EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 1

УДК 530.12 : 531.51

А. КОППЕЛЬ

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕДЕЛЫ НОВОГО КЛАССА АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

(Представил П. Кард)

Постановка задачи и исходные вычисления

1. Нами уже был дан определенный анализ некоторых методов генерации точных аксиально-симметричных стационарных вакуумных решений уравнений Эйнштейна и прежде всего их нерелятивистских (НР) аспектов * [1,2]. Такие решения определяются парой функций ($\mathcal{E}$, W), причем можно выделить методы генерации новых решений, представляемые алгоритмом типа (2.1):

$$\mathcal{E}'=F\mathcal{E}, \quad W'=W \tag{1}$$

($\mathcal{E}$ — комплексный потенциал Эрнста, W — вещественная гармоническая функция, F — комплексный функционал, определяемый на основе исходного решения). Основное внимание мы уделили методу Нейгебауэра [3,4], пользуясь при этом некоторыми собственными обозначениями (см. (2.П2) — (2.П7), а также Приложение данной работы). Согласно этому методу, в функционал F входят определенные генерирующие потенциалы ** $\varkappa_0$ и $\varkappa_k$ и постоянные K_k, причем $k=1, 2, \ldots, 2N$.

В данной работе ставится задача изучить по общей вычислительной схеме, развитой в [2], НР предел решений одного нового класса, получаемого в некоторых частных случаях $N=1$ или $N=2$ методом Нейгебауэра, если исходный потенциал $\mathcal{E}$ является решением класса Папапетру—Элерса, которое можно задать в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{E}&=[\cos\alpha\, e^{2U}+i\sin\alpha][i\sin\alpha\, e^{2U}+\cos\alpha]^{-1}=\\ &=[1+e^{-2i\alpha}\operatorname{th}U][1-e^{-2i\alpha}\operatorname{th}U]^{-1}.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь U — решение уравнения Лапласа в координатах евклидова 3-пространства V_3 с метрической формой (1.8), а α — постоянная. Отметим, что в (2) любую заданную функцию U можно считать фиксированной с точностью до преобразования

$$U\to C_1U+C_2\ln W+C_0, \tag{3}$$

где C_1, C_2, C_0 — постоянные.

В литературе до сих пор рассматривались только некоторые частные конкретные решения класса, исследуемого в данной работе. Для

* Ниже ссылки на формулы статей [1,2] обозначаются двумя цифрами, причем первая цифра — номер работы, вторая — номер формулы.
** В [4] имеет место $\varkappa\equiv\alpha$, а в [5,6] — $\varkappa\equiv\alpha\gamma^{-1/2}$.

неисчезающих U и α был дан один конкретный пример в случае $\alpha = -\pi/4$, причем в функционале F принималось $N = 1$ [7]. Общие свойства решений $\mathcal{E}'$ при $\alpha = 0$ (исходное решение $\mathcal{E} = e^{2U}$ статическое) обсуждались в [3]. Если $U = \alpha = 0$ (исходное решение $\mathcal{E} = 1$ соответствует плоскому пространству-времени), то при $N = 1$ получается решение типа Керра-НУТ [5], а при $N = 2$ решение типа суперпозиции двух решений Керра-НУТ [6].

2. Потребуем, чтобы $\mathcal{E}'$ было «физическое» решение, имеющее в рассматриваемой координатной системе для V_3 определенный НР предел, т. е. чтобы оно удовлетворяло условиям (2.7). Допустим, что исходное решение $\mathcal{E}$ может быть и «промежуточным» (Re $\overset{[1]}{\mathcal{E}}$ не обязательно исчезает; см. также [1]), получаемым из «физического» с помощью (3). Но при этом будем предполагать, что как U и α, так и $\mathcal{E}$ являются аналитическими относительно параметра $\eta = v_N c^{-1}$ при $\eta \to 0$ и, кроме того, $\overset{[0]}{\mathcal{E}} = 1$ и $\overset{[0]}{U} = 0$, т. е.

$$U = \overset{[1]}{U}\eta + \overset{[2]}{U}\eta^2 + \ldots, \quad \alpha = \overset{[0]}{\alpha} + \overset{[1]}{\alpha}\eta + \ldots \tag{4}$$

Пусть

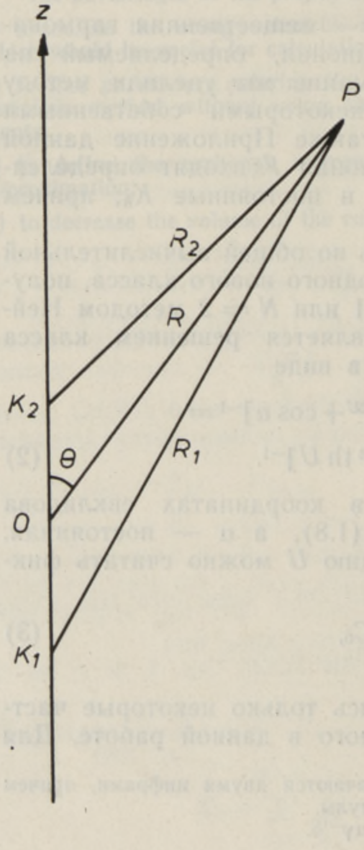
$$\chi \equiv \exp(-2i\alpha)\,\mathrm{th}\,U = \overset{[1]}{\chi}\eta + \overset{[2]}{\chi}\eta^2 + \ldots, \tag{5}$$

где в силу (4) имеем

$$\overset{[1]}{\chi} = \exp(-2i\overset{[0]}{\alpha})\overset{[1]}{U}, \quad \overset{[2]}{\chi} = \exp(-2i\overset{[0]}{\alpha})[\overset{[2]}{U} - 2i\overset{[1]}{\alpha}\overset{[1]}{U}]. \tag{6}$$

Тогда (2) получается в виде

$$\mathcal{E} = [1+\chi][1-\chi]^{-1} = 1 + 2\overset{[1]}{\chi}\eta + 2[\overset{[2]}{\chi} + (\overset{[1]}{\chi})^2]\eta^2 + \ldots \tag{7}$$



Отметим, что формулы (2) и (3) сами по себе также могут быть истолкованы как генерирующие новые решения. НР аспекты такой генерации, о которых можно теперь судить на основе и (6) и (7), более подробно изучались нами в [8].

НР предел как $\mathcal{E}$, так и $\mathcal{E}'$ получается в евклидовом $\overset{[0]}{V}_3$, где координаты определяются предельным видом метрической формы (1.8) 3-пространства V_3, т. е. пределом функции W (см. [2]). При задании функционала F в [2] мы пользовались согласно (2.П5) сферическими координатами в V_3, т. е. $W = R\sin\theta$. В этих координатах постоянные K_k, а также величины (2.П3) $Y_k(t_k, x) = RR_k^{-1}$, где $t_k = K_k R^{-1}$, $x = \cos\theta$, приобретают наглядный геометрический смысл (см. рис., где $N = 1$), причем имеют место формулы (1.34) — (1.37) и (2.П3), (2.П4). Без ограничения общности мы приняли в случае $N = 1$ $K_1 + K_2 = 0$, $K_2 - K_1 \equiv 2k$. Учитывая (2.П6), на основе формул (2.19) — (2.22) нетрудно убедиться в том, что в НР пределе k должно исчезать. Итак, полагаем

$$K_2-K_1\equiv 2k=2(\overset{[1]}{k}\eta+\overset{[2]}{k}\eta^2+\dots). \tag{8}$$

Случай $N=2$ будем рассматривать как суперпозицию двух случаев $N=1$ и согласно этому примем

$$K_3-K_2\equiv 2k=2\overset{[0]}{k}\neq 0,\quad K_2-K_1\equiv 2ks_1=2k[\overset{[1]}{s_1}\eta+\dots],$$

$$K_4-K_3\equiv 2ks_2=2k[\overset{[1]}{s_2}\eta+\dots]. \tag{9}$$

Надо иметь в виду, что в общем случае $W\neq\overset{[0]}{W}$, так что сферические координаты (R,θ) в V_3 отличаются от сферических координат (r,ϑ) в $\overset{[0]}{V_3}$. Ниже мы полагаем, что отличие (R,θ) от (r,ϑ) обусловлено только релятивистскими поправками. При рассмотрении пост-нерелятивистских эффектов это отличие, конечно, нужно учитывать. Но если нас интересует только НР предел решения, то в таком нулевом приближении R и r, θ и ϑ можно считать совпадающими, а разложения величин по степеням η — обусловленными только структурой постоянных параметров решения. (Отметим, что если в случае $N=1$, $\mathcal{E}=1$ в рамках изучаемого здесь метода получается решение Керра-НУТ, то в НР пределе в (r,ϑ) переходят именно координаты Бойера—Линдквиста, которые в V_3 представляют собой координаты вытянутого эллипсоида с фокусным расстоянием $2k$, заданным формулой (8)). Таким образом, в силу (8) отличие (r,ϑ) от сферических координат в V_3 действительно обусловлено только релятивистскими поправками.

3. Общий НР анализ функционала F, заданного формулой (2.П2) через величины B и Q, проведен в [2]. Из (2.19)—(2.22) вытекает, что НР предел характеризуется членами $\overset{[2]}{B}$ и $\overset{[1]}{B}$, $\overset{[1]}{Q}$ и $\overset{[0]}{Q}$ соответствующих разложений. С учетом (8) или (9) теперь из (2.П6) или (2.П7) следует, что эти члены в свою очередь определяются величинами $\overset{[1]}{\varkappa_k}$, $\overset{[0]}{\varkappa_k}$, $\overset{[2]}{t_{ik}}$, $\overset{[1]}{t_{ik}}$, $\overset{[1]}{Y_k}$, $\overset{[0]}{Y_k}$. Получение членов $\overset{[1]}{\varkappa_k}$ и $\overset{[0]}{\varkappa_k}$ разложений генерирующих потенциалов ниже рассматривается особо, а величины $\overset{[n]}{t_{ik}}=\overset{[n]}{t_i}-\overset{[n]}{t_k}=(\overset{[n]}{K_i}-\overset{[n]}{K_k})R^{-1}$ получаются из (8) или (9) непосредственно. Для случая $N=1$ имеем

$$\overset{[n]}{t_2}=-\overset{[n]}{t_1}=\overset{[n]}{t}\equiv\overset{[n]}{k}R^{-1}\quad(n\geqslant 1), \tag{10}$$

а для случая $N=2$ —

$$\overset{[0]}{t_4}=\overset{[0]}{t_3}=-\overset{[0]}{t_2}=-\overset{[0]}{t_1}=\overset{[0]}{t}\equiv kR^{-1},\quad \overset{[n]}{t_1}=-t\overset{[n]}{s_1},\quad \overset{[n]}{t_4}=t\overset{[n]}{s_2},\quad \overset{[n]}{t_2}=\overset{[n]}{t_3}=0\quad(n\geqslant 1). \tag{11}$$

Чтобы получить формулы для $\overset{[1]}{Y_k}$ и $\overset{[0]}{Y_k}$, будем исходить из (2.П3). Для случая $N=1$ получаются разложения

$$Y_1=Y^-\equiv Y(-t,x)=1-\overset{[1]}{Y}\eta+O(\eta^2),\quad Y_2=Y^+\equiv Y(t,x)=1+\overset{[1]}{Y}\eta+O(\eta^2), \tag{12}$$

а для случая $N=2$:

$$Y_1=\overset{[0]}{Y}{}^{-}+\overset{[1]}{Y}_1\eta+\ldots,\quad Y_2=\overset{[0]}{Y}{}^{-}\equiv Y(-t,x),\quad Y_3=\overset{[0]}{Y}{}^{+}\equiv Y(t,x),$$

$$Y_4=\overset{[0]}{Y}{}^{+}+\overset{[1]}{Y}_4\eta+\ldots \tag{13}$$

Поскольку, как легко убедиться, члены $\overset{[1]}{Y}_k$ существенны только в неньютоновом НР пределе, воздержимся здесь от более подробной записи этих величин. В данной работе мы ставим целью подробно выяснить при сделанных предположениях возможности получения ньютонова («обычного») НР предела и только в конце статьи обсудим в принципиальном плане неньютонов (вихревой) НР предел с приведением некоторых простых примеров.

Анализ генерирующих потенциалов $\varkappa_k$

1. Если исходное решение $\mathcal{E}$ статическое (в (2) имеем $\alpha=n\pi/2$), то генерирующие потенциалы $\varkappa_k$ задаются формулами (1.29). Определив без ограничения общности новые постоянные β_k, так что $p_k=\sin\beta_k$ и $q_k=\cos\beta_k$, получаем (1.29) в виде

$$\bar{\varkappa}_k\equiv(\varkappa_k)_{st}=\exp(-2i\beta_k)\,(1-\Xi_k^*)\,(1-\Xi_k)^{-1}, \tag{14}$$

где

$$\Xi_k\equiv\exp(-2i\beta_k)\,\mathrm{th}\,\Phi_k, \tag{15}$$

а функции Φ_k определяются на основе (1.30) или (1.33) (звездочка означает комплексное сопряжение).

Можно убедиться в том, что в общем случае ($\alpha\neq n\pi/2$) исходного решения $\mathcal{E}$ (2) уравнения (1.27) для генерирующих потенциалов $\varkappa_k$ удовлетворяются, если положить

$$\varkappa_k=\bar{\varkappa}_k\underset{\alpha}{\varkappa}{}^*, \tag{16}$$

где $k=0,1,\ldots,2N$ и

$$\underset{\alpha}{\varkappa}=\exp(-2i\alpha)\,(1-\chi^*)\,(1-\chi)^{-1}, \tag{17}$$

причем χ задана соотношением (5). Отметим, что (16) обобщает формулу, частный вид которой использован в [7].

2. Из уравнений (1.30) — (1.37) следует, что если имеют место (4) и (8) или (9), то для Φ_k получаем разложение типа

$$\Phi_k=\overset{[1]}{\Phi}_k\eta+\overset{[2]}{\Phi}_k\eta^2+\ldots, \tag{18}$$

где $\overset{[1]}{\Phi}_k$ определяется соответствующим $\overset{[1]}{U}$, член $\overset{[2]}{\Phi}$ через $\overset{[2]}{U}$ и $\overset{[1]}{U}$, и т. д. Если исходный потенциал U задан формулой (1.38) в виде мультипольного разложения, то Φ_k получается в виде (1.41).

3. Поскольку при сделанных нами общих предположениях $\varkappa_k$ должны иметь вид (2.23): $\varkappa_k=\overset{[0]}{\varkappa}_k+\overset{[1]}{\varkappa}_k\eta+\ldots$, то и для постоянных β_k получаем

$$\beta_k=\overset{[0]}{\beta}_k+\overset{[1]}{\beta}_k\eta+\ldots \tag{19}$$

С учетом (4) и (19) из формул (14) — (17) следует

$$\varkappa_k = \overset{[0]}{\varkappa}_k [1 + 2i \overset{[1]}{v}_k \eta + \ldots], \tag{20}$$

где для комплексных $\overset{[0]}{\varkappa}_k$ и вещественных $\overset{[1]}{v}_k$ имеем

$$\overset{[0]}{\varkappa}_k = \exp[2i(\overset{[0]}{\alpha} - \overset{[0]}{\beta}_k)], \tag{21}$$

$$\overset{[1]}{v}_k = \overset{[1]}{U} \sin 2\overset{[0]}{\alpha} - \overset{[1]}{\Phi}_k \sin 2\overset{[0]}{\beta}_k + \overset{[1]}{\alpha} - \overset{[1]}{\beta}_k. \tag{22}$$

Для дальнейших вычислений нужны также следующие формулы:

$$(\overset{[0]}{\varkappa}_0 - 1)(\overset{[0]}{\varkappa}_i - \overset{[0]}{\varkappa}_k)^{-1} = \overset{[0]}{A}_{ik} \exp(i \overset{[0]}{\delta}_{ik}), \tag{23}$$

$$\overset{(1)}{\varkappa}_0 (\overset{[0]}{\varkappa}_i - \overset{[0]}{\varkappa}_k)^{-1} = \overset{[1]}{A}_{ik} \exp(i \overset{[0]}{\gamma}_{ik}), \tag{24}$$

где для вещественных величин $\overset{[0]}{\delta}_{ik}$, $\overset{[0]}{A}_{ik}$, $\overset{[0]}{\gamma}_{ik}$, $\overset{[1]}{A}_{ik}$ имеем

$$\overset{[0]}{\delta}_{ik} \equiv \overset{[0]}{\beta}_k + \overset{[0]}{\beta}_i - \overset{[0]}{\beta}_0 - \overset{[0]}{\alpha}, \quad \overset{[0]}{A}_{ik} \equiv \sin(\overset{[0]}{\alpha} - \overset{[0]}{\beta}_0)[\sin(\overset{[0]}{\beta}_k - \overset{[0]}{\beta}_i)]^{-1}, \tag{25}$$

$$\overset{[0]}{\gamma}_{ik} \equiv \overset{[0]}{\beta}_k + \overset{[0]}{\beta}_i - 2\overset{[0]}{\beta}_0, \quad \overset{[1]}{A}_{ik} \equiv \overset{[1]}{v}_0 [\sin(\overset{[0]}{\beta}_k - \overset{[0]}{\beta}_i)]^{-1}. \tag{26}$$

4. Теперь, учитывая конкретные результаты для членов разложений величин t_k (10)—(11), Y_i (12)—(13) и $\varkappa_k$ (20), можем установить конкретный вид членов $\overset{[1]}{F}$ и $\overset{[2]}{F}$ разложения функционала F, т. е. конкретный вид формул (2.20). По формуле (2.17) эти члены вместе с $\overset{[1]}{\mathcal{E}}$ и $\overset{[2]}{\mathcal{E}}$, получаемыми из (7), определяют потенциалы НР гравитационного поля, соответствующего генерируемому решению.

Ньютонов предел

1. Пусть как исходное, так и генерируемое решение имеют ньютонов предел, т. е. $\overset{[1]}{\mathcal{E}}{}' = 0$, а также $\overset{[1]}{\mathcal{E}} = 0$ в (7). Теперь в силу (6) выполняется $\overset{[1]}{U} = 0$, а также $\overset{[1]}{\Phi}_k = 0$ в (18); следовательно, из (20) и (22) получается

$$\overset{[1]}{\varkappa}_k = 2i \overset{[0]}{\varkappa}_k (\overset{[1]}{\alpha} - \overset{[1]}{\beta}_k) = \text{const}. \tag{27}$$

Из (2.16) — (2.17) следует, что должна исчезать величина $\overset{[1]}{F}$, т. е. с учетом (2.20) — (2.21) имеем

$$\overset{[1]}{F} \equiv (\overset{[0]}{\varkappa}_0 - 1)(\overset{[0]}{Q})^{-1} \overset{[1]}{B} = 0. \tag{28}$$

Этому условию можно удовлетворить, положив либо

$$\overset{[0]}{\varkappa}_0 = 1, \tag{29}$$

либо

$$\overset{[0]}{\varkappa}_0 \neq 1, \quad \overset{[1]}{B} = 0. \tag{30}$$

Если имеет место (29), то из (2.20) — (2.21) получается

$$\overset{[2]}{F}=\overset{[1]}{\varkappa_0}(\overset{[0]}{Q})^{-1}\overset{[1]}{B}, \tag{31}$$

а если (30), то

$$\overset{[2]}{F}=(\overset{[0]}{\varkappa_0}-1)(\overset{[0]}{Q})^{-1}\overset{[2]}{B}. \tag{32}$$

В случае $N=1$ с учетом полученных конкретных разложений для t_{ik}, Y_k и $\varkappa_k$ из (2.П6) следует

$$\overset{[0]}{Q}=\overset{[0]}{\varkappa_2}-\overset{[0]}{\varkappa_1}, \tag{33}$$

$$\overset{[n]}{B}=2\overset{[n]}{k}R^{-1}, \tag{34}$$

а в случае $N=2$, исправив ошибку в знаке выражения для Q (см. Приложение данной работы), из (2.П7) получаем

$$\overset{[0]}{Q}=4l^2Y^-Y^+(\overset{[0]}{\varkappa_2}-\overset{[0]}{\varkappa_1})(\overset{[0]}{\varkappa_4}-\overset{[0]}{\varkappa_3}), \tag{35}$$

$$\overset{[n]}{B}=8l^3Y^-Y^+[Y^+\overset{[n]}{s_2}(\overset{[0]}{\varkappa_2}-\overset{[0]}{\varkappa_1})+Y^-\overset{[n]}{s_1}(\overset{[0]}{\varkappa_4}-\overset{[0]}{\varkappa_3})]. \tag{36}$$

Формулы (34) и (36) имеют всегда место при $n=1$. Но из них также следует, что условие (30) требует обязательно либо $\overset{[1]}{k}=0$ (в случае $N=1$), либо $\overset{[1]}{s_1}=\overset{[1]}{s_2}=0$ (в случае $N=2$). При таких условиях из (2.П6) или (2.П7) для $\overset{[2]}{B}$ получаются такие же выражения, какие мы уже имеем в (34) или (36), только теперь там нужно принять $n=2$.

Итак, видим, что с учетом (23) — (26) и (33) — (36) формулы (31) и (32) имеют по существу один и тот же физический смысл. В случае $N=1$ получается

$$\overset{[2]}{F}=\overset{[2]}{C}R^{-1}, \tag{37}$$

где постоянный параметр имеет вид

$$\overset{[2]}{C}=2\overset{[1]}{k}\overset{[1]}{A_{21}}\exp(i\overset{[0]}{\gamma_{21}}) \tag{38}$$

или

$$\overset{[2]}{C}=2\overset{[2]}{k}\overset{[0]}{A_{21}}\exp(i\overset{[0]}{\delta_{21}}). \tag{39}$$

В случае $N=2$ имеем

$$\overset{[2]}{F}=\overset{[2]}{C_{21}}Y^-R^{-1}+\overset{[2]}{C_{43}}Y^+R^{-1}, \tag{40}$$

где либо

$$\overset{[2]}{C_{ij}}=2\overset{[1]}{k_{ij}}\overset{[1]}{A_{ij}}\exp[i\overset{[0]}{\gamma_{ij}}],\quad \overset{[1]}{k_{21}}=\overset{[1]}{k}s_1,\quad \overset{[1]}{k_{43}}=\overset{[1]}{k}s_2, \tag{41}$$

либо

$$\overset{[2]}{C_{ij}}=2\overset{[2]}{k_{ij}}\overset{[0]}{A_{ij}}\exp[i\overset{[0]}{\delta_{ij}}],\quad \overset{[2]}{k_{21}}=\overset{[2]}{k}s_1,\quad \overset{[2]}{k_{43}}=\overset{[2]}{k}s_2. \tag{42}$$

В итоге с учетом (7) для генерируемого решения $\mathcal{E}'$ получаем

$$\overset{[2]}{\mathcal{E}'}=\overset{[2]}{F}+2\overset{[2]}{U}\exp(-2i\overset{[0]}{\alpha}), \tag{43}$$

где $\overset{[2]}{F}$ дается в виде (37) или (40).

2. Из формулы (43) следует, что в ньютоновом пределе изучаемому здесь классу решений соответствует поле одной или двух точечных масс, которое линейно накладывается на предельное поле, соответствующее исходному решению. При этом постоянным $\mathrm{Re}\,\overset{[2]}{C}$ или $\mathrm{Re}\,\overset{[2]}{C}_{ij}$ нужно, очевидно, придать смысл величин, пропорциональных параметру массы, а $\overset{[2]}{U}$ является произвольной потенциальной функцией. Из (37) или (40) видим, что эти параметры массы определяются комбинацией нескольких параметров $\overset{[0]}{\beta}_k$, $\overset{[0]}{\alpha}$ решения. При фиксированных $\overset{[2]}{C}$ и $\overset{[2]}{C}_{ij}$ различный выбор этих параметров $\overset{[0]}{\beta}_k$, $\overset{[0]}{\alpha}$ к различным физическим следствиям на НР уровне не приводит. Однако отметим, что, например, в случае ньютонова предела решения Керра-НУТ ($N=1$, $\overset{[0]}{\mathcal{E}}=1$, поэтому и $\alpha=0$) параметры $k=\overset{[2]}{k}\eta^2$, $\beta_1+\beta_2=\overset{[0]}{\beta}_1+\overset{[0]}{\beta}_2=\delta_{21}+(\pi/2)$ и $\beta_1-\beta_2=\overset{[0]}{\beta}_1-\overset{[0]}{\beta}_2=(\pi/2)-\varphi$, вместе взятые при $\beta_0=\pi/2\,(\varkappa_0=\overset{[0]}{\varkappa}_0=-1)$; определяют фактически не только параметр массы $\mu\equiv-\dfrac{1}{2}\overset{[2]}{C}\eta^2=$ $=\overset{[2]}{k}\cos\delta_{21}[\cos\varphi]^{-1}\eta^2$, но и параметр Керра $a=\overset{[2]}{k}(\tan\varphi)\eta^2$ и параметр НУТ $l=-\overset{[2]}{k}\sin\delta_{21}[\cos\varphi]^{-1}\eta^2$ (ср. также с [5]), а эти параметры в данном случае описывают уже чисто релятивистские эффекты.

Поскольку требование, чтобы $\mathrm{Im}\,\overset{[2]}{F}$, определяющая первую релятивистскую поправку твист-потенциала $\mathrm{Im}\,\mathcal{E}'=\Psi'$, не содержала члена типа $1/R$ (т. е. чтобы поле было асимптотически плоское; см., напр., [5, 6]), вполне естественно, то существенным следствием из полученных формул являются условия $\mathrm{Im}\,\overset{[2]}{C}=0$ или $\mathrm{Im}\,\overset{[2]}{C}_{ik}=0$, т. е. либо

$$\overset{[0]}{\gamma}_{ik}\equiv\overset{[0]}{\beta}_k+\overset{[0]}{\beta}_i-2\overset{[0]}{\beta}_0=n\pi, \tag{44}$$

либо

$$\overset{[0]}{\delta}_{ik}\equiv\overset{[0]}{\beta}_k+\overset{[0]}{\beta}_i-\overset{[0]}{\beta}_0-\overset{[0]}{\alpha}=n\pi, \tag{45}$$

где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$. В случае решения Керра-НУТ (45) означает, что $\beta_1+\beta_2=\pi/2$, т. е. НУТ параметр l исчезает.

Кроме того, видно, что если не учитывать наличие $\overset{[0]}{\alpha}$ в выражении для $\overset{[0]}{\delta}_{ik}$ (а «влияние» этой постоянной, по-видимому, несущественно), то конкретный вид исходного решения при определении функционала F в ньютоновом пределе роли не играет. Но, с другой стороны, получение суперпозиции типа (43), где $\mathrm{Re}\,\overset{[2]}{F}\sim O(1/R)$, позволяет по-новому подойти к значению исходного решения. Теперь физический интерес представляют и те решения, при которых $\overset{[2]}{U}\sim O(R^{-2})$ и $\overset{[0]}{\alpha}\neq n\pi/2$ (в исходном решении сам по себе этот случай дал бы отсутствие члена массы типа $1/R$ в $\mathrm{Re}\,\mathcal{E}\equiv\lambda$).

О нерелятивистском вихревом пределе

Релятивистская теория гравитации допускает также неньютонов НР предел [10]. Такой предел имеют решения уравнений Эйнштейна, в случае которых вихревая природа поля сохраняется при «выключении» релятивистских эффектов. Как показано в [9, 11], множество точных релятивистских решений с такими свойствами не пусто. Но известные до сих пор точные решения такого типа имеют тот существенный недостаток, что в НР пределе их ньютонов и вихревой потенциалы не являются функционально независимыми. Это обстоятельство приводит к появлению нитеобразной (полубесконечной) сингулярности НР поля, аналогичной сингулярности магнитного монополя, а здесь обусловленной наличием уже на НР уровне т. н. вихревого гравитационного монополя. Рассмотренным в данной работе методом можно генерировать и такие «плохие» вихревые решения. Например, при $\overset{[0]}{\alpha}=(2n+1)\pi/4$ и $\overset{[1]}{U}\neq 0$ уже само преобразование (6) — (7) $U\to\mathcal{E}$ дает такой результат [8] (при этом за исходное нужно взять «нефизическое» («промежуточное») решение, получаемое из «физического» с помощью (3)). Если положить $N=1$, $\mathcal{E}=1$, то «плохое» вихревое решение можно получить в предположении, что в (10) имеет место $\overset{[1]}{t}\neq 0$ и $\overset{[1]}{F}\equiv(\varkappa-1)(\overset{[0]}{Q})^{-1}\overset{[1]}{B}=\mathrm{Im}\,\overset{[1]}{F}\neq 0$ (по существу получается здесь решение Керра-НУТ с неньютоновым пределом; см. также [9, 11]).

Подчеркнем теперь, что рассмотренный в данной работе метод открывает также возможности генерации более «хороших» вихревых решений, т. е. таких, которые обладают «компактными» сингулярностями. Как показывают предварительные вычисления, в такой перспективе может представлять интерес решение, данное в [6], т. е. случай $N=2$, $\mathcal{E}=1$, если в (9) положить $\overset{[1]}{s}_1\neq 0$ и $\overset{[1]}{s}_2\neq 0$ и подходящим образом выбрать параметры решения (будем иметь в НР пределе систему двух вихревых монополей, объединяемых сингулярным отрезком).

Если пользоваться еще более сложными исходными решениями $\mathcal{E}$ вида (2), то возможности получения различных новых решений с неньютоновым пределом сильно возрастают. Например, можно получить «хорошее» вихревое решение, если в случае $N=1$ положить $\overset{[1]}{t}=0$, $\overset{[2]}{t}\neq 0$ в (10), а в исходном решении (2) взять

$$\overset{[0]}{\alpha}=-\pi/4,\qquad U=\overset{[1]}{U}\eta=\overset{[1]}{a}_1\cos\theta R^{-2}\eta, \tag{46}$$

т. е. дипольный член мультипольного разложения (1.38). Поскольку при сделанных предположениях в силу (2.П6) имеем $\overset{[1]}{B}=0$, то из (2.20) получается $\overset{[1]}{F}=0$, а $\overset{[2]}{F}$ дается формулой (37), причем должно выполняться и соотношение (45). Из (6) и (7) следует

$$\mathcal{E}=1+2i\overset{[1]}{U}\eta+2[2\overset{[1]}{\alpha}\overset{[1]}{U}-(\overset{[1]}{U})^2]\eta^2+\dots . \tag{47}$$

Таким образом, в силу (2.17) функционально независимые вихревой и ньютонов потенциалы НР гравитационного поля даются соответственно формулами (см. [8, 9])

$$\psi'=\frac{1}{2}\overset{[1]}{\Psi}{}'=\overset{[1]}{U},\qquad \Phi'=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\overset{[2]}{\mathcal{E}}{}'+(\psi')^2=\frac{1}{2}CR^{-1}+2\overset{[1]}{\alpha}\overset{[1]}{U}. \tag{48}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

В [2] дан функционал F для метода Нейгебауэра в виде (2.П2):

$$F=(Q+\varkappa_0 B)(Q+B)^{-1}. \qquad (\text{П}1)$$

Этот вид является совершенно общим, но, как легко видеть, Q и B определяются здесь с точностью до определенного общего множителя (фактически существенна величина (2.19) $M=BQ^{-1}$). Поэтому в конкретных вычислениях полезными могут оказаться некоторые разновидности выражений для B и Q. Например, для случая $N=1$ их можно задать в виде

$$Q'=Q_{21}, \quad B'=K_{21} \qquad (\text{П}2)$$

для случая $N=2$ — в виде

$$\begin{aligned} Q'&=K_{32}K_{41}Q_{21}Q_{43}-K_{21}K_{43}Q_{32}Q_{41}, \\ B'&=K_{32}K_{41}(Q_{21}K_{43}+Q_{43}K_{21})-K_{21}K_{43}(Q_{41}K_{32}+Q_{32}K_{41}). \end{aligned} \qquad (\text{П}3)$$

Здесь

$$K_{ik}\equiv K_i-K_k, \quad Q_{ik}\equiv(\varkappa_i R_i-\varkappa_k R_k)=R(\varkappa_i Y_i^{-1}-\varkappa_k Y_k^{-1}). \qquad (\text{П}4)$$

Если в (П2) как Q', так и B' умножить на $Y_1Y_2R^{-1}$, а в (П3) — на $Y_1Y_2Y_3Y_4R^{-4}$, то получаются величины Q и B работы [2] и соответственно формулы (2.П6) и (2.П7), причем в (2.П7) была допущена ошибка — величина Q взята там с обратным знаком.

Подчеркнем, что по сравнению с формулами (2.П6) и (2.П7) данный здесь вид (П2) и (П3) для B и Q является более подходящим при переходе к вычислению гравитационных эффектов на пост-нерелятивистском уровне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппель А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 4, 364—372 (1980).
2. Коппель А., Лембер Т., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 29, № 4, 373—381 (1980).
3. Neugebauer, G., J. Phys. A: Math. Gen., 13, № 5, 1737—1740 (1980).
4. Neugebauer, G., J. Phys, A: Math. Gen., 13, № 2, L19—L21 (1980).
5. Neugebauer, G., Kramer, D., Exp. Techn. Phys., 28, № 1, 3—8 (1980).
6. Kramer, D., Neugebauer, G., Phys. Lett. A., 75, № 4, 259—261 (1980).
7. Kramer, D., In: Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups. 9th International Conference on General Relativity and Gravitation, July 14—19, 1980, FSU, Jena, GDR, 1980, 1, p. 42—43.
8. Коппель А. А., Лембер Т. Р., Изв. ВУЗов СССР, Физика, 23, № 7, 55—60 (1980).
9. Коппель А. А., Изв. ВУЗов СССР, Физика, 18, № 9, 29—34 (1975).
10. Керес Х., Ж. эксперим. и теор. физ., 48, вып. 5, 1319—1327 (1965).
11. Koppel, A., Preprint FI-34, Tartu, 1974.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 22/VI 1981

A. KOPPEL

EINSTEINI VÕRRANDITE AKSIAALSÜMMEETRILISTE STATSIONAARSETE LAHENDITE UUE KLASSI MITTERELATIVISTLIKUD PIIRJUHUD

On uuritud mitterelativistlikke piirvälju Einsteini võrrandite lahendite klassi puhul, mis on saadud töödes [3,4] arendatud meetodiga juhtudel $N=1$ või $N=2$ ja eeldusel, et lähtelahend kuulub Papapetrou-Ehlersi klassi või on erijuhtudel staatiline või tasasele aegruumile vastav. Analüüsi aluseks on artiklis [2] esitatud arvutusskeem. On leitud valemid (37), (40), (43), mis määravad gravitatsioonivälja potentsiaali njuutonlikul piirjuhul ja on ühised kogu uuritavale lahendite klassile. On näidatud võimalusi Einsteini võrrandite uute täpsete lahendite saamiseks, millel on mittenjuutonlik (pööriseline) piirjuht ja mis seejuures on vabad magnetmonopoli tüüpi singulaarsusest. Konkreetne näide illustreerib, kuidas konstrueerida relativistlikku täpset lahendit, mida iseloomustab piirjuhul üheaegselt nii njuutonlik punktmassi potentsiaal kui ka pööriseline dipoolpotentsiaal, kusjuures neid määravad sõltumatud parameetrid (vt. valem (48)).

A. KOPPEL

NON-RELATIVISTIC LIMITS OF A NEW CLASS OF AXIALLY SYMMETRIC STATIONARY SOLUTIONS OF EINSTEIN'S EQUATIONS

If the initial solutions (2) belong to the Papapetrou-Ehlers class, in general, or are static, or correspond to flat space-time, in particular cases, a new class of solutions obtained by Neugebauer's generation method (formulae (1), (П1)), in cases $N=1$, or $N=2$, has been studied in the non-relativistic limit. The analysis is based on the method and calculation scheme elaborated in [2]. For the given initial class a general formula (16) of the Neugebauer's generating potentials $\alpha_k \equiv \varkappa_k$ is derived. Characteristic quantities and parameters of the new class of solutions are being analyzed in detail, an attempt is made to clarify their role and physical meaning in the non-relativistic limit. Formulae (37), (40), (43), valid for the whole class and determining the gravitational field in the Newtonian limit, are established. There are possibilities of obtaining new exact solutions of Einstein's equations having non-Newtonian (vortex) limit, and, at the same time, being free from the singularities of the magnetic monopole type. An example illustrates how to construct an exact relativistic solution having non-relativistic limit described by the Newtonian potential of a point mass as well as a vortex dipole potential, the two potentials being determined by independent parameters (formula (48)).