EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 1

УДК 519.3 : 51 : 62—50

И. КЕЙС

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ С ИНФОРМАТИВНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

(Представлена Н. Алумяэ)

Рассматривается задача оптимального управления движением динамической системы с информативными переменными. Подынтегральная функция критерия принимается выпуклой по управлению, удовлетворяющему условию типа норм-ограничения. Дается классификация оптимальных режимов. Исходя из построенных экстремальных регуляторов выводится вид уравнения Беллмана и условий понижения размерности задачи. Результаты иллюстрируются на примере субоптимальной стабилизации движений псевдоавтономных систем.

1. Рассмотрим уравнения возмущений $x \equiv 0$ системы [1]

$$\dot{x} = X(t,x) + M(t,x)\,u,\ X(t,0) \equiv 0, \quad M = \|m_{\nu s}(q)\|,$$

$$u = (u_s)^* \in \omega\,(\nu = \overline{1,n},\ s = \overline{1,r}), \tag{1.1}$$

$$X = (X_\nu(q))^*, \quad q = (t, x_\nu)^* \in Q : t \geqslant 0, \quad |x| < \infty;$$

$$1 \leqslant \operatorname{rank} M = r \leqslant n, \quad |x|^2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2,$$

$$x = (x_\nu)^* = (x'_\alpha, x''_\beta)^*, \quad x' = (x'_\alpha)^*, \quad x'' = (x''_\beta)^*;$$

$$X_\nu, m_{\nu s} \subset C_1(Q)\ (\alpha = \overline{1,l},\ \beta = \overline{1,n-l},\ l \leqslant n).$$

Допустимые управления — кусочно-непрерывные в $T = [0, \infty)$ вектор-функции $u(t)$ со значениями в выпуклом компакте ω

$$0 \leqslant \nu(u) \leqslant \nu^0 = \text{const}, \quad \omega_0 = \omega \backslash 0, \quad \nu(u) \subset C(E^r), \tag{1.2}$$

где

$$\nu(\alpha_0 u) = \alpha_0 \nu(u), \quad 0 \leqslant \alpha_0 \in E^1; \quad \nu \subset C_2(E^r_0)\ (\nu(u) = u \cdot \nabla\nu(u)),$$

$$\nu(u_2) - \nu(u_1) > (u_2 - u_1)\cdot\nabla\nu(u_1), \quad |u_2|\,|u_1| > |(u_2 \cdot u_1)|\ (E^r_0 = E^r \backslash 0), \tag{1.3}$$

$$\nu(u) > \nu(0) = 0, \quad u \neq 0, \quad \nabla\nu(u) = (\partial\nu/\partial u_s)^* \quad (s = \overline{1,r}).$$

Допустимыми будем считать управления, приводящие $x'(t)$ на множество цели $x' = 0$. Здесь t_1 — момент примыкания: $x'(t, x_0) \to 0$ при $t \to t_1 - 0$.

Введем обратимое преобразование $\xi_\nu = \xi_\nu(t, x)$ вида

$$\xi=(\xi_\nu)^*=(y'_i(q),y''_j(q),\gamma_\lambda(q))^*,\ \xi_\nu(t,0)\equiv 0,\ y=(y_m)^*=(y'_i,y''_j)^*, \tag{1.4}$$
$$\gamma=(\gamma_\lambda)^*, y_m(q)\geqslant 0;\quad y_m,\gamma_\lambda\subset C(Q),\ 1\leqslant \dim y=k\leqslant l=\dim x',$$
$$P=\|p_{\nu\sigma}(q)\|,\quad p_{\nu\sigma}=\partial\xi_\nu/\partial x_\sigma,\quad \det P\neq 0;\quad y_m,\gamma_\lambda\subset C_2(Q\backslash x'=0),$$
$$z=(t,\xi_\nu)^*,\quad x(t,0)\equiv$$
$$\equiv 0\,(i=\overline{1,k_1},\ j=\overline{1,k_2},\ m=\overline{1,k}=k_1+k_2,\ \lambda=\overline{1,n-k},\ \nu,\sigma=\overline{1,n}),$$

чтобы использовать известные инварианты $y'_i(q)$ и функции Ляпунова $y''_j(q)$ для системы (1.1) при $u\equiv 0$. $y_m(q)$ — непрерывные, неограниченные функции, одновременно исчезающие лишь при $x'=0$. $E_+{}^k$ — область $0\leqslant y_m<\infty$ $(m=\overline{1,k})$, Γ — область значений $\gamma_\lambda(q)$. Тогда $x(z)\subset C$ в области $D=T\times E_+{}^k\times\Gamma$ и $x(z)\subset C_1$ на $D_0=$ $=T\times E_0{}^k\times\Gamma$, где $E_0{}^k$ — область $E_+{}^k\setminus y=0$. Пусть для любых фиксированных $t^0\in T$, $y^0\in E_+{}^k$ область Γ значений $x''(t^0,y^0,\gamma)$ совпадает с областью E^{n-l} и выполняются неравенства

$$W_{11}(x')\leqslant|y(q)|\leqslant W_{21}(x'),\quad q\in Q\,(W_{\alpha 1}(0)=0,\quad W_{\alpha 1}\subset C(E^l),\ \alpha,\beta=1,2), \tag{1.5}$$
$$W_{12}(y)\leqslant|x'(z)|\leqslant W_{22}(y),\ z\in D\,(W_{\beta 2}(0)=0,\ W_{\beta 2}\subset C(\overset{k}{E_+})),$$

где $W_{\alpha\beta}$ — положительно определенные бесконечно большие функции: $W_{11}\to\infty$, $|x'|\to\infty$, $W_{12}\to\infty$, $|y|\to\infty$. Из (1.5) следует, что $x'\to 0$ лишь при $y\to 0$ и $|x'|\to\infty$, если $|y|\to\infty$. В переменных ξ имеем эквивалентную (1.1) систему

$$\dot\xi=F(z)+A(z)u,\quad z\in D_0,\quad u\in\omega,\quad F(t,0)\equiv 0,\quad F=(Y_i,Y_j,Z_\lambda)^*, \tag{1.6}$$
$$Y_i=X[y'_i]=0,\ Y_j=X[y''_j],\ Z=X[\gamma_\lambda],\ X[f]=\partial f/\partial t+X_\nu\partial f/\partial x_\nu,$$
$$A=\|a_{\nu s}(z)\|=PM,\quad \operatorname{rank}A=r,\quad A_1=\|a_{ms}(z)\|,\quad Y=(Y_j)^*,\quad Z=(Z_\lambda)^*.$$

Согласно (1.1) и (1.4), Y_j, Z_λ, $a_{\nu s}\subset C_1(D_0)$. Пусть для $\forall\xi_0\equiv\xi(t_0)\in D_0$ и допустимого $u(t)$ решения (1.6) существуют, единственны и z-продолжаемы [1] в D_0. Тогда регулятору $u(z)$ системы (1.6), приводящему точки $D^0: t\geqslant 0$, $y\in E_+{}^k$, $0<|y|\leqslant d^0$, $\gamma\in\Gamma$ на $y=0$, соответствует допустимый регулятор $u_1(q)\equiv u(t,\xi(q))$ системы (1.1), преобразующий точки $H^0: t\geqslant 0$, $0<|x'|\leqslant h^0$, $x^n\in E^{n-l}$ на $x'=0$. Для данного $d^0>0$ возьмем h^0 из

$$W_{21}(x')\leqslant d^0 \text{ при } |x'|\leqslant h^0\quad (d^0=\text{const},\ h^0=\text{const}>0). \tag{1.7}$$

Если $u(z)$ приводит D_0 на $y=0$, то $u(t,\xi(q))$ дает x'-стабилизацию в целом движения $x=0$. Для оптимальной x'-стабилизации достаточно решить соответствующую ей задачу y-стабилизации движения $\xi=0$ системы (1.6). Назовем систему (1.6) и y_m, γ_λ информативными, если (1.4), (1.5) выполняются. В частности, эти условия справедливы, когда $y'_i(q)$ и $y''_j(q)$ — известные для (1.1) инварианты, y-автономные переменные и функции Ляпунова при $u\equiv 0$. Критерий оптимальности x'-стабилизации — минимум интеграла

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f(t,\xi,u)\,dt\ (f=f_0(z)+f_1(z,u),\ f_1(z,0)\equiv 0,\ 0\leqslant f_0,\ f_1\subset C(D\times E^r)), \tag{1.8}$$
$$f_1(z,u_2)-f_1(z,u_1)\geqslant(u_2-u_1)\cdot\partial f_1/\partial u_1\,(\forall u_2\in E^r,\ u_1\in E^r_0),$$

$$0<f(z,u),\ 0\leqslant f_0(z)\subset C_1,\ 0\leqslant f_1(z,u)\subset C_2,\ \ z\in D_0,\ u\in E^r_0,$$

где $f_1(\cdot,u)$ — выпуклая функция.

2. Рассмотрим в ξ задачу оптимальной по (1.8) x'-стабилизации движения $x=0$ системы (1.1), для которой (1.6) — информативная. Оптимальный регулятор $u_1{}^0(q)\equiv u^0(t,\xi(q))$ и область начальных значений (1.7) будем искать методом Ляпунова с помощью производящей функции $S(t,\xi)$. Обозначим

$$B[S,u]=f_0(z)+F[S]+L[S,u],\qquad z=(t,\xi_\nu)^*\in D^1_0,\qquad u\in\omega,\quad (2.1)$$

$$F[S]\equiv\theta_0+\theta_\lambda Z_\lambda+\psi''_j Y_j(z),\qquad \theta_0=\partial S/\partial t,\qquad \theta_\lambda=\partial S/\partial\gamma_\lambda,\qquad \psi'_i=\partial S/\partial y'_i,$$

$$\psi''_j=\partial S/\partial y''_j,\qquad \theta=(\theta_\lambda)^*,$$

$$L[S,u]=L(z,p,u)=f_1+a\cdot u,\qquad a=A^*p,\qquad p=(\psi'_i,\psi''_j,\theta_\lambda)^*,$$

$$\psi=(\psi'_i,\psi''_j)^*\,(i=\overline{1,k_1},\,j=\overline{1,k_2}),$$

$$D^1=t\geqslant0,\ \ y\in E^k_+,\ \ |y|\leqslant d^1,\ \ \gamma\in\Gamma;\ \ D^1_0=D^1\backslash y=0,$$

$$d^1=\mathrm{const}\,(\lambda=\overline{1,n-k},\ k=k_1+k_2).$$

Здесь и ниже $S\subset C(D^1)\cap C_1(D_0{}^1)$. $S(z)$ — допустимая функция, а непрерывный в $D_0{}^1$ регулятор $u^0(z,p)\neq0$ экстремальный, если

$$S(t,0,\gamma)\equiv0,\qquad V_1(y)\leqslant S(z)\leqslant V_2(y),\qquad z\in D^1,\qquad V_2(0)=0,\qquad (2.2)$$

$$L[S,u^0]\leqslant L[S,u],\ \ B[S,u^0]=0,\ \ f(z,u^0)\geqslant W(y),\ \ z\in D^1_0\ (u^0\in\omega_0,\ \ u\in\omega),$$

где $V_1(y)$, $V_2(y)$ — непрерывные, бесконечно большие и определенно-положительные в $E_+{}^k$ функции. $W(y)$ — определенно-положительная и непрерывная в D^1 функция. Следуя [1], находим d^0 в (1.7). Обозначим $v^0=\inf V_1(y)$ при $|y|=d_0=d^1-\varepsilon_0$, $y\in E_+{}^k$, $\varepsilon_0=\mathrm{const}>0$. Тогда $d^0=d_0{}^1-\varepsilon_1$, где $d_0{}^1$ — минимальный модуль корня $V_2(y)=v^0$, $\varepsilon_1=\mathrm{const}>0$. Из (2.2) на основании теоремы 3.1 [1] и ее модификации [2] имеем утверждение.

Теорема 1. *Если информативная* (1.6) *имеет допустимую* $S(z)$ *и экстремальный регулятор* $u^0(z,p)$ *в* $D_0{}^1$, *то для* $\forall q_0$ *в* $0<|x'_0|\leqslant h^0$ *функция* $u_1{}^0(q)\equiv u^0[z(q),\ p(z(q))]$ — *оптимальный регулятор.*

Здесь управление $u_1{}^1(t)=u_1{}^0[t,x(t,x_0)]\subset C[t_0,t_1)$ и выполнены условия $S(z_0)=\min I(u)$, $|x'(t,x_0)|\leqslant\sup W_{22}(y)$, $y\in D^1$; $x'(t,x_0)\to0$ при $t\to t_1-0$, где $z_0=(t_0,\xi_0)^*$, $\xi_0=(\xi_\nu(t_0))^*$, $q_0=(t_0,x_{\nu0})^*$, $x_0=(x_\nu(t_0))^*$. Регулятор $u^0(z,p)$ дает оптимальную x'-стабилизацию в целом, если условия (2.2) выполнены на $D_0=T\times E_0{}^k\times\Gamma$, где $S(z)\subset C_1(D_0)$ и $S(z)\subset C(D)$. Пусть в $D_0{}^1$ есть $S(z)$, $u^0(z,p)$, удовлетворяющие (2.2). Тогда решение задачи сводится к поиску экстремального $u^0(z,p)$ и допустимого решения $S(z)$ уравнения $B^0[S]\equiv\equiv B[S,u^0]=0$.

Из условий (1.3), (1.8) находим, что множество точек $\{u_1{}^1\}$, где $L(u)$ достигает inf на ω, есть выпуклый компакт. Множество $\{u^0\}$ не пусто, оно состоит из $\{u_1{}^1\}$ без $u=0$. С учетом (1.3), (1.8) необходимо и достаточно, чтобы u^0 удовлетворяла

$$\partial L/\partial u+\mu\partial\nu/\partial u=0,\ \mu[\nu(u)-\nu^0]=0\,(0<\nu(u)\leqslant\nu^0,\ \mu=\mu(z,p)\geqslant0).\quad (2.3)$$

Если $\mu = 0$, то решения (2.3) стационарные: $u^0 = u_0$. При $\mu > 0$ имеем нестационарные точки $u^0 = u^1$, $\nu(u^1) = \nu^0$. Из (1.3), (1.8), (2.1), (2.3) выводим

$$L(u) - L(u^1) \geqslant \mu (u^1 - u) \cdot \nabla \nu (u^1) \geqslant \mu (\nu^0 - \nu (u)) \geqslant 0, \quad L(u^1) \leqslant -\mu\nu^0 < 0. \tag{2.4}$$

В силу (1.3) и (2.4) для $L(u) = L(u^1)$ необходимо, чтобы $u = -u^1$, $\nu(u^1) = \nu(-u^1)$. Отсюда находим неравенство

$$L(u^1) + L(-u^1) = f_1(u^1) + f_1(-u^1) \leqslant$$
$$\leqslant -2\mu\nu^0 < 0 \, (\Phi(z, u) = \Phi(\cdot, u) = \Phi(u)),$$

которое несовместимо с $f_1 \geqslant 0$ в (1.8). Поэтому $L(u^1) < L(u)$ при $u^1 \neq u \in \omega$. Отсюда для $\forall z \in D_0{}^1$ имеем альтернативу: либо система (2.3) имеет единственное решение $u^1(z, p)$, либо $\{u_0\}$ не пусто и нестационарного решения (2.3) не существует. Пусть $S(z)$ такая, что $\partial L/\partial u \neq 0$ для всех $z \in D_0{}^1$, $u \in \omega_0$. Этот вариант назовем нестационарным режимом. Тогда в $D_0{}^1$ имеем единственный нестационарный регулятор $u^1(z, p) \subset C_1(D_0{}^1)$ и неравенства

$$\partial L/\partial u \neq 0, \ L(u^1) < L(u), \ \nu(u^1) = \nu^0 \ \ (z \in D_0^1, u^1 \neq u \in \omega, L(u^1) < 0). \tag{2.5}$$

Стационарным режимом назовем вариант, когда $\mu = 0$ и (2.3) имеет для всех $z \in D_0{}^1$ хотя бы одно решение $u_0(z, p) \in \omega_0$, $u_0 \subset C_1(D_0{}^1)$. При этом

$$\partial L/\partial u_0 = 0, \ L(u_0) \leqslant L(u), \ 0 < \nu(u_0) \leqslant \nu^0; \ L(u_0) \leqslant 0, \ u \in \omega \, (z \in D_0^1) \, . \tag{2.6}$$

Ограничимся рассмотрением двух режимов — эллиптического и конического. В эллиптическом случае выполнены (1.8), а $f_1(z, u)$ строго выпуклая по u функция, причем удовлетворяющая неравенству

$$f_{s\sigma} v_s v_\sigma > 0, \ f_{s\sigma} = \partial^2 f_1 / \partial u_s \, \partial u_\sigma (z \in D_0^1, u, v \in E_0^r, s, \sigma = \overline{1, r}). \tag{2.7}$$

В коническом, кроме (1.8), удовлетворяются условия

$$f_1 > 0, \quad u \cdot \partial f_1 / \partial u = f_1, \quad u \in E_0^r, \quad f_1(z, 0) \equiv 0, \quad z \in D_0^1, \tag{2.8}$$

$$f_{s\sigma} v_s v_\sigma > 0, \quad |u| \, |v| > |(u \cdot v)|, \quad \det \|f_{\beta\gamma}\| > 0 \quad (\beta, \gamma = \overline{1, r-1}).$$

Здесь $f_1(\cdot, u)$ строго выпуклая на нецентральном интервале $\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2$.

2.1. Найдем в эллиптическом случае оптимальные регуляторы для стационарного и нестационарного режимов. Рассмотрим стационарный режим. Для решения u_0 системы (2.6) из (2.7) выводим $L(u) > L(u_0)$, $u_0 \neq u \in \omega$, $u_0 \in \omega_0$. Отсюда следует, что в $D_0{}^1$ существует единственный стационарный регулятор $u_0 \subset C_1(D_0{}^1)$. Получим его преобразованием Лежандра. Введем для сопряженных переменных, функции и якобиана обозначения

$$v_s = v_s(z, p, u) = \partial L / \partial u_s, \quad H'_1(z, p, u) = v \cdot u - L(z, p, u), \tag{2.9}$$
$$\Delta_1 = \det \|\partial^2 L / \partial u_s \, \partial u_\sigma\| = \det \|f_{s\sigma}\| \qquad (s, \sigma = \overline{1, r}),$$

где $\Delta_1 > 0$ в силу (2.7). Отсюда имеем равенства

$$u_s = u_s(z,p,v) = \partial H_1/\partial v_s, \quad H_1 = H'_1(z,p,u(z,p,v)). \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9) в (2.6), (2.10), найдем стационарный u_0 и равенства

$$u_0(z,p) = \partial H_1/\partial v_0, \ v_0 = 0; \quad L(z,p,u^0) = -H_1(z,p,0) \equiv -G_1(z,p). \tag{2.11}$$

С учетом (2.1), (2.9) — (2.11) уравнение Беллмана имеет вид

$$B^0_1[S] = f_0(z) + F[S] - G_1(z,p) = 0, \quad z \in D^1_0. \tag{2.12}$$

При (1.8), (2.7) на основании теоремы 1 для стационарного режима имеем утверждение: если решение (2.12) удовлетворяет условиям

$$S_1(t,0,\gamma) \equiv 0, \quad V_1(y) \leqslant S_1(z) \leqslant V_2(y),$$
$$F[S_1] + a \cdot \partial H_1/\partial v_0 \leqslant -W(y), \quad z \in D^1_0, \tag{2.13}$$

то (2.11) — оптимальный по (1.8), (2.7) регулятор x'-стабилизации в $C^0: 0 < |x'_0| \leqslant h^0$. Здесь $z = z(q)$, $p = \partial S_1/\partial \xi$ при обозначениях (1.4), (1.6), (1.7), (2.1), (2.2), (2.9) — (2.11).

Пусть (1.6), (1.8) удовлетворяют условиям y-автономности

$$f_0 = \tau \overset{0}{f_0}(y), \quad Y_j = \tau \overset{0}{Y_j}(y), \quad G_1|_{\theta=0} = \tau g_1(y,\psi), \quad z \in \overset{1}{D_0} \ (\tau = \tau(z) > 0), \tag{2.14}$$
$$f^0_0, Y^0_j, \tau \subset C(D^1_0), \quad \theta = (\partial S/\partial t, \partial S/\partial \gamma_\lambda)^* \quad (\lambda = \overline{1, n-k}),$$

где g_1, $f_0{}^0$, $Y_j{}^0$ не зависят от t, γ. Решение (2.12) ищем в виде $S_1{}^0(y)$:

$$b^0_1[S] = \tau^{-1} B^0_1[S]|_{\theta=0} = f^0_0(y) + \psi''_j Y_j(y) - g_1(y,\psi) = 0,$$
$$y \in E^k_+, \quad 0 < |y| \leqslant d^1. \tag{2.15}$$

(2.12) сводится к (2.15) при условиях y-автономности (2.14). Здесь уменьшена размерность задачи, упрощены условия (2.13) оптимальности (2.11). Из (2.13) — (2.15) получаем результат.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (2.14) *и определенно-положительная функция* $S_1{}^0(y)$ *в* $D_0{}^1$ *удовлетворяет* (2.15) *и неравенству*

$$\tau Y^0_j \psi''_j + u^0_0 \cdot A^*_1 \psi \leqslant -W(y) \left(u^0_0 = \partial H_1/\partial v_0|_{\theta=0}, \ v_0 = 0; \ \psi = \frac{\partial S^0_1}{\partial y} \right), \tag{2.16}$$

то вектор-функция (2.11) *при* $\theta = 0$ — *оптимальный по* (1.8), (2.7) *регулятор* x'*-стабилизации для* $\forall q_0$ *в* C^0.

При нестационарном режиме зададим преобразование равенствами

$$v(z,p,\mu,u) = \partial R/\partial u, \quad u(z,p,\mu,v) = \partial H_2/\partial v \quad (z \in \overset{1}{D_0}, \ u \in \omega_0), \tag{2.17}$$
$$R = L + \mu\nu, \quad H_2(z,p,\mu,v) = u \cdot v - R(z,p,\mu,u) \ (u \cdot v = \sum_{s=1}^{r} u_s v_s).$$

В силу (1.3), (2.7) $\mu > 0$, якобиан $\Delta'_2 = \det \|\partial^2 R/\partial u_s \partial u_\sigma\| > 0$. Из (2.3), (2.17) находим вид нестационарного экстремального регулятора и уравнение для μ:

$$u' = u'(z,p,\mu) = \partial H_2/\partial v_0, \quad \nu(\partial H_2/\partial v_0) = \nu^0, \quad v_0 = 0. \tag{2.18}$$

Для (2.18) якобиан $\Delta_2 = (\partial\nu/\partial u'_\sigma)(\partial u'_\sigma/\partial\mu) \neq 0$ при $z \in D_0^1$. Дифференцируя по μ тождества (2.3) при $u = u'(z, p, \mu)$, найдем

$$r'_{\sigma s}\,\partial u'_s/\partial\mu = -\partial\nu/\partial u'_\sigma,$$

$$\Delta_2 = -r'_{\sigma s}(\partial u'_s/\partial\mu)(\partial u'_\sigma/\partial\mu)\;(r'_{\sigma s} = \partial^2 R/\partial u'_\sigma\,\partial u'_s).$$

Тогда из $u'\cdot\partial\nu/\partial u' = \nu^0 \neq 0$, $r_{s\sigma}u_s u_\sigma > 0$ имеем $\Delta_2 < 0$. Подставляя решение $\mu = M_1(z, p)$ этого уравнения в (2.18), получим экстремальный регулятор $u_2{}^1 = u'(z, p, M_1(z, p)) \subset C_1(D_1{}^0)$. Далее находим

$$\partial H_2/\partial\mu = -\partial R/\partial\mu = -\nu(u), \quad G_2(z, p) \equiv \nu^0 M_1 + H_2(z, p, M_1, 0). \quad (2.19)$$

Из (2.17)—(2.19) для нестационарного режима получаем уравнение

$$B^0_2[S] = f_0(z) + F[S] - G_2(z, p) = 0, \quad z \in D^1_0\,(L(z, p, u^1_2) = -G_2(z, p)).$$

Условия y-автономности и вид уравнения Беллмана получаем из (2.14) и (2.15) заменой G_1, g_1 на G_2, g_2. Аналогично из (2.13) и (2.16) находим условия оптимальности $u_2{}^1$, произведенного $S_2(z)$ или $S_2{}^0(y)$.

2.2. Найдем оптимальный регулятор в коническом случае (1.8), (2.8). Рассмотрим стационарный режим, где по условию существует хотя бы один стационарный регулятор u_0, удовлетворяющий (2.6). Из (2.6) с учетом (1.3), (1.8), (2.8) выводим

$$L(u_0) = u_0\cdot\nabla L(u_0) = \delta^{-1}|u_0|\,|u'_0|^{-1}L(\delta u'_0) = 0\;(0 < \delta \leqslant 1,\; u'_0 = u_0\nu^0\nu^{-1}(u_0)). \quad (2.20)$$

В силу (2.20) множество $\{u_0\}$ содержит луч $\delta u'_0(\nu(u'_0) = \nu^0)$. Из (2.8) следует, что луч $\delta u'_0$ содержит все множество $\{u_0\}$. Модифицируя преобразование Лежандра, найдем граничный стационарный регулятор. Обозначим

$$v_s = v_s(z, p, e) = \partial L/\partial e_s, \; e_s = |u|^{-1}u_s\;(\partial L/\partial e_s = \partial L/\partial u_s, \; |e| = 1). \quad (2.21)$$

Дифференцируя (2.8) по u_s, получим систему с $|f_{s\sigma}| = 0$ на $D_0{}^1 \times E_0{}^r$

$$f_{s\sigma}e_s = 0\;(f_{s\sigma} = \partial^2 f_1/\partial u_s\,\partial u_\sigma, \; u \in E^r_0;\; s, \sigma = \overline{1, r}), \quad (2.22)$$

где $v_s(z, p, e), z, p$ функционально зависимы. Для определения $e_s(z, p, v)$ возьмем систему

$$\partial L/\partial e_\gamma = v_\gamma, \quad e\cdot e = 1 \quad (\gamma = \overline{1, r-1}).$$

В силу (2.8), (2.22) ее якобиан не равен нулю. Используя зависимость v_s, z, p, представим решение (2.21) в симметричном виде $e_s = \varrho_s(z, p, v)$. Используя (2.8), (2.21) и функцию

$$H_3(z, p, v) = v\cdot\varrho(z, p, v) - L(z, p, \varrho(z, p, v)), \varrho = (\varrho_s)^*, \quad (2.23)$$

найдем $\varrho_s(z, p, v)$ и связь на v_s

$$e_s = \varrho_s(z, p, v) = \partial H_3/\partial v_s, \quad H_3(z, p, v) = 0. \quad (2.24)$$

Функция $H_3(z, p, v)$ определяется равенством $H_3 = \sup\limits_e(v\cdot e - L)$ при $|e| = 1$. Подстановкой (2.21) в (2.6) из (1.3), (2.24), (2.1) находим

$$u'_0 = \nu^0\nu^{-1}(\partial H_3/\partial v_0)\,\partial H_3/\partial v_0, \; u_0 = \delta u'_0, \; v_0 = 0, \; 0 < \delta \leqslant 1. \quad (2.25)$$

Для S имеем систему из (2.20) и линейного уравнения

$$B_3^{(2)}[S]=G_3(z,p)=0,$$

$$B_3^{(1)}[S]=f_0(z)+F[S]=0\,(G_3=H_3|_{v_0=0}=-L(z,p,u'_0)). \qquad (2.26)$$

При достаточно гладких f_0, Y_j, Z_λ, G_3 функция $S_3(z)$ должна удовлетворять полной системе $B_3^{(\alpha)}[S]=0$ $(\alpha=\overline{1,\alpha^0\leqslant n+1})$, которую производит из (2.26) скобка Пуассона. Если рассматриваемый случай y-автономный

$$f_0=\tau \overset{0}{f_0}(y),\ Y_j=\tau \overset{0}{Y_j}(y),\ G_3|_{\theta=0}=\tau g_3(y,\psi),\ \tau=\tau(z)>0,\ z\in D_0^1, \qquad (2.27)$$

то соответствующая ему полная система y-автономна

$$b_3^{(1)}[S]=f_0^0(y)+\psi_j''Y_j(y)=0,$$

$$b_3^{(2)}[S]=g_3(y,\psi)=0,\ b_3^{(\beta)}[S]=0\,(\beta=\overline{3,\beta^0\leqslant k}). \qquad (2.28)$$

Условия оптимальности регуляторов (2.25) для $B_3^{(\alpha)}[S]=0$ имеют вид

$$S_3(t,0,\gamma)\equiv 0,\quad V_1(y)\leqslant S_3(z)\leqslant V_2(y),\quad F[S_3]+\delta a\cdot u'_0\leqslant -W(y),\quad z\in D_0^1,$$

$$u'_0=\nu^0\nu^{-1}(\partial H_3/\partial v_0)\,\partial H_3/\partial v_0,\ v_0=0;\quad 0<\delta\leqslant 1\,(p=\partial S/\partial\xi). \qquad (2.29)$$

В силу $f_1(\cdot,u'_0)>0$, $L(\cdot,u'_0)=0$ имеем $(a\cdot u'_0)<0$. Отсюда следует, что регулятор $\delta u'_0$ будет оптимальным, если существуют δ, $S_3\subset C_1(D_0^1)$, удовлетворяющие (2.29). В случае (2.27) утверждение об оптимальности (2.25) при $\theta=0$ для решения $S_3^0(y)$ системы (2.28) аналогично теореме 2. Здесь следует заменить $(\theta=0)S_1^0$, H_1 и u_0^0 на S_3^0, H_3 и u'_0 в условиях (2.14), (2.16).

Найдем единственный экстремальный регулятор u_4^0 в нестационарном подслучае (1.8), (2.8). Используя переменные

$$v_s=\partial R/\partial e_s,\quad R=L(z,p,u)+\mu\nu(u)\ (e=|u|^{-1}u,\ R_1=R|_{u=e}),$$

$$H_4(z,p,\mu,v)=\sup_e\,[v\cdot e-R(z,p,\mu,e)]\,(|e|=1), \qquad (2.30)$$

получим $e_s=e_s(z,p,\mu,v)=\partial H_4/\partial v_s$. Из (1.3), (2.3), (2.8), (2.30) находим

$$u_4^0(z,p,M_2)=\nu^0\nu^{-1}(\partial H_4/\partial v_0)\,\partial H_4/\partial v_0,\quad v_0=0. \qquad (2.31)$$

$M_2=M_2(z,p)$ обозначает решение уравнения $H_4(z,p,\mu,0)=0$. Предполагается, что в D_0^1 оно существует и единственно. Подставляя (2.31) в (2.30), получим $L(z,p,u_4^0)=-\nu^0M_2$ и вид уравнения Беллмана для нестационарного режима

$$B_4^0[S]=f_0(z)+F[S]-G_4(z,p)=0,\quad z\in D_0^1\,(G_4\equiv\nu^0M_2(z,p)). \qquad (2.32)$$

Условия оптимальности регулятора (2.31) для решения $S_4(z)$ уравнения (2.32) находим из (2.29) заменой S_3, H_3, u_0 при $\delta\equiv 1$ на S_4, H_4, u_4^0. В силу $B^0\subset \operatorname{conv}(p)$ можно искать S в виде выпуклой функции от ξ.

3. Пример. Проведем субоптимальную x'-стабилизацию в $\xi(t,x,\alpha)$-переменных агрегации по функционалу [3], используя псевдоавтономность [3] и внутреннюю аппроксимацию ω' для $\omega^0=\{|u|\leqslant\varrho_0\}$ при $\dim y\leqslant\dim u$. Гамильтониан, функционал и ω' задачи имеют [3] значения

$$H'[S]\equiv H[S']+h'=$$

$$=p_0+p\cdot Y^0_1(t,y,\alpha)+f^0_1(t,y,\alpha)+K(z,\alpha,\nu',\gamma),\qquad p=\partial S/\partial y,$$

$$-h'\equiv f^0_2(z,\alpha)+f^1_2(z,u,\alpha)+p\cdot[Y_2(z,\alpha)+Y^{(2)}(z,u,\alpha)],\tag{3.1}$$

$$K=f^1_1(t,y,\nu',\alpha)+\nu'(b\cdot\gamma),$$

$$I'=\int_{t_0}^{t_1}(f_0+h')\,d\tau,\ f^1_1|_{\nu'=0}\equiv0,\ \omega'=\{u|\nu'\leqslant\nu_0\},$$

$$\nu'(u,q)=\nu'(-u,q)=\nu(C^*u,\alpha)|_{\alpha=0},$$

$$b=A^*_1p+b^1\neq0,\ u=\nu'\gamma,\ C=\|a^{1*}_{\sigma k},d_{\sigma h}\|,$$

$$d_{\sigma h}=d_{\sigma h}(q,\alpha)\ (\sigma=\overline{1,r},\ k=\overline{1,l},\ h=\overline{1,r-l}),$$

где $\det C\neq0$, $\operatorname{rank}A_1=\dim y=l$, $\partial f_1{}^1/\partial\nu'$ монотонна по ν'. Функции ν, $d_{\sigma h}$ выбраны из условия максимума объема ω' по C^0-мере и неравенств

$$\nu_0\leqslant\varrho_0\lambda_0\min_e\nu,\ \lambda^2_0=\min\lambda^2\geqslant\lambda^0(\alpha)>0\,(|u'|\leqslant\varrho_0,\ |CC^*-\lambda^2E|=0),\tag{3.2}$$

$$\nu_0\geqslant\varrho^0\lambda_*\max_e\nu,\ \lambda^2_*=\max\lambda^2\leqslant$$

$$\leqslant\lambda^*(\alpha)<\infty\,(|u'|\geqslant\varrho^0>0,\ \{u'\}=Fr\omega',\ \nu=\nu(e,\alpha),\ |e|=1),$$

$C^{-1}b^1\equiv b_1(t,y,\alpha)$, достаточных для $\varrho^0\leqslant|u'|\leqslant\varrho_0$ и t,y-автономности $S'=S'(t,y,\alpha)$. При линейной, вогнутой и выпуклой $f_1{}^1(\nu',\cdot)$, $d>0$ (в нестационарном режиме) из (3.1), (3.2) находим экстремальные регуляторы и уравнение Беллмана

$$u^0_\tau=0,\quad h<0,\quad B^0_\tau[S']=L[S']\equiv p_0+p\cdot Y_1(t,y,\alpha)+f^0_1(t,y,\alpha)=0\,(\tau=\overline{1,3}),\tag{3.3}$$

$$u^0_\tau=\nu_0\gamma^0,\quad h>0,\quad B^0_\tau[S']=L[S']+f^1_1(t,y,\nu_0,\alpha)-\nu_0w_0(t,y,p,\alpha)=0,$$

$$u^0_i=\beta_i\nu_0\gamma^0,\qquad h=0,$$

$$B^0_i[S']=L[S']=0\,(0\leqslant\beta_1\leqslant1,\ \beta_2=0,1,\ p_0=\partial S'/\partial t,\ i=1,2),$$

$$h=1-f^1_1(\nu_0,\cdot)/\nu_0w_0,$$

$$w_0=w'(b,z,\alpha)=w(\theta+b_1,\alpha)\ (\theta=(p_k,0_h)^*,\ h=\overline{1,r-l}),$$

где
$$w'(v,\cdot)=\max_\gamma(v\cdot\gamma)=$$

$$=w(u,\alpha)\in\{\nu(u)\}\ (\nu'(\gamma,\cdot)=1,\ u\equiv C^{-1}v,\ w(\lambda u)=\lambda w(u)),$$

$$-\gamma^0=\partial w'/\partial b=C^{-1*}\,\partial w/\partial u_0,\quad u_0=C^{-1}b,\quad d\equiv\partial K(0)/\partial\nu'\cdot\partial K(\nu_0)/\partial\nu'.$$

При $d\leqslant0$ для выпуклой $f_1{}^1(\nu',\cdot)$ имеем стационарный режим, в котором

$$u^0_4=[(1-\beta)\nu_1+\beta\nu_2]\gamma^0=(\partial P/\partial g_0)\cdot\gamma^0,$$

$$B^0_4[S']=L[S']-P(g_0,\cdot)=0\,(0\leqslant\beta\leqslant1),\tag{3.4}$$

$$\nu_1=\min\nu'_*,\quad \nu_2=\max\nu'_*:\quad \partial f^1_1/\partial\nu'_*=w_0;\quad P(g,t,y,\alpha)=$$

$$=g\cdot\nu'-f_1^1\geqslant 0\,(g_0=w_0),$$

$$g=\partial f_1^1/\partial\nu',\quad \nu'=\partial P/\partial g,\quad \partial^2P/\partial g^2>0;\quad P(g_0)>0,\quad 0\in\{\nu'_*\}\,(\nu_2-\nu_1<\nu_0).$$

Уравнения (3.3), (3.4) имеют размерность $l\ll n$. Пусть u_τ^0, u_4^0 дают x'-стабилизацию (1.1), (3.1) при условиях теоремы 1 или 2. Тогда u_τ^0, u_4^0 — субоптимальные регуляторы системы (1.1), (3.1). Минимизация по вектору агрегации α проводится аналогично [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., Прикл. мат. и мех., **34**, вып. 3, 440—456 (1970).
2. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, № 2, 178—187 (1975).
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **29**, № 1, 94—96 (1980).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/VII 1979

I. KEIS

INFORMATIIVSETE MUUTUJATEGA SÜSTEEMIDE OPTIMAALNE JUHTIMINE

Artiklis on käsitletud dünaamiliste süsteemide liikumise optimaalset stabiliseerimist osa (või kõigi) muutujate suhtes. Vastava kriteeriumi funktsioon on kumeras kompaktses piirkonnas asuvate juhtivjõudude järgi kumer. On esitatud Bellman-Jacobi võrrandi kujud erinevate ekstremaalsete režiimide puhuks ning tõestatud teoreemid globaalse ja lokaalse optimaalse juhitavuse tingimuste kohta.

I. KEIS

AN OPTIMAL CONTROL SYNTHESIS FOR THE SYSTEM WITH INFORMATIVE VARIABLES

The optimal x'-stabilization problem for large-scale system is considered. The Hamiltonian is a supposed convex function of controls lying in convex-compact domain of constraints. The state vector x is n-dimensional, its component x' being an m-dimensional vector. New aggregation variables composed of observable and x'-stable components y_k ($k\ll n$), are introduced in the form of a Lyapunov vector function. Sufficient conditions for optimal controllability are established in Theorems 1, 2. They represent a modification of the Krasovskii—Rumyantsev's results. The classification covering various extremal control policies, is also provided. The suboptimal control policy is derived by applying preceding results to a class of y-autonomous systems.