)$$

Этот более общий по сравнению с уравнением (1) вид обеспечивает функция  $M(t)$ , на которую ограничения, подобного условию  $K(t) \equiv 0$  при  $t \leq 0$  в уравнении (1), не накладывается. Это обстоятельство используется в дальнейшем для почленного обращения преобразования Фурье при вычислении ядра модели. Предполагая, что  $u(x, t) \equiv 0$  при  $t \leq 0$ , получим уравнение (1) из (2) подстановкой [3]

$$M(t) = c_1^{-2} [\delta(t) + K(t)H(t)], \quad (3)$$

где  $\delta(t)$ ,  $H(t)$  — функции Дирака и Хевисайда.



Для нахождения зависимостей  $c(\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$  выпишем решение уравнения (2), описывающего монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси  $x$ :

$$u(x, t) = U_0 \exp\{i\omega[\sqrt{M^F(\omega)}x - t]\}, \quad (4)$$

где  $M^F(\omega)$  — изображение Фурье функции  $M(t)$ ,  $U_0$  — постоянная, имеющая размерность перемещения. Полагая, что

$$\sqrt{M^F(\omega)} = \varphi(\omega) + i\psi(\omega), \quad (5)$$

где  $\varphi(\omega)$ ,  $\psi(\omega)$  — вещественные функции, придадим решению (4) вид

$$u(x, t) = U_0 e^{-\omega\psi(\omega)x} e^{i\omega[\varphi(\omega)x - t]}. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что функции  $\varphi(\omega)$ ,  $\psi(\omega)$  связаны с фазовой скоростью  $c(\omega)$  и декрементом затухания  $\alpha(\omega)$  соотношениями

$$\varphi(\omega) = 1/c(\omega), \quad \psi(\omega) = \alpha(\omega)/\omega. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5), находим

$$M^F(\omega) = \frac{1}{c^2(\omega)} - \frac{\alpha^2(\omega)}{\omega^2} + i \frac{2\alpha(\omega)}{\omega c(\omega)}. \quad (8)$$

Таким образом, располагая зависимостями  $c(\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$ , можно найти сначала изображение  $M^F(\omega)$ , а затем и оригинал — ядро  $M(t)$ .

Зависимости  $c(\omega)$ ,  $\alpha(\omega)$  не являются произвольными; они определяются различными физическими, химическими и иными процессами, протекающими в среде при распространении волны. Для развития каждого процесса требуется некоторое время и поэтому все они носят релаксационный характер, что неоднократно подтверждалось экспериментально (согласно Лембу [4], в жидкостях пока не обнаружено иных процессов, кроме релаксационных). Вопрос состоит в том, сколь малы эти времена релаксации и позволяет ли наша экспериментальная техника измерить их. То обстоятельство, что мы не можем описывать релаксационные процессы, лежащие за пределами возможностей измерений, волнует нас только с познавательной точки зрения, а не с прикладной, так как нам почти всегда требуются модели, описывающие волновые процессы не во всем диапазоне частоты  $\omega$  (от нуля до бесконечности), а только в некотором доступном для измерений интервале.

Релаксационный характер процессов, сопровождающих распространение волны, позволяет нам вычислять функцию  $M(t)$  в общем виде. Хотя в основе этих процессов лежат различные механизмы и подчиняются они различным законам, тем не менее их описания с точностью до линейных членов формально похожи друг на друга, поскольку отличаются они значениями лишь двух постоянных — временем  $\tau_i$  и силой  $\varepsilon_i$  релаксации. При таком описании фазовая скорость  $c(\omega)$  и декремент затухания  $\alpha(\omega)$  для одного релаксационного процесса определяются соотношениями [4]

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(\omega)} - \frac{\alpha^2(\omega)}{\omega^2} &= c_\infty^{-2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \right), \\ \frac{2\alpha(\omega)}{\omega c(\omega)} &= c_\infty^{-2} \frac{\varepsilon_1 \omega \tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{c_\infty^2 - c_0^2}{c_0^2}, \end{aligned} \quad (9)$$



где  $c_0, c_\infty$  — скорости распространения волн при весьма низких и высоких частотах  $\omega$ . Подставляя (9) в (8), имеем

$$M^F(\omega) = c_\infty^{-2} \left( 1 + \frac{\varepsilon_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + i \frac{\varepsilon_1 \omega \tau_1}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \right), \quad (10)$$

откуда

$$M(t) = c_\infty^{-2} [\delta(t) + \eta_1 e^{-t/\tau_1} H(t)], \quad \eta_1 = \varepsilon_1 / \tau_1. \quad (11)$$

Как видно, при условии  $c_\infty = c_1$  ядро  $M(t)$  совпадает с ядром уравнения стандартной вязкоупругой среды [1].

Если в интересующем нас диапазоне частоты  $\omega$  заметные вклады вносят  $n$  релаксационных процессов, то их влияния суммируются [4]

$$M^F(\omega) = c_\infty^{-2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j}{1 + \omega^2 \tau_j^2} + i \frac{\varepsilon_j \omega \tau_j}{1 + \omega^2 \tau_j^2} \right], \quad (12)$$

и ядро  $M(t)$  получает вид

$$M(t) = c_\infty^{-2} [\delta(t) + H(t) \sum_{j=1}^n \eta_j e^{-t/\tau_j}], \quad \eta_j = \varepsilon_j / \tau_j. \quad (13)$$

Формула (13) совпадает с формулой (3), если в последней принять

$$c_t = c_\infty, \quad K(t) = \sum_{j=1}^n \eta_j e^{-t/\tau_j}. \quad (14)$$

Из рассмотренного следует, что в средах, где в интересующем нас диапазоне частоты  $\omega$  дисперсия и диссипация волн определяются только процессами, имеющими релаксационный характер, наследственность, дисперсия и диссипация являются зависимыми и отражают разные стороны одного явления. Ядро  $M(t)$  модели такой среды должно иметь вид суммы убывающих экспонент.

Резюмируя вышеизложенное, представим общую процедуру построения динамической модели для конкретной среды. Постоянные  $\tau_j, \varepsilon_j, j = 1, 2, \dots, n$ , могут быть получены путем аппроксимации функций

$$\Phi(\omega) = \frac{c_\infty^2}{c^2(\omega)} - \frac{\alpha^2(\omega) c_\infty^2}{\omega^2}, \quad \Psi(\omega) = \frac{2\alpha(\omega) c_\infty^2}{\omega c(\omega)} \quad (15)$$

зависимостями

$$\Phi(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j}{1 + \omega^2 \tau_j^2}, \quad \Psi(\omega) = \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon_j \omega \tau_j}{1 + \omega^2 \tau_j^2}, \quad (16)$$

где функции  $c(\omega), \alpha(\omega)$  определяются из эксперимента. Такая аппроксимация позволяет определить число  $n$  и судить о правильности данной модели.

При экспериментальном определении зависимостей  $c(\omega), \alpha(\omega)$  следует выяснить, не возбуждаются ли в среде высшие гармоники и не генерирует ли сама среда обратные волны (волны, распространяющиеся в направлении, обратном распространению падающей волны). Наличие высших гармоник указывает на необходимость учета нелинейных членов в уравнении движения, а появление обратных волн — на неоднородность среды.

Предложенная методика построения линейных динамических моде-

лей однородных сред позволяет строить и модели первого порядка отдельно для волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях координаты  $x$ . Для этого ядро  $M(t)$  следует задать в виде

$$M(t) = c_{\infty}^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} m(t - \xi) m(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (2), получим для описания этих волн уравнения

$$c_{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \pm \int_{-\infty}^{\infty} m(t - \xi) \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial \xi} d\xi = 0, \quad (18)$$

где знаки «плюс» и «минус» относятся к волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях оси  $x$  соответственно. Функция  $m(t)$  может быть найдена по изображению  $m^F(\omega)$ , которое на основе (8) и (17) принимает вид

$$m^F(\omega) = \frac{c_{\infty}}{c(\omega)} + i \frac{c_{\infty} \alpha(\omega)}{\omega}, \quad (19)$$

или путем решения уравнения (17) при известной  $M(t)$ .

Рассмотрим вычисление функции  $m(t)$  при  $M(t)$ , определенной формулой (11). Представим  $m(t)$  в виде

$$m(t) = \delta(t) + \frac{1}{2} \eta_1 e^{-t/\tau} g(t) H(t). \quad (20)$$

Подставляя (11) и (20) в (17), получим для определения функции  $g(t)$  уравнение

$$\frac{1}{4} \eta_1 \int_0^t g(\xi) g(t - \xi) d\xi + g(t) H(t) - H(t) = 0, \quad (21)$$

решение которого имеет вид

$$g(t) = e^{-\beta t} [I_0(\beta t) + I_1(\beta t)], \quad \beta = \eta_1/2, \quad (22)$$

где  $I_0(t)$ ,  $I_1(t)$  — модифицированные функции Бесселя. Подставляя соотношение (22) в (20), а последнее в (18), получим модели первого порядка для однородной среды с одним релаксационным процессом — для стандартной вязкоупругой среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигул У. К., Акустодиагностика (Одномерные задачи), Л., «Судостроение», 1981.
2. Nunziato, J. W. e. a., In: Enc. of Phys., VIa/4, Ed. Truesdell C., Springer, Berlin, 1974, p. 1—108.
3. Уизем Д., Линейные и нелинейные волны, М., «Мир», 1977.
4. Физическая акустика (под ред. У. Мэзона), т. 2, ч. А., М., «Мир», 1968.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
10/XI 1981



## HOMOGEENSETE KESKKONDADE DUNAAMILISTEST MUDELITEST

Lineaarse ühemõõtmelise mudeli baasil on näidatud, et pärilik-elastsete keskkondade integraal-diferentsiaalvõrrandina esitatud liikumisvõrrandi tuum ei saa olla suvaline funktsioon, vaid ainult kustuvate eksponentide summa. Kõige lihtsamal juhul, s.o. juhul kui keskkonnas levivat lainet mõjutab ainult üks seal toimuda võivatest relaksatsiooniprotsessidest, langeb selline mudel kokku mudeliga, mis on tuntud standardse viskoelastse keskkonna nime all. Samuti on näidatud, et homogeensetes keskkondades dispersioon, dissipatsioon ja pärilikkus ei ole sõltumatud nähtused, vaid ühe ja sama nähtuse erinevad tahud. On esitatud ka esimest järku liikumisvõrrandite saamise metoodika. Sellised võrrandid kirjeldavad eraldi kohakoordinaadi positiivses ja negatiivses suunas levivaid laineid.

J. METSAVEER

## ON DYNAMICAL MODELS OF HOMOGENEOUS MEDIA

It is shown on the basis of a linear one-dimensional medium that the kernel of the integro-differential equation of motion describing the behaviour of a hereditary media cannot be an arbitrary function but must be constructed as a sum of fading exponents. In the simplest case when only one of the relaxation processes is taken into account the usual standard viscoelasticity model follows from the general description. It is shown that dispersion, dissipation and hereditary effects are not independent in homogeneous media but describe various sides of one and the same physical phenomenon. The first order equations of motion that describe the waves propagating to «right» and to «left» are discussed and the corresponding kernel functions obtained.