

И. РАНДВЕЭ

## АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

Предлагается алгоритм для децентрализованного оптимального управления большой линейной дискретно-непрерывной системой. Алгоритм реализуется с помощью т. н. метода координации на псевдомодели [1], в котором для коррекции желаемых траекторий подсистем используется простой итерационный процесс.

### Постановка задачи, метод решения и предлагаемый алгоритм

Рассмотрим устойчивую, вполне управляемую систему большой размерности, состоящую из  $m$  подсистем:

$$\begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{m,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & & A_{1,m} \\ & \ddots & \\ A_{m,1} & & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,k-1} \\ \vdots \\ x_{m,k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1,k-1} \\ \vdots \\ u_{m,k-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$k=1, 2, \dots, N,$$

где  $u_{i,h}$  и  $x_{i,h}$  —  $n_i$ -мерные векторы управления и состояния  $i$ -й подсистемы в  $k$ -м интервале времени. Задача управления состоит в выборе векторов  $u_{i,h}$  подсистем, минимизирующих при заданном начальном состоянии  $x_{i,0}$  функционал

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N (x'_{i,k-1} C_i x_{i,k-1} + u'_{i,k-1} D_i u_{i,k-1}), \quad (2)$$

где  $C_i$  и  $D_i$  — симметричные, положительно определенные матрицы. На управление  $u_{i,h}$  никаких ограничений не накладывается.

Метод координации на псевдомодели [1] позволяет решить задачу (1)—(2) децентрализованно по двухступенчатой схеме: на первой ступени решаются  $m$  несвязанных между собою задач минимизации (2) при ограничениях, накладываемых на подсистемы:

$$x_{i,h} = A_i x_{i,h-1} + u_{i,h-1} + z_{i,h-1}, \quad i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

$$z_{i,h-1} = \sum_{j=1}^m A_{ij} x_{j,h-1}. \quad (4)$$

Здесь  $z_{i,h}$  фиксировано заданием желаемого движения подсистем  $x_{j,h}^*$ , начальное состояние  $x_{i,0}$  задано. На второй ступени осуществ-

вляется коррекция желаемого движения подсистем  $x_{i,h}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, N$ ). Рассмотрим это более подробно на задаче (1)–(2), записав ее в виде задачи обычной минимизации.

Найти

$$\min_{u_i} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x'_i E_i x_i + u'_i H_i u_i) \quad (5)$$

при

$$x_i = K_i u_i + w_i + z_i, \quad (6)$$

$$z_i = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m K_i L_{ij} x_j + w_{ij}. \quad (7)$$

Здесь  $x'_i = [x'_{i,1} \dots x'_{i,N-1}]$ ,  $E_i = I_{N-1} \oplus C_i$ ,  $H_i = I_{N-1} \oplus D_i$ ,  $I_{N-1}$  — единичная матрица размерности  $(N-1) \times (N-1)$ , символ  $\oplus$  означает прямое произведение матриц. Остальные составные векторы и матрицы постоянны, их вид приведен в [2].

Модифицируем задачу (5)–(7) согласно методу [1]:

$$\min_{u_i, x_i^*} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (x'_i E_i x_i + u'_i H_i u_i + (x_i - x_i^*)' c E_i (x_i - x_i^*)) \quad (8)$$

при ограничении (6) и фиксированном  $z_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_m^*)$ . Переменные  $u_i$  и  $x_i^*$  свободные,  $c \gg 1$ . Следуя методу [1], на первой ступени решим задачу минимизации (8) по  $u_i$  при ограничении (6) и фиксированных  $z_i$  и  $x_i^*$ . Это осуществляется полностью децентрализованно. В результате получим оптимальное  $x_i$ , зависящее от  $x_i^*$  и  $z_i$ , т. е.  $x_i(x_1^*, \dots, x_m^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Учитывая это, запишем необходимое условие минимума (8) по  $x_i^*$  в виде системы линейных уравнений

$$x_i(x_1^*, \dots, x_m^*) - x_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

решение которой определит  $x_{i,h}^*$ , равное оптимальной траектории задачи (6)–(8).

В сущности задача коррекции  $x_{i,h}^*$  есть задача решения линейной системы (9). Различные методы решения (9) дают различные схемы коррекции. Например, метод сопряженных градиентов приводит к централизованной схеме коррекции  $x_{i,h}^*$  [3]. Мы выбрали метод простой итерации, который позволяет решить задачу коррекции  $x_{i,h}^*$ , а тем самым и всю задачу управления полностью децентрализованно. В этом случае алгоритм предельно прост:

1. Всем подсистемам задается желаемая траектория движения  $x_{i,h}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, N$ ).

2. Определяются оптимальное управление и оптимальная траектория подсистемы при заданных  $x_{i,h}^*$  и  $z_{i,h}$ .

3. Эта траектория сообщается всем подсистемам и воспринимается как уточненное значение  $x_{i,h}^*$ .

У задач данного типа (квадратичный критерий при линейных ограничениях) повторение 2-го и 3-го действий приводит к решению исходной задачи (6)–(8).



Отметим, что при решении конкретных задач управления начальная траектория  $x_{i,k}^*$  может быть задана довольно точно, поскольку ее физическое содержание известно заранее. Определение же оптимального управления подсистемами можно осуществить известными методами, например методом динамического программирования или методом дискретного принципа максимума.

### Решение задачи управления подсистемой

Модифицируем функционал (2) и перепишем (опуская индекс) составляющую  $i$ -й подсистемы в виде

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \left( x_{k-1} - \frac{c}{1+c} x_{k-1}^* \right)' (1+c) C \left( x_{k-1} - \frac{c}{1+c} x_{k-1}^* \right) + u'_{k-1} D u_{k-1} + x_{k-1}^{*'} \left( c - \frac{c^2}{1+c} \right) C x_{k-1}^* \right\}$$

или, обозначив  $y_k = \frac{c}{1+c} x_k^*$ ,  $Q = (1+c)C$  и опустив независящие от  $u_k$  члены, в виде

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \{ (x_{k-1} - y_{k-1})' Q (x_{k-1} - y_{k-1}) + u'_{k-1} D u_{k-1} \}. \quad (10)$$

Уравнение подсистемы запишется как

$$x_k = A x_{k-1} + u_{k-1} + z_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Начальное состояние  $x_0$ , а также  $y_k$  и  $z_k$  заданы, управление  $u_k$  свободно.

Определим управление  $u_k$  ( $k=0, 1, \dots, N-1$ ), минимизирующее функционал (10) при ограничении (11), методом дискретного принципа максимума. Решение, при данных условиях, принимает вид

$$u_k = -D^{-1} G_{k+1} (S_{k+1} (A x_k + z_k) + g_{k+1}), \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

Матрица  $S_k$  определяется из решения уравнения

$$S_k = A' G_{k+1} S_{k+1} A + Q, \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

при условии  $S_N = 0$ , где

$$G_{k+1} = (I + S_{k+1} D^{-1})^{-1}.$$

Составляющая  $g_k$  определяется из решения уравнения

$$g_k = A' G_{k+1} (g_{k+1} + S_{k+1} z_k) - Q y_k$$

при  $g_N = 0$ . Подставив  $u_k$  из соотношения (12) в уравнение движения (11), получим оптимальную траекторию подсистемы, которая сообщается остальным подсистемам для вычисления по формуле (4) уточненного значения  $z_k$ .

### Численный пример

Решим задачу (1)–(2), взяв  $\dim x = 10$ , для различных значений матриц  $A$  в (1). Затем определим по изложенному алгоритму число

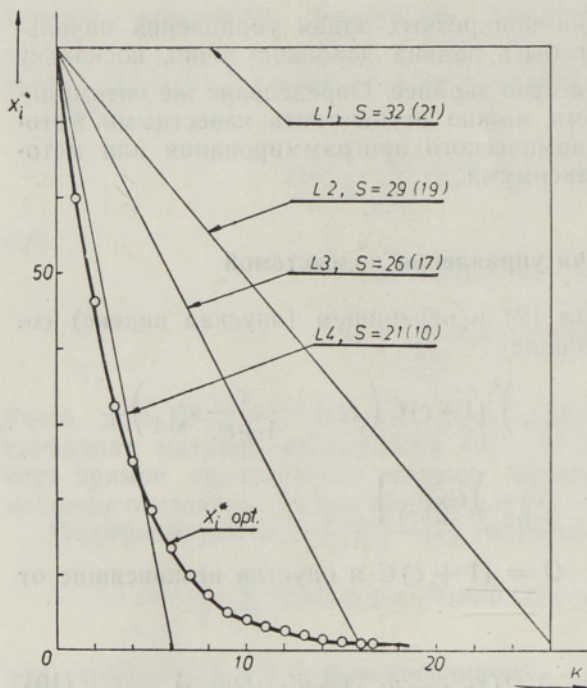


Рис. 1.

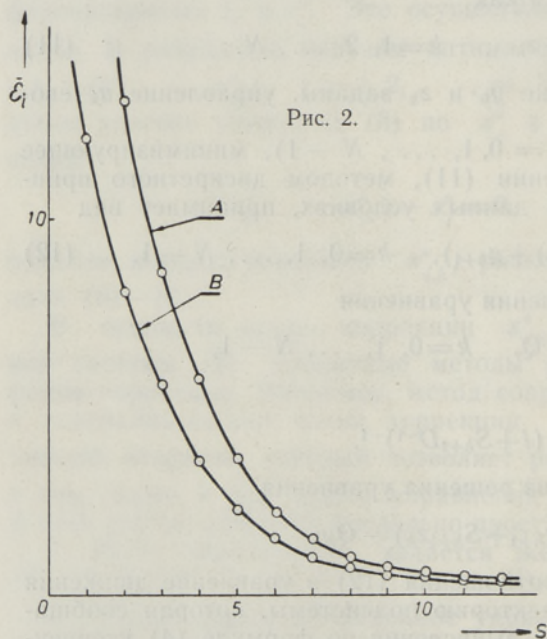


Рис. 2.

коррекции  $x_{i,h}^*$ , приняв  $\dim x_i = 1$ , до совпадения с заданной точностью  $x_{i,h}^*$  и оптимальной траектории при нескольких начальных  $x_{i,h}$ .

В качестве иллюстрации результатов расчета на рис. 1 приведено число коррекций  $S$  начиная с приближений  $L1-L4$  до совпадения  $x_{i,h}^*$  с оптимальной траекторией. Точность — два знака после запятой. Сравниваются две системы: несвязанная (числа в скобках) и сильносвязанная [4], имеющие примерно одинаковые оптимальные траектории. Данные расчета:  $a_i = 0,14$  (0,99);  $a_{ij} = 0,09$  (0,00);  $x_{i,0} = 80$ ;  $d_i = 2,0$ ;  $c_i = 0,5$ ;  $d_{ij} = c_{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 10$ ;  $i \neq j$ );  $c = 3$ ,  $N = 26$ .

Рис. 2 иллюстрирует уменьшение среднеквадратичного рассогласования траекторий сильносвязанной подсистемы в зависимости от числа коррекций  $S = 1, 2, \dots$ . Кривая  $A$  характеризует приближение  $x_{i,h}^*$  начиная с  $L4$  к оптимальной траектории задачи (1) — (2). Кривая  $B$  показывает уменьшение рассогласования между оптимальной траекторией и траекторией, полученной реализацией на системе (1) управления, определенного по предложенному алгоритму с точностью до одной, двух и более итераций.

### Заключение

Главное достоинство предложенного алгоритма состоит в том, что при его использовании не требуется централизованной обработки ин-



формации. Задача оптимального управления системой большой размерности решается по частям, а частные задачи определяются известными методами на ЭВМ, установленных в подсистемах.

Число итераций, необходимое для достижения заданной точности, возрастает по мере того, как взаимосвязь подсистем становится сильнее, а точность задания начальной траектории движения — слабее (рис. 1). Несмотря на сильную взаимосвязь подсистем, итерационный процесс коррекции  $x_{i,h}^*$  сходится весьма быстро (рис. 2, кривая А). Реализация управления на объекте приводит к траектории движения, почти неотличимой от оптимальной (рис. 2, кривая В).

Управление большой взаимосвязанной системой можно организовать и в реальном времени. В этом случае необходимая точность задания  $x_{i,h}^*$  должна обеспечиваться знанием физического содержания траектории движения подсистем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Optimization methods for large scale systems, New York, 1971, pp. 164—167.
2. Рандвее И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 12, 54 (1972).
3. Singh, M. G., Preprints of IFAC-IFORS symp. on optimization methods applied aspects, Varna, Oct. 1974, pp. 145—154.
4. Milne, R., Internat. J. Control., 2, No. 4, 171 (1965).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
15/XII 1976

I. RANDVEE

#### SEOSTATUD ALAMSÜSTEEMIDE DETSENTRALISEERITUD JUHTIMISE ALGORITM

Esitatud lineaarse, ajas diskreetse süsteemi detsentraliseeritud juhtimise algoritm põhineb I. D. Pearsoni optimeerimismetodil, milles alamsüsteemide soovitud trajektoori korrigeerimiseks on kasutatud lihtsat iteratsiooniprotsessi.

I. RANDVEE

#### CONTROL ALGORITHM FOR INTERCONNECTED SUBSYSTEMS

A simple algorithm for decentralized linear quadratic control of interconnected time-discrete subsystems is suggested. The approach is the pseudo-model coordination method of I. D. Pearson with desired trajectory, equal to the subsystem solution in previous iteration.