EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 29. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1980, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 29
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1980, № 1

УДК 512.572

В. ФЛЯЙШЕР

НОРМАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР

(Представлена А. Хумалом)

Пусть $\mathfrak{a}$ — некоторое многообразие Ω-алгебр. Многообразие $\mathfrak{a}$ назовем нормальным, если множество нульарных операций из Ω пусто и все тождества, определяющие многообразие $\mathfrak{a}$, таковы, что в левую и правую части рассматриваемого тождества входят одни и те же переменные. Алгебра A из $\mathfrak{a}$ называется проективной [1] (с. 156), если всякая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow\varphi \\ P & \xrightarrow{\pi} & Q\,, \end{array}$$

состоящая из Ω-алгебр из $\mathfrak{a}$ и их гомоморфизмов, где π — эпиморфизм, продолжается до коммутативной, т. е. существует гомоморфизм $\psi: A\rightarrow P$ такой, что $\pi\psi=\varphi$. Инъективная Ω-алгебра из $\mathfrak{a}$ определяется двойственным образом.

В настоящей статье рассматриваются вопросы описания нормальных многообразий Ω-алгебр, каждая из которых проективна (инъективна). Аналогичные вопросы решались для многообразий модулей над кольцами [2] (теорема 4.2), полигонов над моноидами [3–5], полумодулей над полукольцами [6, 7], минимальных абелевых многообразий Ω-алгебр с нулем [8], а также для категорий функторов из малой категории в категорию множеств [9].

Оказывается, требование, чтобы все Ω-алгебры из нормального многообразия $\mathfrak{a}$ были проективными, соответственно инъективными (фактически мы будем это требовать лишь для конечно порожденных алгебр из $\mathfrak{a}$), накладывает условие на сигнатуру Ω. А именно, в этом случае система Ω состоит только из унарных операций. Этот результат позволяет свести поставленный вопрос к соответствующему вопросу для полигонов над моноидами, решенному Л. А. Скорняковым [3].

Пусть $\mathfrak{a}$ — нормальное многообразие Ω-алгебр и $\Omega\neq\varnothing$. Введем одну простую конструкцию, которая понадобится нам в дальнейшем.

Пусть A — произвольная Ω-алгебра из многообразия $\mathfrak{a}$ и Θ ($\Theta\notin A$) — некоторый символ. Рассмотрим множество $A^*=A\cup\Theta$ и определим на нем операции из Ω следующим образом: для произвольной n-арной операции $\omega\in\Omega$ и любых $a_1, \ldots, a_n\in A^*$ положим

$$a_1\ldots a_n\omega=\begin{cases} a_1\ldots a_n\omega\in A, & \text{если } a_i\in A \text{ для всех } i=1, \ldots, n; \\ \Theta & \text{в противном случае.}\end{cases} \qquad (1)$$

Таким образом, формулы (1) задают на A^* структуру Ω-алгебры. Легко видеть, что Ω-алгебра A^* принадлежит многообразию $\mathfrak{a}$. Действительно, всякое тождество, выполняющееся в $\mathfrak{a}$, в силу нормальности $\mathfrak{a}$, имеет вид

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n),$$

где p и q — некоторые главные производные операции [10] (с. 155) от системы операций Ω. Тогда, ввиду (1), для произвольных $a_1, \ldots, a_n \in A^*$ в случае, если $a_i \in A$ для каждого $i = 1, \ldots, n$, будет

$$p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n),$$

поскольку $A \in \mathfrak{a}$, а если $a_i = \Theta$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то $p(a_1, \ldots, a_{i-1}, \Theta, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \Theta$ и $q(a_1, \ldots, a_{i-1}, \Theta, a_{i+1}, \ldots \ldots, a_n) = \Theta$, т. е.

$$p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n).$$

Следовательно, $A^* \in \mathfrak{a}$.

Введенную Ω-алгебру A^* назовем расширением Ω-алгебры A внешним нулем Θ.

Теорема 1. *Если все конечно порожденные Ω-алгебры из нормального многообразия $\mathfrak{a}$ инъективны, то Ω состоит только из унарных операций.*

Доказательство. Пусть все Ω-алгебры из $\mathfrak{a}$ инъективны. Предположим, что существует n-арная $(n \geqslant 2)$ операция $\omega \in \Omega$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Пусть A — произвольная конечно порожденная Ω-алгебра из $\mathfrak{a}$ и A^* — расширение алгебры A внешним нулем Θ. Через $B = A^* \times A^*$ обозначим прямой квадрат Ω-алгебры A^*. Ясно, что $B \in \mathfrak{a}$. Рассмотрим подмножество

$$C = \{(a, \Theta), (\Theta, a) \mid a \in A^*\}$$

в Ω-алгебре B. Легко видеть, ввиду (1), что C есть подалгебра в B и, значит, $C \in \mathfrak{a}$. Ясно также, что C конечно порождена. Ввиду инъективности C, диаграмма

$$\begin{array}{c} C \xrightarrow{\iota} B \\ \mathrm{I}\downarrow \quad \\ C, \quad \end{array}$$

где ι — естественное вложение, I — тождественный автоморфизм, продолжается до коммутативной, т. е. существует гомоморфизм $\varphi: B \to C$ такой, что $\varphi\iota = \mathrm{I}$. Тогда

$$\varphi(c) = \varphi\iota(c) = \mathrm{I}(c) = c \tag{2}$$

для любого $c \in C$.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные элементы из A и пусть, для определенности,

$$\varphi(a_1, a_1) = (a, \Theta) \tag{3}$$

для некоторого $a \in A^*$. Для операции $\omega \in \Omega$ имеем в B равенство $(a_1, a_1)(\Theta, a_2) \ldots (\Theta, a_n)\omega = (a_1\Theta \ldots \Theta\omega, a_1 \ldots a_n\omega) = (\Theta, a_1 \ldots a_n\omega)$. (Если элемент $\varphi(a_1, a_1)$ имеет вид (Θ, a), то рассматриваем соотношение, аналогичное последнему, но с переставленными координатами элементов из B). Применяя к элементам из этого соотношения гомоморфизм φ, учитывая (2) и (3), получим

$$(a,\Theta)(\Theta,a_2)\dots(\Theta,a_n)\omega=(\Theta,\ a_1\ \dots\ a_n\omega). \qquad (4)$$

Преобразование левой части равенства (4) дает

$$(a,\Theta)(\Theta,\ a_2)\dots(\Theta,\ a_n)\omega=(\Theta,\ \Theta),$$

т. е. равенство (4) принимает вид

$$(\Theta,\ \Theta)=(\Theta,\ a_1\dots a_n\omega).$$

Отсюда следует $a_1\dots a_n\omega=\Theta$. Последнее, ввиду предположения $a_i\in A$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, означает, что $\Theta\in A$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Аналогичный результат имеет место и в «проективном случае».

Теорема 2. *Если все конечно порожденные Ω-алгебры из нормального многообразия $\mathfrak{a}$ проективны, то Ω состоит только из унарных операций.*

Доказательство. Пусть G — свободная в $\mathfrak{a}$ алгебра, порожденная одним свободным образующим $g\in G$, и G^* — ее расширение внешним нулем Θ. Через F обозначим Ω-алгебру, состоящую из трехмерных векторов с элементами из G^*, на которых операции из Ω действуют покомпонентно. Ясно, что $F\in\mathfrak{a}$.

Для произвольных $f\in F$, $i=1,2,3$, через $f(i)$ обозначим i-ю координату вектора f. Через $\bar{a}_i\in F$ обозначим вектор, на i-м месте которого стоит элемент $a\in G^*$, а на остальных местах — Θ. Через $B\subset F$ обозначим подалгебру, порожденную элементами $\{\bar{g}_i,\ i=1,2,3\}$.

Пусть V — свободная Ω-алгебра из $\mathfrak{a}$, порожденная тремя свободными образующими v_1, v_2, v_3. Ввиду проективности Ω-алгебры B, диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow\mathrm{I} \\ V & \xrightarrow{\pi} & B, \end{array}$$

где I — тождественный автоморфизм, π — эпиморфизм такой, что $\pi(v_i)=\bar{g}_i$, можно продолжить до коммутативной некоторым гомоморфизмом $\varphi:B\to V$, т. е. $\pi\varphi=\mathrm{I}$. Покажем, что $\varphi(\bar{g}_i)=v_i$ для любого $i=1,\ 2,\ 3$. Для этого, ввиду $\pi\varphi(\bar{g}_i)=\mathrm{I}(\bar{g}_i)=\bar{g}_i=\pi(v_i)$, нам достаточно показать, что из $\pi(u)=\bar{g}_i$ для некоторого $u\in V$ следует $u=v_i$.

Действительно, возьмем для определенности $i=1$ и пусть $\pi(u)=\bar{g}_1$, $u=p(v_1,v_2,v_3)$, где $p=p(x,y,z)$ — некоторая главная производная операция от Ω. Покажем, что слово p не содержит букв y и z. Действительно,

$$\bar{g}_1=\pi(u)=\pi(p(v_1,\ v_2,\ v_3))=p(\pi(v_1),\ \pi(v_2),\ \pi(v_3))=p(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2,\ \bar{g}_3),$$

т. е. $\bar{g}_1=p(\bar{g}_1,\bar{g}_2,\bar{g}_3)$. Ввиду покоординатного применения операции p к элементам из B, для первой координаты вектора $\bar{g}_1$ имеем

$$g=p(\bar{g}_1(1),\bar{g}_2(1),\bar{g}_3(1))=p(g,\Theta,\Theta). \qquad (5)$$

Из свойств элемента Θ и того факта, что $g\neq\Theta$, следует, что слово p не содержит букв y и z, т. е. $p(x,y,z)=p(x)$. Кроме того, из (5) получаем

$$g=p(g). \qquad (6)$$

2*

Так как g — свободный образующий Ω-алгебры G, то равенство (6) есть тождество, выполняющееся в $\mathfrak{a}$. Следовательно, $u = p(v_1) = v_1$. Тем самым доказано, что $\varphi(g_i) = v_i$ для любого $i = 1, 2, 3$.

Предположим теперь, что существует хотя бы одна n-арная ($n \geqslant 2$) операция $\omega \in \Omega$, и покажем, что это приводит к противоречию.

Действительно, легко видеть, что в B выполняются равенства

$$\underbrace{\bar{g}_1\bar{g}_2\ldots\bar{g}_2}_{n-1}\omega=\bar{\Theta}, \quad \underbrace{\bar{g}_3\bar{g}_2\ldots\bar{g}_2}_{n-1}\omega=\bar{\Theta},$$

где $\bar{\Theta}$ — вектор, на каждом месте которого стоит символ Θ. Таким образом, в B выполняется равенство

$$\bar{g}_1\bar{g}_2\ldots\bar{g}_2\omega=\bar{g}_3\bar{g}_2\ldots\bar{g}_2\omega.$$

Применяя гомоморфизм φ к обеим частям этого равенства и учитывая, что $\varphi(\bar{g}_i) = v_i$ для любого $i = 1, 2, 3$, получим

$$v_1v_2\ldots v_2\omega=v_3v_2\ldots v_2\omega.$$

Так как $\{v_1, v_2, v_3\}$ — система свободных образующих Ω-алгебры V, то последнее равенство есть тождество в $\mathfrak{a}$, что противоречит предположению о том, что $\mathfrak{a}$ — нормальное многообразие. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 показывают, что нормальные многообразия Ω-алгебр, каждая из которых инъективна (проективна), исчерпываются соответствующими многообразиями унарных алгебр. Легко видеть, что совокупность унарных операций образует полугруппу S относительно операции суперпозиции. Две унарные операции из S, действующие на алгебрах из $\mathfrak{a}$ одинаково, будем отождествлять. Другими словами, если в $\mathfrak{a}$ выполняется тождество $x\nu = x\mu$ ($\nu, \mu \in S$), то будем считать, что $\nu = \mu$.

Если полугруппа S содержит тождественную унарную операцию ε, то, очевидно, S — моноид. Действительно, $x(\varepsilon\nu) = (x\varepsilon)\nu = x\nu$, $x(\nu\varepsilon) = (x\nu)\varepsilon = x\nu$, следовательно, $\varepsilon\nu = \nu\varepsilon = \nu$. Если S не содержит тождественной операции ε, то добавим ее к S и потребуем, чтобы в $\mathfrak{a}$ выполнялось тождество $x\varepsilon = x$. Новую полугруппу $S \cup \varepsilon$ снова обозначим через S. Теперь каждая алгебра из $\mathfrak{a}$, очевидно, становится правым полигоном [3] над моноидом S.

Таким образом, описание нормальных многообразий Ω-алгебр, каждая из которых проективна (инъективна), сводится к описанию многообразий правых S-полигонов над моноидом S, а фактически к описанию моноида S, над которым все правые полигоны проективны (инъективны). Такое описание получено в [3], а также может быть получено, как частный случай, из результатов [9] (см. также [4, 5]).

В частности, из теоремы 3 [3] вытекает

Следствие. *В нормальном многообразии $\mathfrak{a}$ все (конечно порожденные) Ω-алгебры проективны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}$ есть многообразие множеств и Ω либо пусто, либо состоит из одной тождественной унарной операции.*

«Инъективный случай» формулируется более громоздко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кон П., Универсальная алгебра, М., «Мир», 1968.
2. Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, М., Изд-во иностр. лит., 1960.

3. Скорняков Л. А., Сиб. матем. ж., № 9, 1139—1143 (1969).
4. Fountain, I. B., Proc. London Math. Soc., 3, № 28, 28—44 (1974).
5. Isbell, J. R., J. Algebra, 23, 228—238 (1972).
6. Фляйшер В. Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, № 366, 42—75 (1975).
7. Фляйшер В. Г., В кн.: Второй всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Кишинев, «Штиинца», 1974, с. 62.
8. Fleisher, V., In: Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai (17. Contributions to universal algebra), Szeged (Hungary), 1975, p. 113—132.
9. Полин С. В., Матем. сб., 93, 381—404 (1974).
10. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., «Наука», 1973.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 10/VII 1979

V. FLJAIŠER

NORMAALSED ALGEBRATE MUUTKONNAD

Ω-algebrate muutkonda $\mathfrak{A}$ nimetatakse normaalseks, kui Ω ei sisalda nullaarseid operatsioone ja selle muutkonna iga defineeriva samasuse vasak pool sisaldab samu muutujaid kui parem pool. Artiklis on näidatud, et kui normaalse Ω-algebrate muutkonna kõik lõplikult moodustatud algebrad on projektiivsed (injektiivsed), siis Ω koosneb ainult unaarsetest operatsioonidest. Selliste unaarsete algebrate muutkondade kirjeldus vastavate monoidide abil on teada [3].

V. FLJAIŠER

NORMAL VARIETIES OF ALGEBRAS

A variety $\mathfrak{A}$ of Ω-algebras is regarded as normal if the set of all nullary operations from Ω is empty and for every identity in *A* the sets of variables in its both sides coincide. It is shown that if in a normal variety of Ω-algebras all finitely generated algebras are injective (projective) then Ω consists of only unary operations. The description of such varieties of unary algebras in terms of properties of the monoid formed by the unary operations from Ω is known [3].