EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 31. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1982, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 31
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1982, № 1

УДК 518.12 : 517.958 : 523

Ю. КНЯЗИХИН

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ОДНОРОДНОЙ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АНИЗОТРОПНО РАССЕИВАЮЩЕЙ АТМОСФЕРЕ. 1

(Представил Г. Кузмин)

Метод дискретных ординат основан на замене интегрального члена уравнения переноса излучения какой-либо квадратурной формулой. Благодаря этому интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения приближенно заменяется системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В [1–3] этот метод исследован для решения уравнения переноса излучения при изотропном рассеянии. При решении методом дискретных ординат задачи об анизотропном рассеянии система дифференциальных уравнений имеет большую размерность. В настоящей работе показано, что при специальном выборе квадратурных формул матрица коэффициентов системы дифференциальных уравнений естественным образом разбивается на блоки, которые коммутируют между собой, легко приводятся при помощи унитарного преобразования, не зависящего от конкретного блока, к диагональному виду и, следовательно, легко обращаются.

1. Дискретизация уравнения переноса излучения

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения в однородной анизотропной плоскопараллельной атмосфере, освещенной параллельными солнечными лучами [4]

$$\mu\frac{dI(\tau,\mu,\varphi)}{d\tau}=-I(\tau,\mu,\varphi)+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}g(\gamma)I(\tau,\mu',\varphi')\,d\varphi'\,d\mu'+$$

$$+\frac{\lambda c_0}{4\pi}g(\gamma')\exp(\sigma\tau), \tag{1}$$

$$I(0,\mu,\varphi)=0\quad(0<\mu\leqslant 1),\qquad I(H,\mu,\varphi)=0\quad(-1\leqslant\mu<0). \tag{2}$$

Здесь λ — вероятность выживания фотона при элементарном акте рассеяния; $c_0=\pi S$ — солнечная постоянная; H — оптическая толщина атмосферы; $g(\gamma)\geqslant 0$ — индикатриса рассеяния, нормированная условием

$$(4\pi)^{-1}\int\limits_\omega g(\gamma)\,d\omega=(4\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}g(\gamma)\,d\varphi\,d\mu=1,\qquad \gamma\in[0,\pi], \tag{3}$$

$$\cos(\gamma)=\mu\mu'+\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)}\cos(\varphi-\varphi'), \tag{4}$$

$$\cos(\gamma')=\mu\mu_0+\sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu_0^2)}\cos(\varphi-\varphi_0),$$

$(-\arccos\mu_0, \varphi_0)$ — направление солнечных лучей в сферической системе координат с полярной осью, идущей в сторону растущих оптических глубин; $\sigma=-1/\mu_0$. Решение этого уравнения $I(\tau, \mu, \varphi)$ дает интенсивность многократно рассеянного солнечного излучения на оптической глубине τ в направлении, которое определяется полярным расстоянием $\arccos\mu$ и азимутом φ.

Заменим интегральный член в уравнении (1) некоторыми квадратурными формулами

$$\int_0^{2\pi}\xi(\varphi)\,d\varphi\approx\sum_{m=1}^{p}\beta_m\xi(\varphi_m),\ 0<\varphi_1<\ldots<\varphi_p\leqslant 2\pi,\ \sum_{m=1}^{p}\beta_m=2\pi, \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{1}\zeta(\mu)\,d\mu\approx\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\zeta(\mu_i)+\zeta(-\mu_i)),\ 0<\mu_1<\ldots<\mu_n\leqslant 1,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1.$$

Отсюда интегральное уравнение (1) заменяется системой линейных дифференциальных уравнений

$$\mu_s\frac{dI_{sm}(\tau)}{d\tau}=-I_{sm}(\tau)+\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}g_{ilsm}I_{il}(\tau)\alpha_i\beta_l+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}g_{-ilsm}I_{-il}(\tau)\alpha_i\beta_l+\exp(\sigma\tau)u_{sm},$$

$$s=\pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n;\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ \mu_{-i}=-\mu_i, \tag{6}$$

в которой, учитывая (4), мы положим

$$g_{\pm ilsm}=g(\gamma_{\pm ilsm}),\qquad u_{sm}=\lambda c_0 g(\gamma'_{sm})/4\pi,$$

$$\cos(\gamma_{\pm ilsm})=\pm\mu_s\mu_i+\sqrt{(1-\mu_s^2)(1-\mu_i^2)}\cos(\varphi_m-\varphi_l),$$

$$\cos(\gamma'_{sm})=\mu_s\mu_0+\sqrt{(1-\mu_s^2)(1-\mu_0^2)}\cos(\varphi_m-\varphi_0);\quad \gamma_{ilsm},\gamma'_{sm}\in[0,\pi].$$

Согласно (2), запишем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (6):

$$I_{im}(0)=I_{-im}(H)=0,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ m=1,\ 2,\ \ldots,\ p. \tag{7}$$

Делая в случае необходимости перенормировку, положим

$$(4\pi)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}(g_{ilsm}+g_{-ilsm})\alpha_i\beta_l=1,$$

$$s=\pm1,\ \pm2,\ \ldots,\ \pm n;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ p. \tag{8}$$

Последнее выражение является по существу дискретным аналогом условия (3).

В настоящей работе будем исследовать систему дифференциальных уравнений (6) с условиями (7) и (8).

2. Существование и единственность решения дискретизированного уравнения переноса излучения

Для доказательства существования решения дискретизированного уравнения переноса излучения преобразуем задачу (6)—(8) в интегральное уравнение II рода. К полученному уравнению применим теорему Банаха о единственности решения операторных уравнений II рода. Положим

$$y_{sm}(\tau)=(\lambda/4\pi)\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}\left(g_{ilsm}I_{il}(\tau)+g_{-ilsm}I_{-il}(\tau)\right)\alpha_i\beta_l. \tag{9}$$

Решая систему дифференциальных уравнений (6) относительно $I_{sm}(\tau)$, получим

$$I_{im}(\tau)=\int_0^{\tau}y_{im}(\tau')\exp\left(-(\tau-\tau')/\mu_i\right)\frac{d\tau'}{\mu_i},$$

$$i=1,2,\ldots,n;\quad m=1,2,\ldots,p,$$

$$I_{im}(\tau)=-\int_{\tau}^{H}y_{im}(\tau')\exp\left(-(\tau-\tau')/\mu_i\right)\frac{d\tau'}{\mu_i},\quad i=-1,-2,\ldots,-n. \tag{10}$$

Подставив найденное выражение в (9), получим систему интегральных уравнений

$$y_{sm}(\tau)=\int_0^{\tau}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}(\lambda\alpha_i\beta_l(4\pi\mu_i)^{-1}g_{ilsm})\exp\left(-(\tau-\tau')/\mu_i\right)y_{il}(\tau')\,d\tau'+$$
$$+\int_{\tau}^{H}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}(\lambda\alpha_i\beta_l(4\pi\mu_i)^{-1}g_{-ilsm})\exp\left((\tau-\tau')/\mu_i\right)y_{-il}(\tau')\,d\tau'+$$
$$+\exp(\sigma\tau)u_{sm},\quad s=\pm1,\pm2,\ldots,\pm n;\quad m=1,2,\ldots,p. \tag{11}$$

Отметим, что задача (6)—(8) и система (11) эквивалентны в том смысле, что если функции $I_{sm}(\tau)$ являются решением задачи (6)—(8), то $y_{sm}(\tau)$, определенные выражением (9), удовлетворяют системе (11) и, наоборот, если $y_{sm}(\tau)$ являются решением системы (11), то функции $I_{sm}(\tau)$, определенные формулами (10), являются решением задачи (6)—(8).

Рассмотрим систему интегральных уравнений (11) как операторное уравнение II рода в пространстве с нормой

$$\|y\|=\max_{1\leqslant m\leqslant p}\ \max_{\substack{-n\leqslant s\leqslant n\\ s\neq 0}}\ \max_{0\leqslant\tau\leqslant H}|y_{sm}(\tau)|.$$

Тогда норма оператора K, где сумма интегральных членов в выражении (11) описывается символом Ky, удовлетворяет неравенству [5]

$$\|K\|<\lambda\leqslant 1.$$

Отсюда система интегральных уравнений (11), а следовательно, и задача (6)—(8) имеют единственное решение.

3. Матричная запись дискретизированного уравнения переноса излучения

Пусть I_n — единичная матрица размерности $n\times n$, e_j^n — вектор-столбец длины n, у которого на j-м месте стоит единица, а на остальных нули; $\otimes$ — символ кронекеровского произведения матриц ([6], с. 259); δ_{ij} — символ Кронекера; $(c_{ij})_{ij}$ — матрица с элементами* c_{ij}; $(c_j)_j$ — вектор-столбец с элементами c_j. Положим**

* i-я строка этой матрицы есть $(c_{i1}c_{i2}\ldots c_{in})$.

** Ниже подразумевается следующее изменение индексов: $i,j=1,2,\ldots,n$; $k,s=\pm1,\pm2,\ldots,\pm n$; $m,l=1,2,\ldots,p$.

$$\alpha = ((\lambda/2)\,\alpha_i \delta_{ij})_{ij}, \qquad \gamma_m = \beta_m/2\pi, \qquad \Gamma = (\delta_{ml}\gamma_l)_{ml},$$

$$\Pi = I_2 \otimes \alpha \otimes \Gamma, \qquad W_{ks} = (g_{slkm})_{ml}, \qquad V_1 = (W_{ij})_{ij}, \qquad V_2 = (W_{-ij})_{ij},$$

$$W = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & V_1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} I_{np} & 0 \\ 0 & -I_{np} \end{pmatrix}, \qquad b = (\delta_{ij} b_j)_{ij},$$

$$\mathrm{B} = I_2 \otimes b \otimes I_p, \qquad I_s(\tau) = (I_{sm}(\tau))_m, \qquad u_s = (u_{sm})_m,$$

$$x(\tau) = (I_i(\tau))_i, \qquad y(\tau) = (I_{-i}(\tau))_i, \qquad f_1 = (u_i)_i, \qquad f_2 = (u_{-i})_i,$$

$$v(\tau) = e_1^2 \otimes x(\tau) + e_2^2 \otimes y(\tau), \qquad f = e_1^2 \otimes f_1 + e_2^2 \otimes f_2.$$

Отметим некоторые свойства g_{ilsm}, которые следуют из определения индикатрисы рассеяния (4)

$$g_{ilsm} = g_{-il(-s)m}, \qquad g_{-ilsm} = g_{il(-s)m}, \tag{12}$$

$$g_{ilsm} = g_{slim} = g_{smil}. \tag{13}$$

Учитывая эти свойства и введенные в этом разделе обозначения, запишем задачу (6) — (8) в виде

$$\mu_s \frac{dI_s(\tau)}{d\tau} = -I_s(\tau) + \sum_{j=1}^{n} W_{sj}(\lambda\alpha_j/2)\,\Gamma I_j(\tau) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} W_{-sj}(\lambda\alpha_j/2)\,\Gamma I_{-j}(\tau) + \exp(\sigma\tau)\,u_s,$$

$$s = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n,$$

$$I_j(0) = I_{-j}(H) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Умножив s-ю строку этой системы на $b_s = 1/\mu_s$, получим

$$x'(\tau) = \mathcal{B}(V_1\Pi_1 - I_{np})\,x(\tau) + \mathcal{B}V_2\Pi_1 y(\tau) + \exp(\sigma\tau)\,\mathcal{B}f_1,$$

$$y'(\tau) = -\mathcal{B}(V_1\Pi_1 - I_{np})\,y(\tau) - \mathcal{B}V_2\Pi_1 x(\tau) - \exp(\sigma\tau)\,\mathcal{B}f_2,$$

$$x(0) = y(H) = 0, \tag{15}$$

где $\mathcal{B} = b \otimes I_p$, $\Pi_1 = \alpha \otimes \Gamma$.

Кроме того, будем использовать еще одну запись задачи (6) — (8):

$$v' = Rv + \mathrm{B}Ef\exp(\sigma\tau), \qquad R = \mathrm{B}E(W\Pi - I_{2np}),$$

$$x(0) = y(H) = 0. \tag{16}$$

4. Собственные значения и собственные векторы матрицы коэффициентов системы дифференциальных уравнений (16)

Рассмотрим случай $0 \leqslant \lambda < 1$.

Теорема. *Матрица $R = \mathrm{B}E(W\Pi - I_{2np})$ обладает следующими свойствами:*

1. *Собственные значения матрицы R вещественны;*
2. *Матрица R подобна диагональной матрице, состоящей из собственных значений матрицы R;*
3. *Если μ есть собственное значение матрицы R, то $-\mu$ является также собственным значением матрицы R;*
4. *Если $z = e_1{}^2 \otimes \vartheta_1 + e_2{}^2 \otimes \vartheta_2$ есть собственный вектор матрицы R,*

то $\hat{z} = e_1^2 \otimes \vartheta_2 + e_2^2 \otimes \vartheta_1$ *также является собственным вектором матрицы* $R(\vartheta_1, \vartheta_2 \in R^{np})$.

Для доказательства первых двух свойств нам потребуется следующая

Лемма. *Всякое собственное значение* μ *матрицы* $(W\Pi - I_{2np})$ *удовлетворяет неравенству*

$$-\lambda - 1 \leqslant \mu \leqslant \lambda - 1. \tag{17}$$

Доказательство леммы. Из (13) следует, что матрица W симметрична. Далее, матрица $W\Pi$ является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$(x, y)_\Pi = (\Pi x, y). \tag{18}$$

Отсюда, по теореме Данфорда ([7], с. 456), спектр матрицы $(W\Pi - I_{2np})$ есть

$$\{\mu - 1 \mid \mu \in \text{спектр}(W\Pi)\}.$$

Собственные значения η матрицы $W\Pi$ удовлетворяют неравенству

$$|\eta| \leqslant \|W\Pi\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ — некоторая норма. Если положим

$$\|A\|_1 = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij})_{ij},$$

то, учитывая (8) и то, что $g(\gamma) \geqslant 0$, получим

$$|\eta| = \max_{\substack{-n \leqslant s \leqslant n \\ s \neq 0}} \max_{1 \leqslant m \leqslant p} (\lambda/4\pi) \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (g_{ilsm} + g_{-ilsm}) \alpha_i \beta_l = \lambda.$$

Последнее доказывает лемму.

Доказательство теоремы. При $0 \leqslant \lambda < 1$ матрицу $(W\Pi - I_{2np})$ можно рассматривать как отрицательно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве со скалярным произведением (18). Отсюда и матрица R является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle = -((W\Pi - I_{2np})x, y)_\Pi. \tag{19}$$

Значит, спектр матрицы R вещественный. Кроме того, собственные векторы матрицы R образуют полную ортонормированную систему в пространстве со скалярным произведением (19) ([7], с. 252). Следовательно, имеет место свойство 2.

Докажем теперь последние два свойства. Пусть $z = e_1^2 \otimes \vartheta_1 + e_2^2 \otimes \vartheta_2$ есть собственный вектор матрицы R, соответствующий собственному значению μ. Тогда, учитывая (15), получим

$$C\vartheta_1 + D\vartheta_2 = \mu\vartheta_1,$$

$$-D\vartheta_1 - C\vartheta_2 = \mu\vartheta_2, \quad C = \mathfrak{B}(V_1\Pi_1 - I_{np}), \quad D = \mathfrak{B}V_2\Pi_1.$$

Умножив эту систему на (—1) и поменяв местами строчки, получим

$$C\vartheta_2 + D\vartheta_1 = (-\mu)\vartheta_2,$$

$$-D\vartheta_2 - C\vartheta_1 = (-\mu)\vartheta_1.$$

Последнее завершает доказательство теоремы.

5. Выбор квадратурных формул. Исследование дискретизированного уравнения переноса излучения

Пусть квадратурная формула (5) есть формула средних прямоугольников, т. е.

$$\beta_m = 2\pi/p, \quad \varphi_m = 2\pi(m-1/2)/p, \quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Рассмотрим случай четного p, т. е. $p=2q$, и отметим, что все приводимые ниже результаты легко переносятся на нечетный p. Кроме того, с целью некоторых упрощений азимут прямого солнечного излучения φ_0 положим равным $\pi/2q$. С учетом этих предположений дискретизированное уравнение переноса излучения (14) примет вид

$$\frac{dI_s(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n} b_s W_{sj}(\lambda\alpha_j/2)\,\frac{1}{p}\,I_j(\tau) - b_s I_s(\tau) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_s W_{-sj}(\lambda\alpha_j/2)\,\frac{1}{p}\,I_{-j}(\tau) + b_s \exp(\sigma\tau)\,u_s, \quad s=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n,$$

$$I_j(0) = I_{-j}(H) = 0, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{20}$$

Из (12) и (13) следует

$$W_{si} = W_{is}, \quad W_{si}^{\mathrm{T}} = W_{si}, \quad W_{-si} = W_{s(-i)}, \quad W_{(-i)(-s)} = W_{is}. \tag{21}$$

Согласно определению матрицы W_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, имеем

$$W_{ij} = (g_{jlim})_{ml} = (g(\gamma_{jlim}))_{ml}, \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad m, l = 1,\ 2,\ \ldots,\ p,$$

где

$$\cos(\gamma_{jlim}) = \mu_i\mu_j + \sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\mu_j^2)}\cos(2\pi(m-l)/p) = \cos(\gamma_{ij}^{|m-l|}).$$

Учитывая четность $p=2q$, свойства функции $\cos x$ и то, что функция $g(\gamma)$ определена на $[0, \pi]$, получим, что W_{ij} является циркулянтом ([6], с. 263), т. е. матрицей вида

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{p-1} \\ c_{p-1} & c_0 & c_1 & \ldots & c_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Упорядоченный набор $(c_0 c_1 c_2 \ldots c_{p-1})$ будем называть образующим вектором для циркулянта C. Образующий вектор для циркулянта W_{ij} есть

$$(\varkappa_{ij}^0\ \varkappa_{ij}^1 \ldots \varkappa_{ij}^{q-1}\varkappa_{ij}^q\,\varkappa_{ij}^{q-1} \ldots \varkappa_{ij}^1), \quad i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{23}$$

где

$$\varkappa_{ij}^r = g(\gamma_{ij}^r), \quad \cos(\gamma_{ij}^r) = \mu_i\mu_j + \sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\mu_j^2)}\cos(r\pi/q),$$
$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ q.$$

Для матрицы W_{-ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ имеем

$$\cos(\gamma_{-jlim}) = -\mu_i\mu_j + \sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\mu_j^2)}\cos(\pi(m-l)/q) =$$

$$= -(\mu_i\mu_j + \sqrt{(1-\mu_i^2)(1-\mu_j^2)}\cos(\pi - (m-l)\pi/q) = -\cos(\gamma_{ij}^{q-|m-l|}).$$

Отсюда следует то, что $\gamma^{r}_{-ij}=\pi-\gamma^{q-r}_{ij}$ и что образующий вектор для циркулянта W_{-ij} есть

$$(\varkappa^0_{-ij}\ \varkappa^1_{-ij}\ \dots\ \varkappa^{q-1}_{-ij}\ \varkappa^q_{-ij}\ \varkappa^{q-1}_{-ij}\ \dots\ \varkappa^1_{-ij}),\quad i,j=1,2,\dots,n. \tag{24}$$

Здесь $\varkappa^r_{-ij}=g(\pi-\gamma^{q-r}_{ij})$, $r=0, 1, 2, \dots, q$.

Отметим некоторые свойства циркулянтов. Собственное значение циркулянта (22) определяется формулой ([6], с. 263)

$$\lambda_k=c_0+\sum_{j=1}^{p-1} r^j_k c_j, \tag{25}$$

а соответствующий ему собственный вектор есть

$$(1\ r_k\ r^2_k\ \dots\ r^{p-1}_k)^{\mathrm{T}},$$

где r_k — k-й корень уравнения $r^p=1$. Отсюда следует, что любой циркулянт при помощи унитарного преобразования

$$U=\frac{1}{\sqrt{p}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ r_1 & r_2 & \dots & 1\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ r^{p-1}_1 & r^{p-1}_2 & \dots & 1\end{vmatrix},\quad UU^*=I_p, \tag{26}$$

не зависящего от конкретного циркулянта, приводится к диагональному виду. Следовательно, матрицы W_{ks} коммутируют между собой.

Применяя формулу (25) к циркулянту (23), получим в явном виде собственные значения $\lambda_{ij}{}^k$ матрицы W_{ij} $(i, j=1, 2, \dots, n)$

$$\begin{aligned}\lambda^k_{ij}&=\varkappa^0_{ij}+\varkappa^q_{ij}r^q_k+\sum_{l=1}^{q-1}\varkappa^l_{ij}(r^l_k+r^{p-l}_k)=\\ &=\varkappa^0_{ij}+\varkappa^q_{ij}(\cos(2\pi kq/p)+\mathrm{i}\sin(2\pi kq/p))+\\ &+\sum_{l=1}^{q-1}\varkappa^l_{ij}(\cos(2\pi kl/p)+\mathrm{i}\sin(2\pi kl/p)+\cos((p-l)2\pi k/p)+\\ &+\mathrm{i}\sin((p-l)2\pi k/p))=\\ &=\varkappa^0_{ij}+(-1)^k\varkappa^q_{ij}+2\sum_{l=1}^{q-1}\varkappa^l_{ij}\cos(\pi kl/q),\quad k=1,2,\dots,p;\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1}.\end{aligned} \tag{27}$$

Аналогично, применяя формулу (25) к циркулянту (24), получим

$$\lambda^k_{-ij}=\varkappa^0_{-ij}+(-1)^k\varkappa^q_{-ij}+2\sum_{l=1}^{q-1}\varkappa^l_{-ij}\cos(\pi kl/q),\quad k=1,2,\dots,p. \tag{28}$$

Вычислим теперь вектор U^*u_s, где U — матрица, определенная (26). По определению u_s (см. раздел 3) имеем

$$u_{sm}=\lambda c_0 g(\gamma'_{sm})/4\pi,\quad s=\pm1, \pm2, \dots, \pm n;\quad m=1, 2, \dots, p,$$

где

$$\begin{aligned}\cos(\gamma'_{sm})&=\mu_s\mu_0+\sqrt{(1-\mu^2_s)(1-\mu^2_0)}\cos(2\pi(m-1/2)/p-\pi/(2q))=\\ &=\mu_s\mu_0+\sqrt{(1-\mu^2_s)(1-\mu^2_0)}\cos(\pi(m-1)/q)=\cos(\gamma^{|m-1|}_{s0}).\end{aligned}$$

Последнее позволяет записать вектор u_s в виде

$$u_i = (\lambda c_0/4\pi)\,(\varkappa^0_{i0}\ \varkappa^1_{i0}\ \ldots\ \varkappa^{q-1}_{i0}\ \varkappa^q_{i0}\ \varkappa^{q-1}_{i0}\ \ldots\ \varkappa^1_{i0})^{\mathrm{T}},$$

$$u_{-i} = (\lambda c_0/4\pi)\,(\varkappa^0_{-i0}\ \varkappa^1_{-i0}\ \ldots\ \varkappa^{q-1}_{-i0}\ \varkappa^q_{-i0}\ \varkappa^{q-1}_{-i0}\ \ldots\ \varkappa^1_{-i0})^{\mathrm{T}},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Здесь $\varkappa^r_{i0} = g(\gamma^r_{i0})$, $\varkappa^r_{-i0} = g(\pi - \gamma^{q-r}_{i0})$. Отсюда, m-я координата $(U^* u_s)^m$ вектора $U^* u_s$ есть

$$(U^* u_s)^m = (\lambda c_0/4\pi\sqrt{p})\,(\varkappa^0_{s0} + \varkappa^q_{s0}\bar{r}^q_m + \sum_{l=1}^{q-1}\varkappa^l_{s0}(\bar{r}^l_m + \bar{r}^{p-l}_m)) =$$

$$= (\lambda c_0/4\pi\sqrt{p})\,(\varkappa^0_{s0} + (-1)^m\varkappa^q_{s0} + 2\sum_{l=1}^{q-1}\varkappa^l_{s0}\cos(\pi ml/q)), \quad (29)$$

$$s = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm n;\quad m=1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Умножив слева систему (20) на матрицу U^* и учитывая (21), (27)—(29), получаем задачу (20) в виде

$$\frac{d\hat{I}_s(\tau)}{d\tau} = \sum_{j=1}^{n}\Lambda(s,j)\,\hat{I}_j(\tau) - b_s\hat{I}_s(\tau) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(-\Lambda(-s,j))\,\hat{I}_{-j}(\tau) + \hat{u}_s\exp(\sigma\tau),\quad s=\pm 1,\ \ldots,\ \pm n,$$

$$\hat{I}_j(0) = \hat{I}_{-j}(H) = 0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \quad (30)$$

где $\hat{I}_s(\tau) = U^* I_s(\tau)$; $\hat{u}_s = b_s U^* u_s$; $\Lambda(i,j)$ и $\Lambda(-i,j)$ — диагональные матрицы размерности $p\times p$, диагональные элементы $\lambda_k(\pm i,j)$ которых определяются формулами

$$\lambda_k(i,j) = (\lambda b_i \alpha_j/4q)\,(g(\gamma^0_{ij}) + (-1)^k g(\gamma^q_{ij}) + 2\sum_{l=1}^{q-1} g(\gamma^l_{ij})\cos(\pi kl/q)),$$

$$\lambda_k(-i,j) = -(\lambda b_i \alpha_j/4q)\,(g(\pi - \gamma^q_{ij}) + (-1)^k g(\pi - \gamma^0_{ij}) +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{q-l} g(\pi - \gamma^{q-l}_{ij})\cos(\pi kl/q)),\quad i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2q,$$

а k-й элемент $\hat{u}_{sk}$ вектора $\hat{u}_s$ есть

$$\hat{u}_{ik} = (\lambda c_0 b_i/4\pi\sqrt{2q})\,(g(\gamma^0_{i0}) + (-1)^k g(\gamma^q_{i0}) + 2\sum_{l=1}^{q-l} g(\gamma^l_{i0})\cos(\pi kl/q)),$$

$$\hat{u}_{-ik} = -(\lambda c_0 b_i/4\pi\sqrt{2q})\,(g(\pi - \gamma^q_{i0}) + (-1)^k g(\pi - \gamma^0_{i0}) +$$

$$+ 2\sum_{l=1}^{q-l} g(\pi - \gamma^{q-l}_{i0})\cos(\pi kl/q)),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2q,$$

$$\cos(\gamma^l_{ij}) = \mu_i\mu_j + \sqrt{(1-\mu^2_i)(1-\mu^2_j)}\cos(l\pi/q),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Зная решение $\hat{I}_s(\tau)$ задачи (30), можно легко определить решение $I_s(\tau) = \mathrm{Re}(U\hat{I}_s(\tau))$ задачи (20)

$$I_{sm}(\tau) = \mathrm{Re}(1/\sqrt{p}\sum_{l=1}^{p} r^{m-1}_l \hat{I}_{sl}(\tau)) = (1/\sqrt{2q})\sum_{l=1}^{2q}\hat{I}_{sl}(\tau)\cos(\pi l(m-1)/q).$$

6. Некоторые обсуждения

Итак, решение уравнения переноса излучения (1)—(2) методом дискретных ординат сводится к решению системы дифференциальных уравнений (30). Матрицу коэффициентов $\hat{R}$ этой системы можно описать следующим образом: она состоит из элементов $\Lambda(i,j)$ и $\Lambda(-i,j)$, $i,j=1, 2, \ldots, n$, являющихся диагональными матрицами, и имеет размерность $2n \times 2n$. Это позволяет применять к задаче (30) без значительных изменений многие методы решения краевых задач как к системе размерности $2n \times 2n$, эффективно используя многопроцессорные машины при численной реализации.

Обозначим количество операций, необходимых для решения задачи (30), через $k(n,p)$. Учитывая строение матрицы $\hat{R}$, легко получаем формулу

$$k(n,p) = pk(n,1).$$

Величину $k(n,1)$ можно интерпретировать как количество операций, необходимых для решения системы дифференциальных уравнений с краевыми условиями размерности $2n \times 2n$. Эта величина зависит от конкретного метода.

Отметим еще одно свойство системы (30). Несмотря на то, что количество операций, необходимых для решения задачи (30), есть $k(n,p)$, на окончательный результат будет оказывать влияние только $k(n,1)$ ошибок округления результатов промежуточных вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1971.
2. Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, М., ИЛ, 1953.
3. Хейнло А., Вийк Т., В кн.: Перенос излучения в несером слое и образование линий поглощения, Тарту, АН ЭССР, 1978, с. 37—54.
4. Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.
5. Князихин Ю., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **500**, 73—91 (1979).
6. Белманн Р., Введение в теорию матриц, М., «Наука», 1976.
7. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., «Мир», 1979.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/IX 1981

I. KNJAZIHHIN

DISKREETSETE ORDINAATIDE MEETODI KASUTATAVUS KIIRGUSLEVI VÕRRANDI LAHENDAMISEKS HOMOGEENSE, TASAPARALLEELSE, ANISOTROOPSELT HAJUTAVA ATMOSFÄÄRI KORRAL. 1

Kiirguslevi integraal-diferentsiaalvõrrand on lahendatud diskreetsete ordinaatide meetodil. On näidatud, et sobivalt valitud kvadratuurvalemi korral laguneb diferentsiaalvõrrandi koefitsientide maatriks omavahel kommuteeruvateks plokkideks, mida on lihtne unitaarmaatriksi abil diagonaalkujuks taandada.

J. KNJAZIHHIN

INVESTIGATION OF THE DISCRETE ORDINATES SOLUTION OF THE RADIATIVE TRANSFER EQUATION IN THE HOMOGENEOUS, PLANE-PARALLEL, ANISOTROPICALLY SCATTERING ATMOSPHERE. 1

The given paper presents the first part of the investigation of the discrete ordinates solution of the radiative transfer equation in the homogeneous, plane-parallel, anisotropically scattering atmosphere. The following variant of this method is considered — the double integral which occurs in the integro-differential equation of the radiative transfer is replaced by the quadrature formulae. Due to the use of this discretisation, we can replace the radiative transfer equation (1) by a system of $2np$ linear differential equations (6).

Let the formula (5) be the rectangular formula. In this case the system of linear differential equations (6) can be transformed to the system of linear differential equations (30). It has the following structure — the matrix dimension of the coefficient of the system (30) is of the order $2n$ and its elements are $p \times p$ diagonal matrices.