EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.1.14

УДК 531.011

И. КЕЙС

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ И РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ПО ГАМИЛЬТОНИАНУ И ИМПУЛЬСАМ ИНВАРИАНТОМ

I. KEIS. HAMILTONIAANI JA IMPULSSIDE LINEAARSE INVARIANDIGA KANOONILISE SÜSTEEMI EKSTREMAALSEST OMADUSEST JA DEKOMPOSITSIOONIST

I. KEIS. ON EXTREMAL PROPERTIES AND DECOMPOSITION OF CANONICAL SYSTEM WITH HAMILTONIAN-IMPULSES LINEAR INVARIANT

(Представлена Н. Алумяэ)

1. Рассмотрим систему Лагранжа с непотенциальными силами при линейных идеальных неголономных связях $c_{\gamma k}q^{\cdot}_k = c_\gamma$, либо голономную ($c_{\gamma k} \equiv c_\gamma \equiv 0$) в случае $\det \|\partial^2 L/\partial q^{\cdot}_j \partial q^{\cdot}_k\| \neq 0$:

$$\left(p^{\cdot}_k+\frac{\partial H}{\partial q_k}-Q_k\right)\delta q_k=0$$

$$\left(H=p_j q^{\cdot}_j-L,\ p_j=\frac{\partial L}{\partial q^{\cdot}_j},\ q^{\cdot}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\ Q_j=Q_j(t,q,q^{\cdot}),\ j,k=\overline{1,n}\right). \qquad (1)$$

Система (1) имеет инвариант $G=p_i g_i$ ($p_{n+1}=-H$, $g_i=g_i(q,t)$, $c_{\gamma k}=c_{\gamma k}(q,t)$, $c_\gamma=c_\gamma(q,t)$, $f^{\cdot}=df/dt$, $i=\overline{1,n+1}$) при условиях

$$\delta q^1_k=\varepsilon(g_k-g_{n+1}q^{\cdot}_k)\in\{\delta q_k\},$$

$$Q_k\delta q^1_k=0,\ g_{n+1}\frac{\partial H}{\partial t}=g^{\cdot}_k p_k-g_k\frac{\partial H}{\partial q_k}-Hg^{\cdot}_{n+1}\ (k=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

где всюду предполагается достаточная гладкость используемых функций. Далее ограничимся вообще неавтономной голономной системой Гамильтона

$$\frac{dx}{d\tau}=[x,F],\ \frac{dp}{d\tau}=[p,F]$$

$$(F=H+p_{n+1},\ t=x_{n+1},\ x=(x_i)^*,\ p=(p_s)^*,\ i,s=\overline{1,n+1}), \qquad (3)$$

$$g_{n+1}\frac{\partial H}{\partial t}+H\left(\frac{\partial g_{n+1}}{\partial t}+\frac{\partial g_{n+1}}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)=p_k\left(\frac{\partial g_k}{\partial t}+\frac{\partial g_k}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)-g_j\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

$$(j,k=\overline{1,n}),$$

$$G=g_ip_i=g=\text{const}\ \ \Big(Q_h=0,\ G^{\cdot}=[G,F]=$$
$$=\frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}-\frac{\partial G}{\partial p_s}\frac{\partial F}{\partial x_s}=0,\ F=-p_0=\text{const}\Big),$$

обладающей инвариантом G в силу уравнения (2) для H. Расширенным обратимым точечным преобразованием $x'_i=\partial T/\partial p'_i,\ F'=F,\ p_i=$ $=\partial T/\partial x_i$ $(T=f_i(x)p'_i,\ p'_i x'^{\cdot}_i=p_i x^{\cdot}_i,\ i=\overline{1,n+1})$ находим для (3) выражения

$$x'^{\cdot}_i=\partial F'/\partial p'_i,\ p'^{\cdot}_i=-\partial F'/\partial x'_i,\ x'_i=f_i(x),\ p_i=p'_s\,\partial f_s/\partial x_i, \tag{4}$$
$$p'_{n+1}=G(x(x'),\ p(x',p'))=g=\text{const},\ \ \partial F'/\partial x'_{n+1}=0$$
$$(x'=(x'_i)^*,\ p'=(p'_s)^*,\ s=\overline{1,n+1}),$$
$$F'=F(x(x'),p(x',p')),\ F(x,p)=F'(x'(x),p'(x,p))\ (F'=F=-p_0=\text{const}),$$

где $f_k(x)$, $f_{n+1}(x)$ — функционально независимые решения уравнений

$$g_i\,\partial f_k/\partial x_i=0,\ g_i\,\partial f_{n+1}/\partial x_i=1 \tag{5}$$
$$\Big(a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu b_\nu,\ \ \nu=\overline{1,m},\ \ i,s=\overline{1,n+1},\ \ k,j=\overline{1,n}\Big).$$

2. Обозначим через $X(x_k,\ p_r,\ g,\ p_0)=-p'_n$ решение уравнения $F'=$ $=-p_0$ в области $D'=\{x',p'\,|\,\partial F'/\partial p'_n\neq 0\}$, где $x'^{\cdot}_n\neq 0$ $(r,\sigma=$ $=\overline{1,n-1})$. Из (4), следуя [1], получим $2(n-1)$-мерную систему Гамильтона

$$\frac{dx'_r}{dx'_n}=\frac{\partial K}{\partial p'_r},\ \frac{dp'_r}{dx'_n}=-\frac{\partial K}{\partial x'_r}\ (K\equiv X|_{p_0=0},\ F=F'=0\sim p_0=0) \tag{6}$$

и уравнения зависимости $x'_n,\ x'_{n+1}(x'_r,\ p'_\sigma)$ от времени

$$\frac{dt}{dx'_n}=\frac{\partial X}{\partial p_0}\Big|_{p_0=0},\ \ \frac{dx'_{n+1}}{dx'_n}=\frac{\partial K}{\partial g}(p'_{n+1}=g=\text{const},\ p_0=\text{const}).$$

В области $D^0=\{D'\cap F'=0\cap\det A\neq 0\}$ $(A=\|\partial^2K/\partial p_\sigma\partial p_r\|)$ для (6) введем новую функцию $P(x'_j,\ dx'_r/dx'_n,\ g)$ Лагранжа

$$P=\Big(p_r\frac{dx'_r}{dx'_n}-K\Big)_{p_r=\psi_r}=\frac{dt}{dx'}(L-p'_{n+1}f^{\cdot}_{n+1})$$
$$\Big(\psi_r=\psi_r\Big(x'_j,\ \frac{dx'_\sigma}{dx'_n},\ g\Big),\ f^{\cdot}=\frac{df}{dt}\Big). \tag{7}$$

Из (6), (7) при условиях $x'_n[t_\alpha]=c_{n\alpha}=\text{const}$, $x'_r[t_\alpha]=c_{r\alpha}=\text{const}$ $(\alpha=1,2)$ имеем стационарность действия W в форме Якоби на траектории $x'_r(x'_n)$ движения системы Эйлера—Лагранжа с характеристической функцией

$$W=\int_{x'_{n1}}^{x'_{n2}}P(x'_j,dx'_r/dx'_n,g)\,dx'_n\,(g=\text{const},x'_{j\alpha}=x'_j[t_\alpha],j=\overline{1,n},r=\overline{1,n-1}).$$

Используя независимую переменную t, исходные q_k и соотношения (5), (7), для системы (3) с инвариантом G получим следующее обобщение принципа стационарного действия Мопертюи—Лагранжа. В классе движений $\{q[t]\} \in C_2$, удовлетворяющих условиям

$$G_* = (g_k - g_{n+1}\dot{q}_k)\partial L/\partial \dot{q}_k + g_{n+1}, \quad L = g = \mathrm{const} \quad (j, k = \overline{1, n}), \tag{8}$$

$$f_j(q_{k\alpha}, t_\alpha) = c_{j\alpha} = \mathrm{const}\,(G = g_j p_j - g_{n+1}H, \ L = p_j \dot{q}_j - H, \alpha = 1,2),$$

функционал

$$W_* = \int_{t_1}^{t_2} R_*\, d\tau = g f_{n+1}(q, t)\Big|_{t_2}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} L\, d\tau \left(R_* = L - G_* \dot{f}_{n+1}, \ G_* = G\big|_{p = \partial L/\partial \dot{q}} \right)$$

имеет стационарное значение на движении системы Эйлера—Лагранжа с инвариантом G_*. Действительно, для (3) при ограничениях (8) находим $\Delta W_* = 0$, где Δ — асинхронная вариация Гельдера $\delta + \Delta t\, d/dt$.

Гравитирующие и гиростатические механические системы [2, 3] являются частным видом динамических моделей (1), (3) с линейным по гамильтониану и импульсам инвариантом G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Whittaker, E. T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Cambridge, University Press, 1904.
2. Jacobi, C. G., Vorlesungen über Dynamik, Berlin, Reimer, 1884.
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 3, 277—284 (1975).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/VI 1978