EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.1.01

УДК 517.52

Г. КАНГРО

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ СО СКОРОСТЬЮ *

(Представлена А. Хумалом)

1. Пусть ** $A=(a_{nk})$ и $\lambda=(\lambda_n)$, где $0<\lambda_n\uparrow$. Последовательность $x=(\xi_k)$ называется регулярно A^λ-суммируемой к ξ, если

$$\lim_n \lambda_n\left(\sum_k a_{nk}\xi_k-\xi\right)=0, \tag{1}$$

и сильно A^λ-суммируемой в степени $r>0$ (коротко $[A^\lambda]_r$-суммируемой) к ξ, если

$$\lim_n \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\,|\xi_k-\xi|^r=0. \tag{2}$$

При $\lambda_n=O(1)$ (напр., при $\lambda_n=1$) A^λ-суммируемость переходит в A-суммируемость, а $[A^\lambda]_r$-суммируемость — в $[A]_r$-суммируемость. Отметим, что при $0<r'<r$ из $[A^\lambda]_r$-суммируемости последовательности x к ξ следует ее $[A^\lambda]_{r'}$-суммируемость к ξ, если метод A регулярен. Действительно, в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\lambda_n^{r'}\sum_k |a_{nk}|\,|\xi_k-\xi|^{r'}\leqslant\left(\sum_k |a_{nk}|^{r/(r-r')}\right)^{1-r'/r}\left(\lambda_n^r\sum_k |a_{nk}|\,|\xi_k-\xi|^r\right)^{r'/r},$$

откуда ввиду регулярности метода A, неравенства $r/(r-r')>1$ и равенства (2) вытекает $[A^\lambda]_{r'}$-суммируемость последовательности x к ξ.

Если $a_{n0}+a_{n1}+\ldots=1$, то из (2) при $r\geqslant1$ следует (1), т. е. из $[A^\lambda]_r$-суммируемости последовательности x при $r\geqslant1$ следует ее A^λ-суммируемость к тому же значению.

Рассмотрим ортогональный ряд

$$f=\sum a_n\varphi_n \tag{3}$$

с $\sum a_n^2<\infty$, где (φ_n) — система действительных функций, ортонормальная на заданном множестве X по некоторой положительной σ-аддитивной мере μ, а f — вещественно-значная функция, определенная почти всюду (п. в.) на X, к которой ряд $\sum a_n\varphi_n$ сходится в пространстве

* Это посмертная статья Г. Кангро, подготовленная на основе оставшихся заметок к печати его учениками С. Бароном и Э. Юримяэ.

** Свободные индексы и индексы суммирования пробегают все целочисленные значения 0, 1, 2, ...

L^2_μ (согласно теореме Рисса—Фишера). Возникает следующая проблема: при каких условиях, наложенных на метод A и скорость суммируемости λ, из A^λ-суммируемости п. в. ряда (3) следует его $[A^\lambda]_r$-суммируемость п. в.?

Поставленная проблема рассматривалась в [1] для метода Валле-Пуссена, в [2] для метода Чезаро (C, α) и в [3] для методов класса A^p. Ниже доказывается общая теорема, из которой можно вывести результаты работ [1–3], а также многие результаты, относящиеся к сильной суммируемости без скорости (т. е. к случаю $\lambda_n = 1$). Предварительно докажем несколько лемм.

2. Для регулярного метода суммирования $A = (a_{nk})$ введем обозначения

$$A_{nk}=\sum_{\nu=0}^{k}|a_{n\nu}|, \quad \alpha_{nk}=\sum_{\nu=k}^{\infty}a_{n\nu}. \tag{4}$$

В дальнейшем предполагается выполнение условия

$$\sum_k a_{nk}=1, \tag{5}$$

которое имеет место для всех практически важных методов суммирования. Из (5) в силу (4) вытекает

$$|1-\alpha_{nk}|\leqslant A_{nk}, \tag{6}$$

причем ввиду регулярности метода A имеем

$$A_{nk}=O(1). \tag{7}$$

При $0 \leqslant \theta < 1$ справедливо неравенство (см. [4], с. 5)

$$|a_{nk}|A_{nk}^{-\theta}\leqslant\frac{1}{1-\theta}(A_{nk}^{1-\theta}-A_{n,k-1}^{1-\theta}), \quad k\geqslant\varkappa,$$

где $\varkappa = \varkappa(n)$ — наименьшее значение индекса k, при котором $a_{nk} \neq 0$ (или $A_{nk} \neq 0$). Отсюда в силу (7) следует

$$\sum_{k=\varkappa}^{n}|a_{nk}|A_{nk}^{-\theta}=O(1), \quad 0\leqslant\theta<1. \tag{8}$$

Наконец, обозначим

$$s_k=\sum_{\nu\leqslant k}a_\nu\varphi_\nu, \quad \sigma_n=\sum_k a_{nk}s_k,$$

где ввиду регулярности метода A ряды σ_n сходятся в пространстве L^2_μ.

Лемма 1. *Из условий* ***

1° $\sum_k a_k^2\lambda_k^2<\infty$,

2° $\lambda_nA_{nk}^{\theta}=O(\lambda_k)$ *при некотором* $0 \leqslant \theta < 1$,

3° $\sum_{n\geqslant k}\frac{A_{nk}^{2(1-\theta)}}{\beta_n}=O(1)$,

*** Условие 2° при $\theta \in (0, 1)$ достаточно (а при некоторых ограничениях на величины A_{nk} и необходимо) для того, чтобы треугольный регулярный метод A сохранял λ-ограниченность (см. [4], с. 5).

4° $\sum\limits_{n<k} \frac{\alpha_{nk}^2}{\beta_n} = O(1)$,

где β_n *— некоторые положительные числа, вытекает*

$$\int \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} (\sigma_n - s_n)^2 \, d\mu = O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2. \tag{9}$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_{nk} a_k \varphi_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_{nk} s_k + \alpha_{nm} s_m,$$

в силу регулярности метода A и сходимости последовательности (s_k) в L^2_μ получаем

$$\sum_k \alpha_{nk} a_k \varphi_k = \sum_k a_{nk} s_k,$$

где ряд в левой части равенства сходится в L^2_μ. Следовательно,

$$\sigma_n - s_n = \sum_k \alpha_{nk} a_k \varphi_k - \sum_{k \leqslant n} a_k \varphi_k =$$
$$= \sum_{k \leqslant n} (\alpha_{nk} - 1) a_k \varphi_k + \sum_{k > n} \alpha_{nk} a_k \varphi_k.$$

После почленного интегрирования, допустимого ввиду слабой сходимости последнего ряда в L^2_μ, находим

$$\int (\sigma_n - s_n)^2 \, d\mu = \sum_{k \leqslant n} (\alpha_{nk} - 1)^2 a_k^2 + \sum_{k > n} \alpha_{nk}^2 a_k^2,$$

откуда после умножения на $(\lambda_n/\beta_n)^2$ и замены порядка суммирования получаем

$$\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} \int (\sigma_n - s_n)^2 d\mu = \sum_k a_k^2 \sum_{n \geqslant k} \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} (\alpha_{nk} - 1)^2 + \sum_{k>0} a_k^2 \sum_{n<k} \frac{\lambda_n^2 \alpha_{nk}^2}{\beta_n},$$

или, имея в виду (6) и условия 2°—4°, —

$$\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} \int (\sigma_n - s_n)^2 d\mu \leqslant O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2 \sum_{n \geqslant k} \frac{A_{nk}^{2(1-\theta)}}{\beta_n} + \sum_{k>0} a_k^2 \lambda_k^2 \sum_{n<k} \frac{\alpha_{nk}^2}{\beta_n} =$$
$$= O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2.$$

Применяя лемму Фату к последовательности

$$\left(\sum_{k \leqslant n} \frac{\lambda_k^2}{\beta_k} (\sigma_k - s_k)^2 \right),$$

в силу условия 1° получаем (9).

Лемма 2. *Из условий* 1°—4° *леммы* 1 *и условия*

5° $a_{nk} \beta_k = O(1) A_{nk}^{\beta}, \quad 0 < \beta \leqslant 1,$

следует

$$\int (\sup_n \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\,|\sigma_k - s_k|^r)^{2/r} d\mu = O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2 \tag{10}$$

при $0 < r \leqslant 2$, $r < \beta\theta^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $r < 2$ и $r = 2$.

1) Если $r < 2$, то, применяя к ряду

$$\sum_k |a_{nk}|\,|\sigma_k - s_k|^r = \sum_k \frac{|a_{nk}|\beta_k^{r/2}}{\lambda_k^r} \cdot \frac{\lambda_k^r |\sigma_k - s_k|^r}{\beta_k^{r/2}}$$

неравенство Гёльдера при $s = 2/(2-r)$ и $t = 2/r$, получаем

$$\sum_k |a_{nk}|\,|\sigma_k - s_k|^r \leqslant \left(\sum_k \frac{|a_{nk}|^s \beta_k^u}{\lambda_k^{2u}}\right)^{1/s} \left(\sum_k \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k}\right)^{1/t}, \tag{11}$$

где $u = rs/2 = s - 1$. Из условий 2°, 5° и $\lambda_n \uparrow$ следует

$$\lambda_n^r \left(\sum_k \frac{|a_{nk}|^s \beta_k^u}{\lambda_k^{2u}}\right)^{1/s} = \left[\lambda_n^{2u} \sum_k \frac{|a_{nk}|(|a_{nk}|\beta_k)^u}{\lambda_k^{2u}}\right]^{1/s} =$$

$$= O(1)\,[\sum_{k=\varkappa}^{n} |a_{nk}| A_{nk}^{u(\beta-2\theta)} + \sum_{k>n} |a_{nk}| A_{nk}^{\beta u}]^{1/s},$$

где $\varkappa = \varkappa(n)$ — наименьшее значение индекса k, при котором $a_{nk} \neq 0$. В квадратных скобках обе суммы ограничены при $\theta \leqslant \beta/2$ ввиду (7), а при $\theta > \beta/2$ — ввиду (8), так как (в силу неравенства $\theta < \beta/r$)

$$0 < u(2\theta - \beta) < \frac{r}{2-r}\left(\frac{2\beta}{r} - \beta\right) = \beta \leqslant 1.$$

Тем самым из (11) следует

$$\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\,|\sigma_k - s_k|^r = O(1) \left(\sum_k \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k}\right)^{r/2}, \tag{12}$$

откуда при помощи леммы 1 и получается (10).

2) Покажем, что условие (12) выполнено и при $r = 2$. Действительно, поскольку при $r = 2$ имеет место неравенство $\theta < \beta/2$, то из условий 5° и 2° вытекает

$$\frac{\lambda_n^2 |a_{nk}|\beta_k}{\lambda_k^2} = O(1)\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} A_{nk}^{\beta/2}\right)^2 = O(1).$$

Следовательно,

$$\lambda_n^2 \sum_k |a_{nk}|\,|\sigma_k - s_k|^2 = \sum_k \frac{\lambda_n^2 |a_{nk}|\beta_k}{\lambda_k^2} \cdot \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k} =$$

$$= O(1) \sum_k \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k},$$

что и доказывает справедливость соотношения (12), а вместе с тем и соотношения (10) — также при $r = 2$.

Лемма доказана.

Примечание 1. Из доказательства леммы 2 следует, что если $A = (a_{nk})$ — верхняя треугольная матрица (т. е. если $a_{nk} = 0$ при $k < n$), то условие 5° в лемме 2 можно заменить более слабым условием $a_{nk}\beta_k = O(1)$.

Лемма 3. *Пусть***** $\lambda_n \neq O(1)$. *Если метод A сохраняет ограниченность****** *и выполнено условие 2° леммы 1, то при $0 < p < \beta\theta^{-1}$ матрица*

$$(\lambda_n^p |a_{nk}| \lambda_k^{-p})$$

сохраняет класс нуль-последовательностей.

Доказательство. Нам надо доказать, что из условий леммы 3 вытекают условия (см. [10], с. 17)

$$\lim_n \lambda_n^p a_{nk} = 0, \quad \lambda_n^p \sum_k |a_{nk}| / \lambda_k^p = O(1). \tag{13}$$

Пусть число s удовлетворяет условию

$$p < s < \beta\theta^{-1}.$$

Из условия 2° леммы 1 получаем

$$\lambda_n^s A_{nk}^{\theta s} = O(1) \lambda_k^s,$$

где $0 \leqslant \theta s < 1$, ибо $\beta \leqslant 1$. Поскольку выполнено условие (7), то согласно (8) имеем

$$\lambda_n^s \sum_{k=\varkappa}^{n} \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k^s} = O(1) \sum_{k=\varkappa}^{n} \frac{|a_{nk}|}{A_{nk}^{\theta s}} = O(1),$$

откуда ввиду $p < s$ и $\lambda_n \uparrow \infty$ (и, значит, $\lambda_n^{p-s} \to 0$) при помощи (7) следуют условия (13).

Лемма доказана.

Лемма 4. *Из условий 1°—4° леммы 1 и условия 5° леммы 2 с $\beta = 1$ вытекает*

$$\lim_n \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\, |\sigma_k - s_k|^r = 0 \quad \text{п. в.} \tag{14}$$

при $0 < r \leqslant 2$, $r < \theta^{-1}$.

Доказательство. Ввиду условия 1° соответственно каждому числу $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что

$$\sum_{k>N} \lambda_k^2 a_k^2 < \varepsilon^3. \tag{15}$$

Обозначив

$$b_k = \begin{cases} a_k, & k \leqslant N, \\ 0, & k > N, \end{cases} \qquad c_k = \begin{cases} 0, & k \leqslant N, \\ a_k, & k > N, \end{cases}$$

находим, что $a_k = b_k + c_k$ и, следовательно,

**** Если $\lambda_n = O(1)$, то утверждение леммы имеет место, когда метод A регулярен.

***** Следовательно (см. [10], теорема 2.2), метод A удовлетворяет условию (7).

$$s_k = s_k(b) + s_k(c), \quad \sigma_n = \sigma_n(b) + \sigma_n(c),$$

где

$$s_k(b) = \sum_{\nu \leqslant k} b_\nu \varphi_\nu, \qquad \sigma_n(b) = \sum_k a_{nk} s_k(b).$$

В силу неравенства $|u+v|^r \leqslant 2^r \, (|u|^r + |v|^r)$ имеем

$$\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| \, |\sigma_k - s_k|^r \leqslant 2^r [A_n(b) + A_n(c)], \tag{16}$$

где

$$A_n(b) = \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| \, |\sigma_k(b) - s_k(b)|^r.$$

Достаточно показать, что

$$\lim_n A_n(b) = 0, \quad \lim_n A_n(c) = 0 \quad \text{п. в.}$$

При $k > N$ в силу (5) и определения b_k находим

$$\sigma_k(b) - s_k(b) = \sum_{\nu \leqslant N} a_{k\nu} s_\nu(b) + \sum_{\nu > N} a_{k\nu} s_N(b) - s_N(b) =$$

$$= \sum_{\nu \leqslant N} a_{k\nu} [s_\nu(b) - s_N(b)],$$

откуда при помощи первого из условий (13), взяв в нем $p = 1$, ввиду $\theta^{-1} > 1$ получаем

$$\lim_k \lambda_k [\sigma_k(b) - s_k(b)] = 0.$$

Отсюда на основе леммы 3 следует

$$\lim_n A_n(b) = 0. \tag{17}$$

Из условий 1°—5° согласно лемме 2 и условию (15) вытекает

$$\int [\sup_n A_n^{1/r}(c)]^2 d\mu \leqslant M \sum_{k > N} a_k^2 \lambda_k^2 < M \varepsilon^3 \tag{18}$$

при $0 < r \leqslant 2$, $r < \theta^{-1}$, где M — некоторая постоянная. Из (18) следует

$$\mu\{t\colon \overline{\lim_n} A_n^{1/r}(c) > \varepsilon\} \leqslant M\varepsilon. \tag{19}$$

Действительно, если бы имело место неравенство

$$\mu\{t\colon \overline{\lim_n} A_n^{1/r}(c) > \varepsilon\} > M\varepsilon,$$

то тем более

$$\mu\{t\colon [\sup_n A_n^{1/r}(c)]^2 > \varepsilon^2]\} > M\varepsilon$$

и, следовательно,

$$\int [\sup_n A_n^{1/r}(c)]^2 d\mu > M\varepsilon^3,$$

что противоречит неравенству (18).

При произвольном фиксированном $\delta > 0$ имеем

$$\{t\colon \overline{\lim_n} A_n^{1/r}(c) > 0\} \subset \bigcup_{k \geqslant 1} \left\{ t\colon \overline{\lim_n} A_n^{1/r}(c) > \frac{\delta}{2^k} \right\},$$

откуда ввиду (19)

$$\mu\{t\colon \overline{\lim_n} A_n^{1/r}(c) > 0\} \leqslant \sum_{k \geqslant 1} M \frac{\delta}{2^k} = M\delta$$

и при $\delta \to 0$

$$\lim_n A_n(c) = 0 \text{ п. в.} \tag{20}$$

Из (16) в силу (17) и (20) следует (14).

Лемма доказана.

Примечание 2. Если $A = (a_{nk})$ — верхняя треугольная матрица, то ввиду примечания 1 условие 5° можно заменить более слабым условием $a_{nk}\beta_k = O(1)$.

3. Следующая теорема дает ответ на поставленную в п. 1 проблему.

Теорема. *Если регулярный метод суммирования $A = (a_{nk})$ при условии* (5) *и скорость $\lambda = (\lambda_n)$ с $0 < \lambda_n \uparrow$ удовлетворяют условиям* 1°—5°, *то из регулярной A^λ-суммируемости п. в. ряда* (3) *к функции f следует его $[A^\lambda]_r$-суммируемость п. в. к f, если $0 < r \leqslant 2$, $r < \theta^{-1}$.*

Доказательство. Имеем

$$\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\,|s_k - f|^r \leqslant 2^r \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\,|s_k - \sigma_k|^r + 2^r \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}|\,|\sigma_k - f|^r,$$

где первый член в правой части неравенства стремится к нулю п. в. согласно лемме 4, а второй член — согласно лемме 3, поскольку $\lambda_k|\sigma_k - f|$, по предположению, стремится к нулю п. в.

При $\lambda_n = 1$ из теоремы при $\theta = 0$ получается следующее следствие (относительно условия в) см. примечания 1 и 2).

Следствие. *Если регулярный метод суммирования $A = (a_{nk})$ при условии* (5) *удовлетворяет условиям*

а) $\displaystyle\sum_{n \geqslant k} \frac{A_{nk}^2}{\beta_n} = O(1)$,

б) $\displaystyle\sum_{n < k} \frac{\alpha_{nk}^2}{\beta_n} = O(1)$,

в) $a_{nk}\beta_k = O(1)$

при некоторых $\beta_n > 0$, то из A-суммируемости п. в. ряда (3) *с $\sum a_k^2 < \infty$ к функции f следует его $[A]_r$-суммируемость п. в. к f, если $0 < r \leqslant 2$.*

Следствие содержит известные результаты для методов арифметических средних [5, 6], взвешенных средних Рисса (R, p_n) [7, 8], Валле-Пуссена ****** (V, α_n) [9]. Выполнение условий а)—в) проверяется просто, если положить $\beta_n = n + 1$, P_n/p_n, α_n соответственно.

****** Оказывается, что для метода арифметических средних и метода Валле-Пуссена имеет место даже очень сильная суммируемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexts, G., Králik, D., Acta math. Acad. sci. hung., **16**, № 1—2, 43—49 (1965).
2. Sunouchi, G., Indian J. Math., **9**, № 1, 237—246 (1967).
3. Болгов В. А., Ефимов А. В., Изв. АН СССР, Сер. матем., **35**, № 6, 1389—1408 (1971).
4. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **23**, № 1, 3—11 (1974).
5. Zygmund, A., Fund. math., **10**, 356—362 (1926).
6. Tandori, K., Acta sci. math., **19**, 18—25 (1958).
7. Meder, J., Stud. math., **20**, № 3, 285—300 (1961).
8. Leindler, L., Acta math. Acad. sci. hung., **13**, № 3—4, 401—414 (1962).
9. Leindler, L., Acta math. Acad. sci. hung., **16**, № 3—4, 375—387 (1965).
10. Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, «Валгус», 1977.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 9/III 1978

| *G. KANGRO* |

ORTOGONAALRIDADE TUGEV SUMMEERUVUS KIIRUSEGA

Olgu $A=(a_{nk})$ ja $\lambda=(\lambda_k)$, kus $0<\lambda_k\uparrow$. Jada $x=(\xi_k)$ nimetatakse regulaarselt A^λ-summeeruvaks arvuks ξ, kui x täidab tingimust (1) ning astmega $r>0$ tugevalt A^λ-summeeruvaks (lühidalt $[A^\lambda]_r$-summeeruvaks) arvuks ξ, kui x rahuldab tingimust (2). On tõestatud, et kui seost (5) rahuldava regulaarse menetluse A ja kiiruse λ puhul on täidetud tingimused 1°—5°, siis reaalse ortogonaalrea (3) regulaarsest A^λ-summeeruvusest peaaegu kõikjal funktsiooniks f järeldub selle rea $[A^\lambda]_r$-summeeruvus samaks funktsiooniks peaaegu kõikjal $r\leqslant 2$, $r<\theta^{-1}$ korral.

| *G. KANGRO* |

THE STRONG SUMMABILITY OF ORTHOGONAL SERIES WITH SPEED

Let $A=(a_{nk})$ and $\lambda=(\lambda_k)$, where $0<\lambda_k\uparrow$. The sequence $x=(\xi_k)$ is called regularly A^λ-summable to ξ if x satisfies the condition (1). The sequence x is called strongly A^λ-summable (briefly $[A^\lambda]_r$-summable) to ξ with the degree $r>0$, if for x the condition (2) is fulfilled.

It is proved: If A is a regular method with (5) and 1°—5° are satisfied, then the real orthogonal series (3) is almost everywhere $[A^\lambda]_r$-summable to the function f for $r\leqslant 2$, $r<\theta^{-1}$, if (3) is regularly A^λ-summable almost everywhere to the same f.