

Г. ҚАНГРО

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ СО СКОРОСТЬЮ *

(Представлена А. Хумалом)

1. Пусть ** $A = (a_{nk})$ и $\lambda = (\lambda_n)$, где $0 < \lambda_n \uparrow$. Последовательность $x = (\xi_k)$ называется регулярно A^λ -суммируемой к ξ , если

$$\lim_n \lambda_n \left(\sum_k a_{nk} \xi_k - \xi \right) = 0, \tag{1}$$

и сильно A^λ -суммируемой в степени $r > 0$ (коротко $[A^\lambda]_r$ -суммируемой) к ξ , если

$$\lim_n \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\xi_k - \xi|^r = 0. \tag{2}$$

При $\lambda_n = O(1)$ (напр., при $\lambda_n = 1$) A^λ -суммируемость переходит в A -суммируемость, а $[A^\lambda]_r$ -суммируемость — в $[A]_r$ -суммируемость. Отметим, что при $0 < r' < r$ из $[A^\lambda]_r$ -суммируемости последовательности x к ξ следует ее $[A^\lambda]_{r'}$ -суммируемость к ξ , если метод A регулярен. Действительно, в силу неравенства Гельдера имеем

$$\lambda_n^{r'} \sum_k |a_{nk}| |\xi_k - \xi|^{r'} \leq \left(\sum_k |a_{nk}|^{r/(r-r')} \right)^{1-r'/r} (\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\xi_k - \xi|^r)^{r'/r},$$

откуда ввиду регулярности метода A , неравенства $r/(r-r') > 1$ и равенства (2) вытекает $[A^\lambda]_{r'}$ -суммируемость последовательности x к ξ .

Если $a_{n0} + a_{n1} + \dots = 1$, то из (2) при $r \geq 1$ следует (1), т. е. из $[A^\lambda]_r$ -суммируемости последовательности x при $r \geq 1$ следует ее A^λ -суммируемость к тому же значению.

Рассмотрим ортогональный ряд

$$f = \sum a_n \varphi_n \tag{3}$$

с $\sum a_n^2 < \infty$, где (φ_n) — система действительных функций, ортонормальная на заданном множестве X по некоторой положительной σ -аддитивной мере μ , а f — вещественно-значная функция, определенная почти всюду (п. в.) на X , к которой ряд $\sum a_n \varphi_n$ сходится в пространстве

* Это посмертная статья Г. Кангро, подготовленная на основе оставшихся заметок к печати его учениками С. Бароном и Э. Юримяэ.

** Свободные индексы и индексы суммирования пробегают все целочисленные значения 0, 1, 2, ...



L^2_μ (согласно теореме Рисса—Фишера). Возникает следующая проблема: при каких условиях, наложенных на метод A и скорость суммируемости λ , из A^λ -суммируемости п. в. ряда (3) следует его $[A^\lambda]_r$ -суммируемость п. в.?

Поставленная проблема рассматривалась в [1] для метода Валле-Пуссена, в [2] для метода Чезаро (C, a) и в [3] для методов класса A^p . Ниже доказывается общая теорема, из которой можно вывести результаты работ [1–3], а также многие результаты, относящиеся к сильной суммируемости без скорости (т. е. к случаю $\lambda_n = 1$). Предварительно докажем несколько лемм.

2. Для регулярного метода суммирования $A = (a_{nk})$ введем обозначения

$$A_{nk} = \sum_{v=0}^k |a_{nv}|, \quad a_{nk} = \sum_{v=k}^{\infty} a_{nv}. \quad (4)$$

В дальнейшем предполагается выполнение условия

$$\sum_k a_{nk} = 1, \quad (5)$$

которое имеет место для всех практически важных методов суммирования. Из (5) в силу (4) вытекает

$$|1 - a_{nk}| \leq A_{nk}, \quad (6)$$

причем ввиду регулярности метода A имеем

$$A_{nk} = O(1). \quad (7)$$

При $0 \leq \theta < 1$ справедливо неравенство (см. [4], с. 5)

$$|a_{nk}| A_{nk}^{-\theta} \leq \frac{1}{1-\theta} (A_{nk}^{1-\theta} - A_{n,k-1}^{1-\theta}), \quad k \geq \kappa,$$

где $\kappa = \kappa(n)$ — наименьшее значение индекса k , при котором $a_{nk} \neq 0$ (или $A_{nk} \neq 0$). Отсюда в силу (7) следует

$$\sum_{k=\kappa}^n |a_{nk}| A_{nk}^{-\theta} = O(1), \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (8)$$

Наконец, обозначим

$$s_k = \sum_{v \leq k} a_v \varphi_v, \quad \sigma_n = \sum_k a_{nk} s_k,$$

где ввиду регулярности метода A ряды σ_n сходятся в пространстве L^2_μ .

Лемма 1. Из условий ***

$$1^\circ \sum_k a_k^2 \lambda_k^2 < \infty,$$

$$2^\circ \lambda_n A_{nk}^\theta = O(\lambda_k) \quad \text{при некотором } 0 \leq \theta < 1,$$

$$3^\circ \sum_{n \geq k} \frac{A_{nk}^{2(1-\theta)}}{\beta_n} = O(1),$$

*** Условие 2° при $\theta \in (0, 1)$ достаточно (а при некоторых ограничениях на величины A_{nk} и необходимо) для того, чтобы треугольный регулярный метод A сохранял λ -ограниченность (см. [4], с. 5).

$$4^\circ \sum_{n < k} \frac{\alpha_{nk}^2}{\beta_n} = O(1),$$

где β_n — некоторые положительные числа, вытекает

$$\int \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} (\sigma_n - s_n)^2 d\mu = O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2. \quad (9)$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля

$$\sum_{k=0}^m \alpha_{nk} a_k \varphi_k = \sum_{k=0}^{m-1} a_{nk} s_k + \alpha_{nm} s_m,$$

в силу регулярности метода A и сходимости последовательности (s_k) в L^2_μ получаем

$$\sum_k \alpha_{nk} a_k \varphi_k = \sum_k a_{nk} s_k,$$

где ряд в левой части равенства сходится в L^2_μ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_n - s_n &= \sum_k \alpha_{nk} a_k \varphi_k - \sum_{k \leq n} a_k \varphi_k = \\ &= \sum_{k \leq n} (\alpha_{nk} - 1) a_k \varphi_k + \sum_{k > n} \alpha_{nk} a_k \varphi_k. \end{aligned}$$

После почленного интегрирования, допустимого ввиду слабой сходимости последнего ряда в L^2_μ , находим

$$\int (\sigma_n - s_n)^2 d\mu = \sum_{k \leq n} (\alpha_{nk} - 1)^2 a_k^2 + \sum_{k > n} \alpha_{nk}^2 a_k^2,$$

откуда после умножения на $(\lambda_n/\beta_n)^2$ и замены порядка суммирования получаем

$$\sum_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} \int (\sigma_n - s_n)^2 d\mu = \sum_k a_k^2 \sum_{n \geq k} \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} (\alpha_{nk} - 1)^2 + \sum_{k > 0} a_k^2 \sum_{n < k} \frac{\lambda_n^2 \alpha_{nk}^2}{\beta_n},$$

или, имея в виду (6) и условия $2^\circ - 4^\circ$, —

$$\begin{aligned} \sum_n \frac{\lambda_n^2}{\beta_n} \int (\sigma_n - s_n)^2 d\mu &\leq O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2 \sum_{n \geq k} \frac{A_{nk}^{2(1-\theta)}}{\beta_n} + \sum_{k > 0} a_k^2 \lambda_k^2 \sum_{n < k} \frac{\alpha_{nk}^2}{\beta_n} = \\ &= O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2. \end{aligned}$$

Применяя лемму Фату к последовательности

$$\left(\sum_{k \leq n} \frac{\lambda_k^2}{\beta_k} (\sigma_k - s_k)^2 \right),$$

в силу условия 1° получаем (9).

Лемма 2. Из условий $1^\circ - 4^\circ$ леммы 1 и условия

$$5^\circ \alpha_{nk} \beta_k = O(1) A_{nk}^\beta, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

следует

$$f(\sup_n \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^r)^{2/r} d\mu = O(1) \sum_k a_k^2 \lambda_k^2 \quad (10)$$

при $0 < r \leq 2$, $r < \beta\theta^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $r < 2$ и $r = 2$.

1) Если $r < 2$, то, применяя к ряду

$$\sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^r = \sum_k \frac{|a_{nk}| \beta_k^{r/2}}{\lambda_k^r} \cdot \frac{\lambda_k^r |\sigma_k - s_k|^r}{\beta_k^{r/2}}$$

неравенство Гёльдера при $s = 2/(2-r)$ и $t = 2/r$, получаем

$$\sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^r \leq \left(\sum_k \frac{|a_{nk}|^s \beta_k^{su}}{\lambda_k^{2u}} \right)^{1/s} \left(\sum_k \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k} \right)^{1/t}, \quad (11)$$

где $u = rs/2 = s - 1$. Из условий 2° , 5° и $\lambda_n \uparrow$ следует

$$\begin{aligned} \lambda_n^r \left(\sum_k \frac{|a_{nk}|^s \beta_k^{su}}{\lambda_k^{2u}} \right)^{1/s} &= \left[\lambda_n^{2u} \sum_k \frac{|a_{nk}| (|a_{nk}| \beta_k)^u}{\lambda_k^{2u}} \right]^{1/s} = \\ &= O(1) \left[\sum_{k=\kappa}^n |a_{nk}| A_{nk}^{u(\beta-2\theta)} + \sum_{k>n} |a_{nk}| A_{nk}^{\beta u} \right]^{1/s}, \end{aligned}$$

где $\kappa = \kappa(n)$ — наименьшее значение индекса k , при котором $a_{nk} \neq 0$. В квадратных скобках обе суммы ограничены при $\theta \leq \beta/2$ ввиду (7), а при $\theta > \beta/2$ — ввиду (8), так как (в силу неравенства $\theta < \beta/r$)

$$0 < u(2\theta - \beta) < \frac{r}{2-r} \left(\frac{2\beta}{r} - \beta \right) = \beta \leq 1.$$

Тем самым из (11) следует

$$\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^r = O(1) \left(\sum_k \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k} \right)^{r/2}, \quad (12)$$

откуда при помощи леммы 1 и получается (10).

2) Покажем, что условие (12) выполнено и при $r = 2$. Действительно, поскольку при $r = 2$ имеет место неравенство $\theta < \beta/2$, то из условий 5° и 2° вытекает

$$\frac{\lambda_n^2 |a_{nk}| \beta_k}{\lambda_k^2} = O(1) \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} A_{nk}^{\beta/2} \right)^2 = O(1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^2 &= \sum_k \frac{\lambda_n^2 |a_{nk}| \beta_k}{\lambda_k^2} \cdot \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k} = \\ &= O(1) \sum_k \frac{\lambda_k^2 |\sigma_k - s_k|^2}{\beta_k}, \end{aligned}$$

что и доказывает справедливость соотношения (12), а вместе с тем и соотношения (10) — также при $r = 2$.

Лемма доказана.

Примечание 1. Из доказательства леммы 2 следует, что если $A = (a_{nk})$ — верхняя треугольная матрица (т. е. если $a_{nk} = 0$ при $k < n$), то условие 5° в лемме 2 можно заменить более слабым условием $a_{nk}\beta_k = O(1)$.

Лемма 3. Пусть **** $\lambda_n \neq O(1)$. Если метод A сохраняет ограниченность ***** и выполнено условие 2° леммы 1, то при $0 < p < \beta\theta^{-1}$ матрица

$$(\lambda_n^p |a_{nk}| \lambda_k^{-p})$$

сохраняет класс нуль-последовательностей.

Доказательство. Нам надо доказать, что из условий леммы 3 вытекают условия (см. [10], с. 17)

$$\lim_n \lambda_n^p a_{nk} = 0, \quad \lambda_n^p \sum_k |a_{nk}| / \lambda_k^p = O(1). \quad (13)$$

Пусть число s удовлетворяет условию

$$p < s < \beta\theta^{-1}.$$

Из условия 2° леммы 1 получаем

$$\lambda_n^s A_{nk}^{\theta s} = O(1) \lambda_k^s,$$

где $0 \leq \theta s < 1$, ибо $\beta \leq 1$. Поскольку выполнено условие (7), то согласно (8) имеем

$$\lambda_n^s \sum_{k=\kappa}^n \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k^s} = O(1) \sum_{k=\kappa}^n \frac{|a_{nk}|}{A_{nk}^{\theta s}} = O(1),$$

откуда ввиду $p < s$ и $\lambda_n \uparrow \infty$ (и, значит, $\lambda_n^{p-s} \rightarrow 0$) при помощи (7) следуют условия (13).

Лемма доказана.

Лемма 4. Из условий 1°—4° леммы 1 и условия 5° леммы 2 с $\beta = 1$ вытекает

$$\lim_n \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^r = 0 \quad \text{н. в.} \quad (14)$$

при $0 < r \leq 2$, $r < \theta^{-1}$.

Доказательство. Ввиду условия 1° соответственно каждому числу $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что

$$\sum_{k > N} \lambda_k^2 a_k^2 < \varepsilon^3. \quad (15)$$

Обозначив

$$b_k = \begin{cases} a_k, & k \leq N, \\ 0, & k > N, \end{cases} \quad c_k = \begin{cases} 0, & k \leq N, \\ a_k, & k > N, \end{cases}$$

находим, что $a_k = b_k + c_k$ и, следовательно,

**** Если $\lambda_n = O(1)$, то утверждение леммы имеет место, когда метод A регулярен.

***** Следовательно (см. [10], теорема 2.2), метод A удовлетворяет условию (7).

$$s_k = s_k(b) + s_k(c), \quad \sigma_n = \sigma_n(b) + \sigma_n(c),$$

где

$$s_k(b) = \sum_{v \leq k} b_v \varphi_v, \quad \sigma_n(b) = \sum_k a_{nk} s_k(b).$$

В силу неравенства $|u + v|^r \leq 2^r (|u|^r + |v|^r)$ имеем

$$\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - s_k|^r \leq 2^r [A_n(b) + A_n(c)], \quad (16)$$

где

$$A_n(b) = \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k(b) - s_k(b)|^r.$$

Достаточно показать, что

$$\lim_n A_n(b) = 0, \quad \lim_n A_n(c) = 0 \quad \text{п. в.}$$

При $k > N$ в силу (5) и определения b_k находим

$$\begin{aligned} \sigma_k(b) - s_k(b) &= \sum_{v \leq N} a_{kv} s_v(b) + \sum_{v > N} a_{kv} s_N(b) - s_N(b) = \\ &= \sum_{v \leq N} a_{kv} [s_v(b) - s_N(b)], \end{aligned}$$

откуда при помощи первого из условий (13), взяв в нем $p = 1$, ввиду $\theta^{-1} > 1$ получаем

$$\lim_k \lambda_k [\sigma_k(b) - s_k(b)] = 0.$$

Отсюда на основе леммы 3 следует

$$\lim_n A_n(b) = 0. \quad (17)$$

Из условий 1°—5° согласно лемме 2 и условию (15) вытекает

$$\int [\sup_n A_n^{1/r}(c)]^2 d\mu \leq M \sum_{k > N} a_k^2 \lambda_k^2 < M \varepsilon^3 \quad (18)$$

при $0 < r \leq 2$, $r < \theta^{-1}$, где M — некоторая постоянная. Из (18) следует

$$\mu \{t: \overline{\lim}_n A_n^{1/r}(c) > \varepsilon\} \leq M \varepsilon. \quad (19)$$

Действительно, если бы имело место неравенство

$$\mu \{t: \overline{\lim}_n A_n^{1/r}(c) > \varepsilon\} > M \varepsilon,$$

то тем более

$$\mu \{t: [\sup_n A_n^{1/r}(c)]^2 > \varepsilon^2\} > M \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\int [\sup_n A_n^{1/r}(c)]^2 d\mu > M \varepsilon^3,$$

что противоречит неравенству (18).

При произвольном фиксированном $\delta > 0$ имеем

$$\{t: \overline{\lim}_n A_n^{1/r}(c) > 0\} \subset \bigcup_{k \geq 1} \left\{t: \overline{\lim}_n A_n^{1/r}(c) > \frac{\delta}{2^k}\right\},$$

откуда ввиду (19)

$$\mu\{t: \overline{\lim}_n A_n^{1/r}(c) > 0\} \leq \sum_{k \geq 1} M \frac{\delta}{2^k} = M\delta$$

и при $\delta \rightarrow 0$

$$\lim_n A_n(c) = 0 \text{ п. в.} \quad (20)$$

Из (16) в силу (17) и (20) следует (14).

Лемма доказана.

Примечание 2. Если $A = (a_{nk})$ — верхняя треугольная матрица, то ввиду примечания 1 условие 5° можно заменить более слабым условием $a_{nk}\beta_k = O(1)$.

3. Следующая теорема дает ответ на поставленную в п. 1 проблему.

Теорема. Если регулярный метод суммирования $A = (a_{nk})$ при условии (5) и скорость $\lambda = (\lambda_n)$ с $0 < \lambda_n \uparrow$ удовлетворяют условиям 1°—5°, то из регулярной A^λ -суммируемости п. в. ряда (3) к функции f следует его $[A^\lambda]_r$ -суммируемость п. в. к f , если $0 < r \leq 2$, $r < \theta^{-1}$.

Доказательство. Имеем

$$\lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |s_k - f|^r \leq 2^r \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |s_k - \sigma_k|^r + 2^r \lambda_n^r \sum_k |a_{nk}| |\sigma_k - f|^r,$$

где первый член в правой части неравенства стремится к нулю п. в. согласно лемме 4, а второй член — согласно лемме 3, поскольку $\lambda_k |\sigma_k - f|$, по предположению, стремится к нулю п. в.

При $\lambda_n = 1$ из теоремы при $\theta = 0$ получается следующее следствие (относительно условия в) см. примечания 1 и 2).

Следствие. Если регулярный метод суммирования $A = (a_{nk})$ при условии (5) удовлетворяет условиям

$$\text{а) } \sum_{n \geq k} \frac{A_{nk}^2}{\beta_n} = O(1),$$

$$\text{б) } \sum_{n < k} \frac{a_{nk}^2}{\beta_n} = O(1),$$

$$\text{в) } a_{nk}\beta_k = O(1)$$

при некоторых $\beta_n > 0$, то из A -суммируемости п. в. ряда (3) с $\sum a_k^2 < \infty$ к функции f следует его $[A]_r$ -суммируемость п. в. к f , если $0 < r \leq 2$.

Следствие содержит известные результаты для методов арифметических средних [5, 6], взвешенных средних Рисса (R, p_n) [7, 8], Валле-Пуссена ***** (V, a_n) [9]. Выполнение условий а)–в) проверяется просто, если положить $\beta_n = n + 1$, P_n/p_n , a_n соответственно.

***** Оказывается, что для метода арифметических средних и метода Валле-Пуссена имеет место даже очень сильная суммируемость,

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexts, G., Králik, D., Acta math. Acad. sci. hung., **16**, № 1—2, 43—49 (1965).
2. Sunouchi, G., Indian J. Math., **9**, № 1, 237—246 (1967).
3. Болгов В. А., Ефимов А. В., Изв. АН СССР, Сер. матем., **35**, № 6, 1389—1408 (1971).
4. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **23**, № 1, 3—11 (1974).
5. Zygmund, A., Fund. math., **10**, 356—362 (1926).
6. Tandori, K., Acta sci. math., **19**, 18—25 (1958).
7. Meder, J., Stud. math., **20**, № 3, 285—300 (1961).
8. Leindler, L., Acta math. Acad. sci. hung., **13**, № 3—4, 401—414 (1962).
9. Leindler, L., Acta math. Acad. sci. hung., **16**, № 3—4, 375—387 (1965).
10. Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, «Валгус», 1977.

Тартуский государственный
университет

Поступила в редакцию
9/III 1978

G. KANGRO

ORTOGONAALRIDADE TUGEV SUMMEERUVUS KIIRUSEGA

Olgu $A = (a_{nh})$ ja $\lambda = (\lambda_h)$, kus $0 < \lambda_h \uparrow$. Jada $x = (\xi_h)$ nimetatakse regulaarselt A^λ -summeeruvaks arvuks ξ , kui x täidab tingimust (1) ning astmega $r > 0$ tugevalt A^λ -summeeruvaks (lühidalt $[A^\lambda]_r$ -summeeruvaks) arvuks ξ , kui x rahuldab tingimust (2). On tõestatud, et kui seost (5) rahuldava regulaarse menetluse A ja kiiruse λ puhul on täidetud tingimused 1° — 5° , siis reaalse ortogonaalrea (3) regulaarsest A^λ -summeeruvusest peaaegu kõikjal funktsiooniks f järeldub selle rea $[A^\lambda]_r$ -summeeruvus samaks funktsiooniks peaaegu kõikjal $r \leq 2$, $r < \theta^{-1}$ korral.

G. KANGRO

THE STRONG SUMMABILITY OF ORTHOGONAL SERIES WITH SPEED

Let $A = (a_{nh})$ and $\lambda = (\lambda_h)$, where $0 < \lambda_h \uparrow$. The sequence $x = (\xi_h)$ is called regularly A^λ -summable to ξ if x satisfies the condition (1). The sequence x is called strongly A^λ -summable (briefly $[A^\lambda]_r$ -summable) to ξ with the degree $r > 0$, if for x the condition (2) is fulfilled.

It is proved: If A is a regular method with (5) and 1° — 5° are satisfied, then the real orthogonal series (3) is almost everywhere $[A^\lambda]_r$ -summable to the function f for $r \leq 2$, $r < \theta^{-1}$, if (3) is regularly A^λ -summable almost everywhere to the same f .