EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.1.03

УДК 62—50

Эбу ТАММ

О МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ

(Представлена Н. Алумяэ)

1. Рассматривается задача на безусловный минимум функции вероятности

$$v(x, t_0) = P[f(x, \xi) < t_0] \tag{1}$$

в n-мерном евклидовом пространстве R^n, где ξ — случайный вектор со значениями в пространстве R^s, $f(x, \xi)$ — действительная функция, определенная на произведении пространств $R^n \times R^s$ и число t_0 фиксировано. Решение этой задачи каким-либо методом минимизации нелинейных функций часто затруднительно (из-за сложных вычислений значений функции $v(x, t_0)$ и ее производных) или совсем невозможно (распределение вектора ξ неизвестно). В таких случаях приходится тем или иным способом использовать значения (реализации) случайного вектора ξ. Ниже предлагается один такой подход: для функции (1) на основании k реализаций вектора ξ строится дифференцируемая по переменной x оценка $v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$, и задача о минимуме функции (1) заменяется задачей минимизации функции $v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$. Для обоснования такого метода надо выяснить, при каких условиях и с какой вероятностью оценка $v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ имеет по x точку локального минимума $x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, получить оценку вероятности ошибки $P[\|x^* - x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k)\| < \varepsilon]$, где x^* — точка локального минимума функции (1), и установить условия, при которых $x_k^*(\xi_1, \ldots \ldots, \xi_k)$ сходится по вероятности к x^*.

Для решения этих вопросов нам понадобится следующая

Теорема 1 [1]. *Пусть $H(x)$ и $h(x, \xi)$ — действительные функции, определенные на пространствах R^n и $R^n \times R^s$ соответственно, и пусть выполнены следующие условия.*

1. *Задача*

$$\min_{x \in R^n} H(x)$$

имеет точку локального минимума x^*.

2. *Матрица вторых производных $H''(x^*)$ положительно определена, т. е. при каждом $u \in R^n$*

$$u^T H''(x^*) u \geq M\|u\|^2, \quad M > 0.$$

3. *Функция $h(x, \xi)$ дважды дифференцируема по x для почти всех $\xi \in R^s$ и $\|h''_{xx}(x^1, \xi) - h''_{xx}(x^2, \xi)\| \leq L(\xi)\|x^1 - x^2\|$ для всех $x^1, x^2 \in R^n$.*

4. *$EL(\xi)$ и $\sigma^2[L(\xi)]$ конечны.*

5. *$Eh(x, \xi) = H(x)$, $Eh'_x(x^*, \xi) = H'(x^*)$ и $Eh''_{xx}(x^*, \xi) = H''(x^*)$.*

6. *$E\|h''_{xx}(x^*, \xi) - H''(x^*)\|^2$ и $\sigma^2[h'_{x_i}(x^*, \xi)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, конечны.*

Если существуют постоянные δ_1, δ_2, $0 < \delta_1 < M$, $\delta_2 > 0$ *такие, что выражение*

$$p(\delta_1, \delta_2) = 1 - \frac{1}{\delta_1^2} E\|h''_{xx}(x^*, \xi) - H''(x^*)\|^2 -$$

$$-\frac{16}{(M-\delta_1)^4}[EL(\xi)+\delta_2]^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma^2[h'_{x_i}(x^*, \xi)] - \frac{1}{\delta_2^2}\sigma^2[L(\xi)]$$

положительно, то существует измеримое множество $\mathfrak{B}(\delta_1, \delta_2) \subseteq R^s$ *такое, что*

1) *при* $\xi \in \mathfrak{B}(\delta_1, \delta_2)$ *задача*

$$\min_{x \in R^n} h(x, \xi)$$

имеет локальное решение $x^*(\xi)$,

2) $P[\mathfrak{B}(\delta_1, \delta_2)] \geqslant p(\delta_1, \delta_2)$,

3) $P[\|x^* - x^*(\xi)\| < \varepsilon$ *и* $\xi \in \mathfrak{B}(\delta_1, \delta_2)] \geqslant$

$$\geqslant p(\delta_1, \delta_2) - \frac{1}{\varepsilon^2(M-\delta_1)^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2[h'_{x_i}(x^*, \xi)]$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Не останавливаясь на тонкостях аналитического характера, в дальнейшем будем предполагать, что условия, достаточные для измеримости, интегрируемости и дифференцируемости по параметру под знаком интеграла (математического ожидания) встречающихся выражений, выполнены.

2. Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in R^n} v(x, t_0). \tag{2}$$

При каждом векторе x функция от t

$$v(x, t) = P[f(x, \xi) < t] \tag{3}$$

является функцией распределения случайной величины $f(x, \xi)$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые случайные векторы, распределения которых совпадают с распределением вектора ξ. Тогда $f(x, \xi_1), \ldots, f(x, \xi_k)$ — независимые случайные величины с распределением $v(x, t)$.

Воспользовавшись для построения дифференцируемой по x оценки $v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ функции $v(x, t_0)$ результатом Е. Парзена [2] об оценивании плотности вероятности, получим

$$v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) = \frac{1}{kh}\sum_{j=1}^{k}\int_{-\infty}^{t_0} K\left(\frac{t - f(x, \xi_j)}{h}\right)dt, \tag{4}$$

где

$$h = h(k), \quad \lim_{k\to\infty} h(k) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} kh(k) = \infty.$$

Дифференцируемая функция действительной переменной $K(y)$ удовлетворяет условиям

1) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)\,dy=1,$

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} yK(y)\,dy=0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2|K(y)|\,dy<\infty.$

Для выяснения свойств оценки (4) докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция $f(x,\xi)$ дважды дифференцируема по x для почти всех ξ и производная по x вектор-функции $g(x,h,\xi) = =\frac{1}{h}f'_x(x,\xi)K\left(\frac{t_0-f(x,\xi)}{h}\right)$ удовлетворяет условию Липшица $\|g'_x(x^1,h,\xi)-g'_x(x^2,h,\xi)\| \leqslant C(h,\xi)\|x^1-x^2\|$, то и оценка $v_k(x,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)$ дважды дифференцируема по x для почти всех $\xi_1,\ldots,\xi_k$ и $v''_{hxx}(x,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$\|v''_{hxx}(x^1,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)-v''_{hxx}(x^2,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}C(h,\xi_j)\|x^1-x^2\|.$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 2. *Пусть функция $K(y)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), множество $S\subset R^n$ и для всех $x\in S$ выполнены условия*

а) *$f(x,\xi)$ дифференцируема по ξ и $f'_\xi(x,\xi)\neq 0$ для почти всех ξ;*

б) *$v(x,t)$ дважды дифференцируема по x при $t=t_0$, трижды дифференцируема по t, а $v_t^{(3)}(x,t)$ дважды дифференцируема по x, причем $\|v''_{tt}(x,t)\|$, $\|v'''_{ttx}(x,t)\|$ и $\|v^{\mathrm{IV}}_{ttxx}(x,t)\|$ ограничены для $t\in R^1$.*

Тогда при $k\to\infty$

$$Ev_k(x,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)\to v(x,t_0),$$
$$Ev'_{kx}(x,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)\to v'_x(x,t_0)$$

и

$$Ev''_{hxx}(x,t_0,\xi_1,\ldots,\xi_k)\to v''_{xx}(x,t_0)$$

равномерно на множестве S.

Доказательство. По теореме 108 [3]

$$v(x,t)=P[f(x,\xi)<t]=\int\limits_{\{\xi:f(x,\xi)<t\}}p(\xi)\,d\xi=$$

$=\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\int\limits_{S_{\tau,x}}\frac{p(\xi)}{\|f'_\xi(x,\xi)\|}dS_{\tau,x},$ где поверхность $S_{\tau,x}=\{\xi:f(x,\xi)=\tau\}$

и $p(\xi)$ — плотность распределения вектора ξ. Отсюда следует

$$v'_t(x,t)=\int\limits_{S_{t,x}}\frac{p(\xi)}{\|f'_\xi(x,\xi)\|}dS_{t,x}.$$

Выражения для остальных производных, перечисленных в предположениях леммы, далее не используются. Заметим только, что выражение для производной $v'_x(x,t_0)$ найдено в [4], остальные производные вычисляются аналогично.

Учитывая, что предположения теорем 77 и 108 [3] выполнены, вычислим теперь

$$Ev_h(x,\, t_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_k) = \frac{1}{h}\int\limits_{R^s} p(\xi)\,d\xi \int\limits_{-\infty}^{t_0} K\Big(\frac{t - f(x,\xi)}{h}\Big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{t_0} dt \int\limits_{R^s} K\Big(\frac{t - f(x,\xi)}{h}\Big)\,p(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{t_0} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} K\Big(\frac{t-\tau}{h}\Big)\,d\tau \int\limits_{S_{\tau,x}} \frac{p(\xi)}{\| f'_\xi(x,\xi)\|}\,dS_{\tau,x} = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{h}\int\limits_{-\infty}^{t_0} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} K\Big(\frac{t-\tau}{h}\Big)\,v'_t(x,\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{t_0} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z)\,v'_t(x, t - hz)\,dz.$$

По формуле Тейлора

$$v'_t(x,\, t - hz) = v'_t(x,t) - v''_{tt}(x,t)\,hz +$$

$$+ \frac{1}{2}\,v'''_{ttt}(x, t - \Theta_1 hz)\,(hz)^2, \quad 0 < \Theta_1 < 1,$$

и с учетом свойств 1) и 2) функции $K(y)$ получаем

$$Ev_h(x,\, t_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_k) = v(x, t_0) + \frac{1}{2}\,h^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z)\,z^2 v''_{tt}(x,\, t_0 - \Theta_1 hz)\,dz. \tag{6}$$

Аналогично, так как в силу (5)

$$Ev'_{hx}(x,\, t_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_k) = \int\limits_{-\infty}^{t_0} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z)\,v''_{tx}(x,\, t - hz)\,dz,$$

$$Ev''_{hxx}(x,\, t_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_k) = \int\limits_{-\infty}^{t_0} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z)\,v'''_{txx}(x,\, t - hz)\,dz$$

и по формуле Тейлора

$$v''_{tx}(x,\, t - hz) = v''_{tx}(x,t) - v'''_{ttx}(x,t)\,hz + \frac{1}{2}\,v^{\mathrm{IV}}_{tttx}(x,\, t - \Theta_2 hz)\,(hz)^2,$$

$$v'''_{txx}(x,\, t - hz) = v'''_{txx}(x,t) - v^{\mathrm{IV}}_{ttxx}(x,t)\,hz + \frac{1}{2}\,v^{\mathrm{V}}_{tttxx}(x,\, t - \Theta_3 hz)\,(hz)^2,$$

$$0 < \Theta_2 < 1, \quad 0 < \Theta_3 < 1,$$

то

$$Ev'_{hx}(x,\, t_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_k) = v'_x(x, t_0) + \frac{1}{2}\,h^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z)\,z^2 v'''_{ttx}(x,\, t_0 - \Theta_2 hz)\,dz \tag{7}$$

и

$$Ev''_{hxx}(x,\, t_0,\, \xi_1,\, \ldots,\, \xi_k) = v''_{xx}(x, t_0) + \frac{1}{2}\,h^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(z)\,z^2 v^{\mathrm{IV}}_{ttxx}(x,\, t_0 - \Theta_3 hz)\,dz. \tag{8}$$

Из выражений (6)—(8) следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть*
а) *выполнены условия леммы* 1;
б) *задача* (2) *имеет точку локального минимума* x^* *и* $u^\mathrm{T} v''_{xx}(x^*, t_0) u \geqslant M\|u\|^2$, $M > 0$, *для любого* $u \in R^n$;
в) *выполнены условия леммы 2, где множество* S — *некоторая окрестность точки* x^*;
г) *при некотором* $\delta > 0$ $EC(h, \xi) \leqslant c$ *для всех* $|h| \leqslant \delta$. *Тогда для любого фиксированного числа* γ, $0 < \gamma < M$, *существует* k_1 *такое, что задача*

$$\min_{x \in R^n} Ev_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) \tag{9}$$

имеет при $k > k_1$ *локальное решение* x_k^*, *причем*

$$u^\mathrm{T} Ev''_{kxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) u \geqslant \frac{3}{4}(M - \gamma)\|u\|^2 \tag{10}$$

для любого вектора $u \in R^n$.

Доказательство. Так как x^* — точка локального минимума задачи (2), то $v'_x(x^*, t_0) = 0$ и уравнение

$$Ev'_{kx}(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) = 0 \tag{11}$$

можно представить в виде

$$Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)(x - x^*) = v'_x(x^*, t_0) - \\ - Ev'_{kx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - r(x - x^*), \tag{12}$$

где

$$r(x - x^*) = Ev'_{kx}(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - Ev'_{kx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - \\ - Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k). \tag{13}$$

Согласно лемме 2 [5], уравнение (12) имеет решение $x_k^* - x^*$, если при некоторых постоянных c_1, c_2

а) $\|[Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)]^{-1}\| \leqslant c_1$,

б) $r(0) = 0$ и $\|r'(x - x^*)\| \leqslant c_2 \|x - x^*\|$,

в) $\|v'_x(x^*, t_0) - Ev'_{kx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\| \leqslant 1/4 c_1^2 c_2$,

причем $\|x_k^* - x^*\| \leqslant c_1 \|v'_x(x^*, t_0) - Ev'_{kx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\|$.

По лемме 2 для любого $\gamma > 0$ найдется $k_{11} = k_{11}(\gamma)$ такое, что при $k > k_{11}$

$$\|Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - v''_{xx}(x^*, t_0)\| < \gamma,$$

откуда в силу предположений леммы следует $\|Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\| \geqslant M - \gamma$. Из последнего неравенства получим, что

$$u^\mathrm{T} Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) u \geqslant (M - \gamma)\|u\|^2$$

для любого $u \in R^n$. Таким образом, при $k > k_{11}$ матрица $E\, v''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ положительно определена, следовательно, существует обратная к ней матрица и

$$\|[Ev''_{kxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)]^{-1}\| \leqslant 1/(M - \gamma).$$

Если число k_{12} таково, что $|h| < \delta$ при $k > k_{12}$, то с помощью леммы 1 из (13) получим $\|r'(x - x^*)\| = \|Ev''_{hxx}(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) -$

$$-Ev''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\| \leqslant E\| v''_{hxx}(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) -$$

$$-v''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\| \leqslant E\frac{\sum\limits_{j=1}^{k} C(h, \xi_j)}{k}\|x - x^*\| =$$

$$= EC(h, \xi)\|x - x^*\| \leqslant c\,\|x - x^*\|$$

при $k > k_{12}$. Из (13) вытекает еще, что $r(0) = 0$.

По лемме 2 найдется k_{13} такое, что при $k > k_{13}$ $\|Ev'_{hx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_k) - v'_x(x^*, t_0)\| \leqslant (M - \gamma)^2/4c$. Следовательно, при $k > k_1$, $k_1 = \max[k_{11}, k_{12}, k_{13}]$, по лемме 2 [5] уравнение (12) имеет решение $x_k^* - x^*$, для которого верно

$$\|x_k^* - x^*\| \leqslant \frac{1}{M - \gamma}\|v'_x(x^*, t_0) - Ev'_{hx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\|. \tag{14}$$

Другими словами, необходимое условие минимума задачи (9) выполнено в точке x_k^*. Покажем, что выполнено и достаточное условие — матрица $Ev''_{hxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ положительно определена.

Поскольку $u^{\mathrm{T}}Ev''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)u \geqslant (M - \gamma)\|u\|^2$ и

$$|u^{\mathrm{T}}[Ev''_{hxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - Ev''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)]u| \leqslant$$

$$\leqslant \|Ev''_{hxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - Ev''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\|\,\|u\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c\,\|x_k^* - x^*\|\,\|u\|^2 \leqslant [c/(M - \gamma)]\,\|v'_x(x^*, t_0) - Ev'_{hx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots$$

$$\ldots, \xi_k)\|\,\|u\|^2 \leqslant [(M - \gamma)/4]\,\|u\|^2 < (M - \gamma)\,\|u\|^2$$

при $k > k_1$, то получаем, что

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{T}}Ev''_{hxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)u &= u^{\mathrm{T}}Ev''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)u + \\ + u^{\mathrm{T}}Ev''_{hxx}(x_k^*, \xi_1, \ldots, \xi_k)u &- u^{\mathrm{T}}Ev''_{hxx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)u \geqslant \\ &\geqslant \frac{3}{4}(M - \gamma)\,\|u\|^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1—3. *Пусть, кроме того,*

$$E\,\|g'_x(x, h, \xi) - Eg'_x(x, h, \xi)\|^2 \leqslant A^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma^2[g_i(x, h, \xi)] \leqslant B^2$$

и

$$\sigma^2[C(h, \xi)] \leqslant C^2$$

для всех $x \in R^n$ *и* $h \in R^1$, $|h| \leqslant \delta$, *где* $g_i(x, h, \xi)$ — i-*й компонент вектор-функции* $g(x, h, \xi)$.

Тогда при любых постоянных γ, δ_1 *и* δ_2, $0 < \gamma < M$, $0 < \delta_1 < 3(M - \delta_1)/4$, $\delta_2 > 0$ *и для достаточно больших* k *существует множество* $\mathfrak{B}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2) \subseteq \underbrace{R^s \times \ldots \times R^s}_{k}$ *такое, что*

1) *если* $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)$, *то задача*

$$\min_{x \in R^n} v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) \tag{16}$$

имеет локальное решение $x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k)$,

2) $P[\mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)] \geqslant p(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)$,

3) $P[\|x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k) - x^*\| < \varepsilon$ *и* $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)] \geqslant$

$$\geqslant p(k, \gamma, \delta_1, \delta_2) - \frac{4B^2}{k\varepsilon^2\{[3(M-\gamma)/4] - \delta_1\}^2},$$

где

$$p(k, \gamma, \delta_1, \delta_2) = 1 - \frac{1}{k}\left(\frac{A^2}{\delta_1^2} + \frac{16(c+\delta_2)^2 B^2}{\{[3(M-\gamma)/4] - \delta_1\}^4} + \frac{C^2}{\delta_2^2}\right)$$

положительное число.

Доказательство. Для задач (9) и (16) применима теорема 1. Действительно, условия 1 и 2 этой теоремы выполняются в силу леммы 3, а условия 3 и 4 — в силу предположений данной теоремы и леммы 1. Остается доказать, что $E\|v''_{kxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - Ev''_{kxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\|^2$ и $\sigma^2[v'_{kxt}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)]$ конечны. Вычисляем

$$E\|v''_{kxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - Ev''_{kxx}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{k^2} E\left\|\sum_{j=1}^{k} [g'_x(x_k^*, h, \xi_j) - Eg'_x(x_k^*, h, \xi_j)]\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k^2} E \sum_{j=1}^{k} \|g'_x(x_k^*, h, \xi_j) - Eg'_x(x_k^*, h, \xi_j)\|^2 \leqslant \frac{A^2}{k}.$$

Аналогично получаем, что $\sum_{i=1}^{n} \sigma^2[v'_{kxt}(x_k^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)] \leqslant B^2/k$. Таким образом, если $k > k_2$, $k_2 = \max\left[k_1, \frac{A^2}{\delta_1^2} + \frac{16(c+\delta_2)^2 B^2}{\{[3(M-\gamma)/4] - \delta_1\}^4} + \frac{C^2}{\delta_2^2}\right]$, то теорема 1 гарантирует существование множества $\mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)$ такого, что при $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)$ задача (16) имеет точку локального минимума $x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ и

$$P\left[\|x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k) - x_k^*\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)\right] \geqslant$$

$$\geqslant p(k, \gamma, \delta_1, \delta_2) - \frac{4B^2}{k\varepsilon^2\{[3(M-\gamma)/4] - \delta_1\}^2} \tag{17}$$

для любого $\varepsilon > 0$, где $p(k, \gamma, \delta_1, \delta_2) =$

$$= 1 - \frac{1}{k}\left(\frac{A^2}{\delta_1^2} + \frac{16(c+\delta_2)^2 B^2}{\{[3(M-\gamma)/4] - \delta_1\}^4} + \frac{C^2}{\delta_2^2}\right) \text{ — положительное число.}$$

По лемме 2 найдется k_3 такое, что при $k > k_3$ $\|Ev'_{kx}(x^*, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) - v'_x(x^*, t_0)\| < \varepsilon(M-\gamma)/2$, откуда с помощью неравенства (14) получим, что при $k > \max[k_1, k_3]$

$$\|x_k^* - x^*\| < \varepsilon/2. \tag{18}$$

По (17) и (18) при $k > \max[k_1, k_2, k_3]$ верно

$$P[\|x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k) - x^*\| < \varepsilon \text{ и } (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)] \geqslant$$
$$\geqslant p(k, \gamma, \delta_1, \delta_2) - \frac{4B^2}{k\varepsilon^2\{[3(M-\gamma)/4] - \delta_1\}^2}. \tag{19}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $k \to \infty$, *то* $P[\mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)] \to 1$, *а также* $P[\|x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k) - x^*\| < \varepsilon$ *и* $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathfrak{V}(k, \gamma, \delta_1, \delta_2)] \to 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tamm, E., Math. Operationsforsch. u. Statist., Ser. Optimierung, (в печати).
2. Parzen, E., Ann. Math. Statistics, 33, № 3, 1065—1076 (1962).
3. Шварц Л., Анализ, М., «Мир», 1972.
4. Райк Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, № 1, 3—9 (1975).
5. Поляк Б. Т., Ж. вычислит. мат. и мат. физ., 11, № 1, 3—11 (1971).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/IV 1978

Ebu TAMM

TÕENÄOSUSFUNKTSIOONI MINIMEERIMISEST

On vaadeldud ülesannet $\min_{x \in R^n} v(x, t_0)$, kus $v(x, t_0) = P[f(x, \xi) < t_0]$. Juhusliku vektori ξ realisatsioonide $\xi_1, \ldots, \xi_k$ alusel on konstrueeritud funktsioonile $v(x, t_0)$ kaks korda x järgi diferentseeruv hinnang $v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ ning leitud alumised tõkked tõenäosustele, et 1) ülesandel $\min_{x \in R^n} v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ on olemas lokaalne lahend $x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ ja 2) $\|x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k) - x^*\| < \varepsilon$, kus x^* on ülesande $\min_{x \in R^n} v(x, t_0)$ lokaalne lahend. Leitud tõkete väärtused lähenevad ühele, kui $k \to \infty$.

Ebu TAMM

ON MINIMIZATION OF THE PROBABILITY FUNCTION

The problem of minimizing the probability function $v(x, t_0) = P[f(x, \xi) < t_0]$ in n-dimensional Euclidean space R^n is considered, where ξ is a s-dimensional random vector and the real number t_0 is fixed. Let $x^* \in R^n$ be a local solution of this problem. Basing on k random independent realizations of the random vector ξ, a twice differentiable in x estimate $v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k) = \frac{1}{kh} \sum_{j=1}^{k} \int_{-\infty}^{t_0} K\left(\frac{t - f(x, \xi_j)}{h}\right) dt$ of the function $v(x, t_0)$ is introduced. Here the sequence $h = h(k)$ and the function $K(y)$ satisfy certain conditions. If k is large enough, then under the assumptions given in the article, the problem $\min_{x \in R^n} v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ has a local solution with positive probability. It is shown that if $k \to \infty$, then the probabilities of the random events 1) «the problem $\min_{x \in R^n} v_k(x, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_k)$ has a local solution $x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k)$» and 2) «$\|x_k^*(\xi_1, \ldots, \xi_k) - x^*\| < \varepsilon$» tend to 1.