

*Сирье КЭЭВАЛЛИК*

УДК 551.521

**ПОТОКИ ИЗЛУЧЕНИЯ В МУТНОМ СЛОЕ НАД ОТРАЖАЮЩЕЙ  
ПОВЕРХНОСТЬЮ***(Представлена К. К. Ребане)*

При определении величин нисходящих и восходящих потоков на основе данных самолетных, градиентных или других актинометрических измерений нередко возникает необходимость в соответствующей теоретической информации об изменении упомянутых величин с высотой. Поэтому в настоящей работе проведены некоторые модельные расчеты потоков излучения для плоскопараллельной поглощающей и рассеивающей среды, которая сверху освещена параллельным пучком монохроматической радиации, а снизу ограничена отражающей и поглощающей подстилающей поверхностью. Для сравнения сделаны расчеты и для соответствующих полубесконечных сред, обладающих такими же оптическими свойствами.

Для вычисления потоков излучения воспользуемся двухпоточковым приближением Шварцшильда [1, 2].

Пусть индикатриса рассеяния имеет сферическую форму. Тогда уравнение переноса радиации в случае плоскопараллельной среды, освещаемой параллельным пучком, записывается следующим образом [3]:

$$\cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta)}{d\tau} = -I(\tau, \vartheta) + \frac{p^2}{2} \int_0^\pi I(\tau, \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' + \frac{p^2}{4\pi} \Phi_0 \xi_0 e^{-\tau \xi_0}. \quad (1)$$

Здесь  $I$  — интенсивность рассеянного излучения,  $\tau$  — оптическая глубина (рис. 1),  $\vartheta$  — полярное расстояние,  $p^2$  — альбеда единичного рассеяния,  $\Phi_0$  — поток падающего на верхнюю границу излучения,  $\xi_0 = \sec \vartheta_0$ , где  $\vartheta_0$  — угол падения радиации на среду.

Определим потоки рассеянного излучения вниз и вверх:

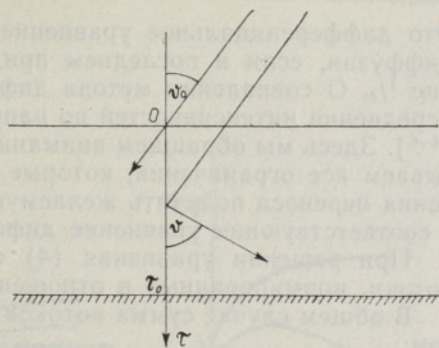
$$F \downarrow(\tau) = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\tau, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$F \uparrow(\tau) = -2\pi \int_{\pi/2}^\pi I(\tau, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

а также соответствующие средние интенсивности в нижней и верхней полусферах:

$$\bar{I} \downarrow(\tau) = \int_0^{\pi/2} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

Рис. 1. Модель плоскопараллельной мутной среды.



$$\bar{I} \uparrow (\tau) = \int_{\pi/2}^{\pi} I(\tau, \theta) \sin \theta \, d\theta.$$

Примем, что поле интенсивностей в среде не очень сильно отличается от изотропного. Это вполне допустимо, так как сферическая индикатриса рассеяния сглаживает не-изотропности падающего излучения.

Тогда, вынося за знак интеграла средние интенсивности  $\bar{I}$ , можем приближенно считать, что

$$\bar{I} \downarrow \approx \frac{F \downarrow}{\pi}, \quad \bar{I} \uparrow \approx \frac{F \uparrow}{\pi}. \quad (2)$$

Интегрируя теперь уравнение (1) по направлениям нижней и верхней полусферы и учитывая (2), получим уравнения для потоков:

$$\begin{aligned} \frac{dF \downarrow}{d\tau} &= (p^2 - 2)F \downarrow + p^2 F \uparrow + \frac{p^2}{2} \Phi_0 \xi_0 e^{-\tau \xi_0}, \\ \frac{dF \uparrow}{d\tau} &= (2 - p^2)F \uparrow - p^2 F \downarrow - \frac{p^2}{2} \Phi_0 \xi_0 e^{-\tau \xi_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия следующие:

$$\begin{aligned} F \downarrow (0) &= 0, \\ F \uparrow (\tau_0) &= A F \downarrow (\tau_0) + A \Phi_0 e^{-\tau_0 \xi_0}, \end{aligned}$$

где  $A$  — альbedo подстилающей поверхности, а  $\tau_0$  — оптическая толщина слоя.

Решать систему (3) можно несколькими способами. В настоящей работе система сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка, новой искомой функцией которого является сумма потоков рассеянного излучения

$$f(\tau) = 2\pi \int_0^{\pi} I(\tau, \theta) \sin \theta \, d\theta.$$

Для этого продифференцируем и сложим уравнения (3). После некоторых замен получим

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} = (1 - p^2) f(\tau) - \frac{p^2}{2} \Phi_0 \xi_0 e^{-\tau \xi_0}, \quad (4)$$

причем граничные условия теперь принимают вид

$$\left. \frac{df(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 2f(0),$$

$$(1 - A) [f(\tau_0) - A \Phi_0 e^{-\tau_0 \xi_0}] = (1 + A) \left[ A \Phi_0 e^{-\tau_0 \xi_0} - \frac{1}{2} \left. \frac{df(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} \right].$$

Это дифференциальное уравнение в точности совпадает с уравнением диффузии, если в последнем придать коэффициенту диффузии значение  $1/4$ . О совпадении метода диффузионных приближений с методами осреднения интенсивностей по направлениям упоминалось неоднократно [4-6]. Здесь мы обращаем внимание на этот факт лишь потому, что указываем все ограничения, которые необходимы, чтобы из точного уравнения переноса получить желаемую форму приближения Шварцшильда и соответствующее уравнение диффузии.

При решении уравнения (4) считаем, что  $\Phi_0 = 1$ , т. е. получаем потоки, нормированные в отношении потока падающей радиации.

В общем случае сумма потоков выражается довольно сложным образом:

$$f(\tau) = C_1 e^{2q\tau} + C_2 e^{-2q\tau} - \frac{2p^2 \xi_0 e^{-\tau \xi_0}}{\xi_0^2 - 4q^2}, \quad (5)$$

где

$$q^2 = 1 - p^2,$$

$$C_1 = [(q+1)e^{-\tau_0 \xi_0} B - p^2 \xi_0 (\xi_0 + 2) e^{-2q\tau_0} [(1-A) - (1+A)q]]/D,$$

$$C_2 = [(q-1)e^{-\tau_0 \xi_0} B + p^2 \xi_0 (\xi_0 + 2) e^{2q\tau_0} [(1-A) + (1+A)q]]/D,$$

$$B = (1-A)\xi_0(2-\xi_0) - 8Aq^2 + q^2 \xi_0 [\xi_0(1+A) - 2(1-A)],$$

$$D = (\xi_0^2 - 4q^2) \{ (q-1)e^{-2q\tau_0} [(1-A) - (1+A)q] + \\ + (q+1)e^{2q\tau_0} [(1-A) + (1+A)q] \}.$$

В частных случаях решение упрощается. Так, например, в непоглощающей среде при  $q^2 = 0$  оно имеет вид

$$f(\tau) = (1-A)\tau \frac{e^{-\tau_0 \xi_0} (2-\xi_0) - (2+\xi_0)}{\xi_0 [1+\tau_0(1-A)]} - \frac{2}{\xi_0} e^{-\tau \xi_0} + \\ + \frac{e^{-\tau_0 \xi_0} (2-\xi_0)(1-A) + (2+\xi_0)[(1+A) + 2\tau_0(1-A)]}{2\xi_0 [1+\tau_0(1-A)]},$$

что в случае  $A = 1$  дает формулу

$$f(\tau) = 1 + \frac{2}{\xi_0} (1 - e^{-\tau \xi_0}).$$

Последняя, как и ожидалось, совпадает с уравнением (4) для полубесконечной непоглощающей среды. Следует отметить, что частный случай  $A = 1$ ,  $q^2 = 0$  является единственным, когда замена среды конечной толщины с отражающей нижней поверхностью полубесконечной средой такого же характера не вносит погрешностей в результаты вычислений потоков излучения.

Если сумма потоков  $f(\tau)$  известна, то их разность, как результирующий поток рассеянной радиации, получается дифференцированием:

$$F(\tau) = 2\pi \int_0^{\pi} I(\tau, \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = -(df(\tau)/d\tau)/2. \quad (6)$$

И наконец, если возникает потребность в получении информации о потоках рассеянного излучения вверх и вниз, то и они определяются через величины  $f(\tau)$  и  $F(\tau)$ :

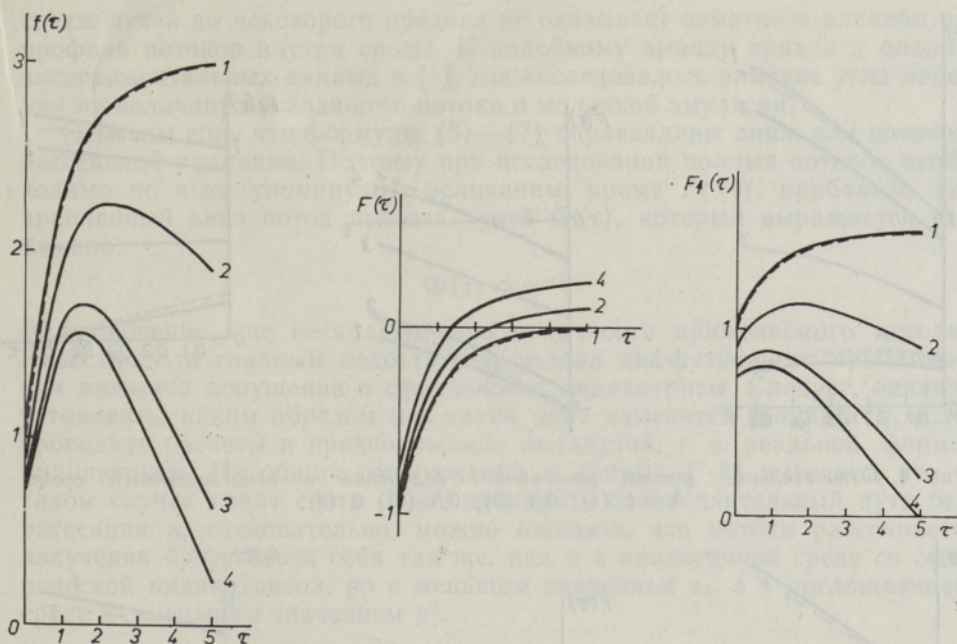


Рис. 2. Относительные потоки рассеянного излучения в конечной (—) и полубесконечной (---) непоглощающей среде:  $A=1$  (1), 0,9 (2), 0,5 (3) и 0 (4).

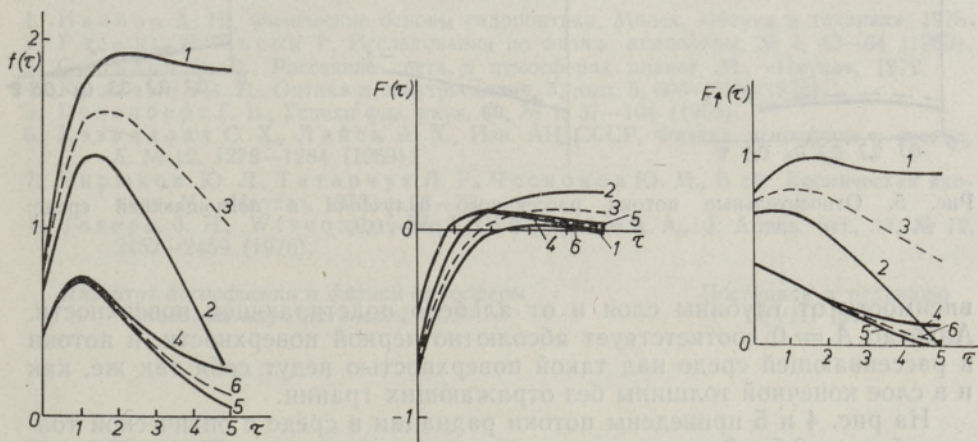


Рис. 3. Относительные потоки рассеянного излучения:  $A=1$  (1), 0 (2), полубесконечная среда (3);  $p^2=0,99$ ;  $A=1$  (4), 0 (5), полубесконечная среда (6);  $p^2=0,9$ .

$$F_{\uparrow}(\tau) = \frac{1}{2} [f(\tau) - F(\tau)], \tag{7}$$

$$F_{\downarrow}(\tau) = \frac{1}{2} [f(\tau) + F(\tau)].$$

Результаты модельных расчетов приведены на рис. 2—5. На рис. 2 и 3 изображены потоки  $f(\tau)$ ,  $F(\tau)$  и  $F_{\uparrow}(\tau)$  в оптически довольно толстом слое:  $\tau_0 = 5$  при  $\theta_0 = 0^\circ$ . Рис. 2 относится к непоглощающей среде, рис. 3 — к поглощающей. Изменение величины потоков показано в за-

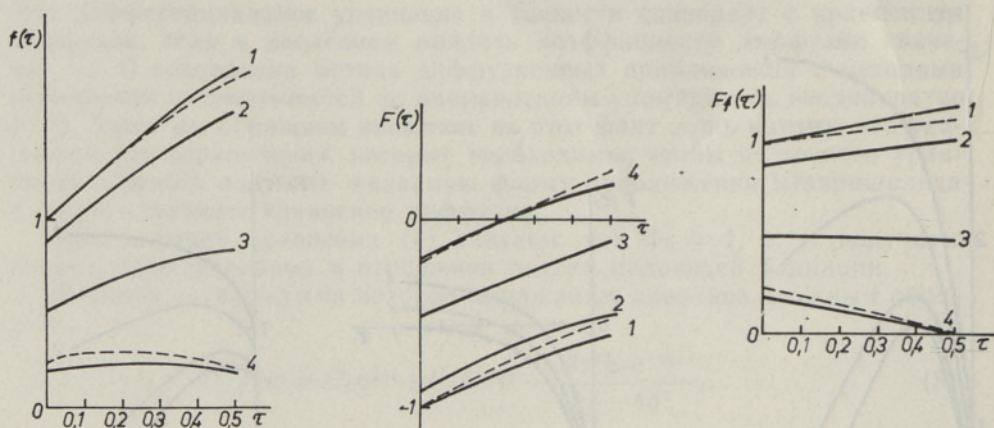


Рис. 4. Относительные потоки рассеянного излучения в непоглощающей среде:  $A = 1$  (1); 0,9 (2); 0,5 (3); 0 (4).

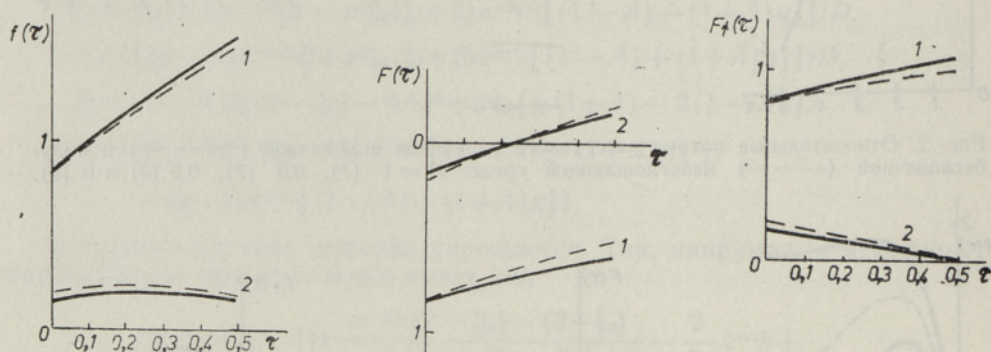


Рис. 5. Относительные потоки рассеянного излучения в поглощающей среде:  $A = 1$  (1), 0 (2);  $p^2 = 0,9$ .

зависимости от глубины слоя и от альбедо подстилающей поверхности. Альбедо  $A = 0$  соответствует абсолютно черной поверхности, и потоки в рассеивающей среде над такой поверхностью ведут себя так же, как и в слое конечной толщины без отражающих границ.

На рис. 4 и 5 приведены потоки радиации в среде с оптической толщиной  $\tau_0 = 0,5$ . Здесь пунктиром даны случаи, когда угол падения  $\vartheta_0 = 39^\circ$ , а непрерывной линией —  $\vartheta_0 = 0^\circ$ .

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Профили потоков рассеянной радиации существенно зависят от толщины слоя. Если в толстом слое восходящий поток  $F \uparrow(\tau)$  и пропорциональная величина  $f(\tau)$  плотность излучения имеют максимум, который поднимается выше с уменьшением альбедо  $A$ , то в тонком слое максимум отсутствует или малозаметен. Здесь величины  $F \uparrow(\tau)$  и  $f(\tau)$  могут с удалением от подстилающей поверхности и возрастать (при малых значениях  $A$ ) и убывать (большие  $A$ ).
2. Поглощение в толстом слое сказывается сильнее, чем в тонком: кривые на рис. 5 при  $q^2 = 0,1$  очень похожи на кривые рис. 4 при  $q^2 = 0$ , что нельзя сказать о рис. 2 и 3 для более толстого слоя.
3. Так как случаи  $\vartheta_0 = 0^\circ$  и  $\vartheta_0 = 39^\circ$  на рис. 4 и 5 отличаются незначительно, то можно сказать, что наклон падающих на верхнюю границу

среды лучей до некоторого предела не оказывает заметного влияния на профиль потоков внутри среды. К подобному выводу привел и анализ экспериментальных данных в [1], где исследовалось влияние угла падения на величину нисходящего потока в молочной эмульсии.

Отметим еще, что формулы (5)–(7) справедливы лишь для потоков рассеянной радиации. Поэтому при исследовании полных потоков необходимо ко всем упомянутым величинам, кроме  $F\uparrow(\tau)$ , прибавить направленный вниз поток прямых лучей  $\Phi(\tau)$ , который выражается несложно:

$$\Phi(\tau) = e^{-\tau/\tau_0}.$$

В заключение еще несколько слов о точности применяемого метода. Известно, что главным недостатком метода диффузионного приближения является допущение о сферичности индикатрисы. Следует, однако, установить, каким образом и в какой мере изменятся результаты, если проводить расчеты в предположении вытянутой, т. е. реальной, формы индикатрисы. Из общих соображений и данных [7, 8] вытекает, что в таком случае квант света будет проходить более длительный путь без рассеяния и, следовательно, можно ожидать, что потоки рассеянного излучения будут вести себя так же, как и в аналогичной среде со сферической индикатрисой, но с меньшим значением  $\tau_0$ , а в поглощающей среде и с меньшим значением  $p^2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. П., Физические основы гидрооптики, Минск, «Наука и техника», 1975.
2. Росс Ю., Нильсон Т., Исследования по физике атмосферы, № 4, 42–64 (1963).
3. Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.
4. Кузнецов В. И., Оптика и спектроскопия, 5, вып. 5, 606–611 (1958).
5. Розенберг Г. В., Успехи физ. наук, 69, № 1, 57–104 (1959).
6. Кэваллик С. Х., Лайк А. Х., Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 5, № 12, 1278–1284 (1969).
7. Бирюков Ю. Л., Титарчук Л. Г., Чесноков Ю. М., В сб.: Космическая икона, М., «Наука», 1973, с. 63–72.
8. Joseph, J. H., Wiscombe, W. J., Weinman, J. A., J. Atmos. Sci., 33, № 12, 2452–2459 (1976).

Институт астрофизики и физики атмосферы  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
14/VIII 1978

Sirje KEEVALLIK

#### KIIRGUSVOOD HAJUTAVAS KESKKONNAS PEEGELDAVA PINNA KOHAL

Üht difusioonilähenduse varianti kasutades on arvatud kiirgusvood hajutavas ja neelavas tasaparalleelses, ülalt paralleelse monokromaatilise kiirtekimbuga valgustatud kihis, mis on alt piiratud peegeldava ja neelava pinnaga. On arvatud voogude vertikaalsed profiilid. Peale selle on esitatud kasutatud difusioonilähenduse tuletamine üldisest kiirgusülesande võrrandist ning seejuures vajalikud kitsendavad eeldused. Saadud lähendus on identne Schwarzschildi lähenduse ühe modifikatsiooniga.

Sirje KEEVALLIK

## RADIATIVE FLUXES IN A TURBID MEDIUM ABOVE A REFLECTING SURFACE

The vertical profiles of the radiative fluxes in a scattering and absorbing plane-parallel layer are calculated. The layer is illuminated by a parallel monochromatic beam and the Lambert underlying surface is considered to be reflecting and absorbing.

A modification of the diffusion approximation has been applied as the computational method. The way of getting the approximation from the general radiation transfer equation is described. The necessary restrictions are spherical phase function and isotropic radiation field. The identity of the applied diffusion approximation to the Schwarzschild method is shown.

The results of sample computations are presented in Fig. 2—5, where the fluxes versus height in the layer have been plotted. The fluxes are:  $\bar{f}(\tau)$  — spherical,  $F(\tau)$  — net and  $F^{\uparrow}(\tau)$  — upward flux. They were computed for two values of the thickness of the layer ( $\tau_0=5$  and  $\tau_0=0,5$ ) and for several values of surface albedo  $A$ . In case of the thick layer results were obtained for three values of single scattering albedo  $p^2$ , while the zenith angle of the incident beam  $\theta_0=0^\circ$ . In the thin layer  $\theta_0=39^\circ$  was added and only two values of  $p^2$  were used.