EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 1

УДК 519.95

*Т. ТОБИАС*

# УСЛОВИЯ КУНА—ТАККЕРА ДЛЯ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

1. Рассмотрим задачу

$$F(x)=\int\limits_S f_{10}(s_1,x_1(s_1))\,\sigma(ds_1)+$$

$$+\int\limits_{S\times S}\int f_{20}(s_1,s_2,x_1(s_1),x_2(s_1,s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2)\to\min, \qquad (1)$$

$x_1(s_1)\in C_1$ почти всюду (п. в.),

$$\int\limits_S f_{1i}(s_1,x_1(s_1))\,\sigma(ds_1)\leqslant 0, \quad i=1,\ldots,m_1, \qquad (2)$$

$$x_2(s_1,s_2)\in C_2 \text{ п. в.}, \quad \int\limits_{S\times S}\int f_{2i}(s_1,s_2,x_1(s_1),x_2(s_1,s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2)\leqslant 0,$$

$$i=1,\ldots,m_2. \qquad (3)$$

Обозначим через $(S,\mathfrak{F},\sigma)$ основное вероятностное пространство. Пусть $C_1\subseteq R_{n_1}$ и $C_2\subseteq R_{n_2}$ — замкнутые с непустой внутренностью выпуклые множества. Предположим, что: 1) $f_{1i}(s_1,\cdot)$, $i=0,\ldots,m_1$, и $f_{2i}(s_1,s_2,\cdot,\cdot)$, $i=0,\ldots,m_2$, — конечные и выпуклые функции в пространствах $R_{n_1}$ и $R_{n_1}\times R_{n_2}$ соответственно для почти всех $s=(s_1,s_2)\in S\times S$; 2) $f_{1i}(\cdot,x_1)$, $i=0,\ldots,m_1$, и $f_{2i}(\cdot,\cdot,x_1,x_2)$, $i=0,\ldots,m_2$, — измеримые и суммируемые функции для всех $(x_1,x_2)\in R_{n_1}\times R_{n_2}$.

Решение $x=(x_1(s_1),\ x_2(s_1,s_2))$ будем искать в пространстве $X=L^p_{n_1}(S)\times L^p_{n_2}(S\times S)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Целью данной статьи является выведение условий Куна—Таккера для характеризации решения задачи (1)—(3). По внешнему виду задача (1)—(3) напоминает обычную задачу программирования в функциональных пространствах, для которой теория необходимых условий хорошо разработана (см., напр., [1]). Отличает же стохастические задачи то обстоятельство, что решение их должно быть измеримым относительно выбранной σ-алгебры, которая описывает всю имеющуюся информацию. В модели (1)—(3) это выражается следующим образом.

На первом этапе решение $x_1$ является функцией от наблюдения $s_1$ при ограничениях (2). Потери измеряются функцией $f_{10}(s_1,x_1(s_1))$. На втором этапе поступает следующее наблюдение $s_2$, и решение $x_2$ зависит уже от $s_1$ и $s_2$ при ограничениях (3). Так как ограничения (2) и (3) являются безусловными, т. е. ограничения (3) не зависят от наблюденного значения $s_1$ на втором этапе, то решение $x = (x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))$ можно вычислить до наблюдений. Однако требование, что решение на первом этапе может зависеть только от $s_1$, представляет собой дополнительное ограничение в задаче (1)—(3), и это ограничение находит отражение в условиях Куна—Таккера.

Идея о том, что зависимость решения от разной информации есть дополнительное ограничение, которое вписывается в обычную схему теории минимизации, высказана в [2]. В [3–6] была подробно исследована двухэтапная задача выпуклого стохастического программирования с зависящими от наблюдений ограничениями на втором этапе. В данной работе ограничения интегральные. При выводе соответствующих результатов мы воспользуемся методом и результатами из [3, 4].

Более общие результаты в этом направлении получены в [7, 8]. Существование стохастического множителя Лагранжа в модели (1)—(3) вытекает из этих результатов.

2. Рассмотрим возмущенную задачу. Пусть $u \in U = R_{m_1} \times R_{m_2}$. Определим функцию $F\colon X \times U \to (-\infty, \infty]$ следующим образом. Если

$$x_1(s_1) \in C_1 \text{ п. в.}, \int\limits_S f_{1i}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) \leqslant u_{1i}, \quad i = 1, \ldots, m_1, \tag{2'}$$

и

$$x_2(s_1, s_2) \in C_2 \text{ п. в.}, \iint\limits_{S\times S} f_{2i}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2)) \times \\ \times \sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) \leqslant u_{2i}, \quad i = 1, \ldots, m_2, \tag{3'}$$

то

$$F(x, u) = \int\limits_S f_{10}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) + \iint\limits_{S\times S} f_{20}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2).$$

В противном случае $F(x, u) = \infty$.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала $F(x, u)$ по $x$. Задача (1)—(3) заключается тогда в минимизации $F(x, 0)$.

Пусть $Y = L^q_{n_1}(S) \times L^q_{n_2}(S \times S)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и $V = R_{m_1} \times R_{m_2}$. Определим дуальность между $X \times U$ и $Y \times V$ обычным соотношением

$$\langle (x, u), (y, v) \rangle = \int\limits_S (x_1(s_1), y_1(s_1))\,\sigma(ds_1) + \\ + \iint\limits_{S\times S} (x_2(s_1, s_2), y_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) + \sum u_{1i} v_{1i} + \sum u_{2i} v_{2i}. \tag{4}$$

$A = \{x_1(\cdot) \in L^p_{n_1}(S) : x_1(s_1) \in C_1 \text{ п. в.}\}$ является выпуклым и слабо (в случае $p = \infty$ — слабо *) замкнутым множеством в $L^p_{n_1}(S)$ (см. [9], с. 357).

Допустим, что

$$\int\limits_S f_{1i}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) \neq -\infty, \quad \forall x_1(\cdot) \in L^p_{n_1}(S), \\ i = 0, \ldots, m_1. \tag{5}$$

Тогда функционал $\int\limits_S f_{1i}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1)$ — слабо полунепрерывен снизу в $L^p_{n_1}(S)$ (см. [10]) и поэтому его надграфик — слабо замкнутое множество относительно двойственности (4).

Если

$$\int\limits_{S\times S}\int f_{2i}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) \neq -\infty,$$

$$\forall x \in X,\ i = 0, \ldots, m_2, \tag{5'}$$

то аналогичным свойством обладает множество, определяемое ограничением (3').

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (5'). *Тогда* $F(x,u)$ *является выпуклым и полунепрерывным снизу функционалом относительно двойственности* (4).

Действительно, пусть ограничение (2') определяет множество $A_1 \subset X \times U$. Функционал $F(x,u)$ можно записать в виде $F(x,u) = F_1(x,u) + F_2(x,u)$, где

$$F_1(x,u) = \begin{cases} \int\limits_S f_{10}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1), & (x,u) \in A_1; \\ \infty, & (x,u) \overline{\in} A_1. \end{cases}$$

Аналогично определяется $F_2(x,u)$.

Функционал $F_1(x,u)$ можно представить в виде

$$F_1(x,u) = \int\limits_S f_{10}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) + \chi_{A_1}, \text{ где } \chi_{A_1} = \begin{cases} 0, & (x,u) \in A_1; \\ \infty, & (x,u) \overline{\in} A_1. \end{cases}$$

Первое слагаемое полунепрерывно снизу относительно двойственности (4). Так как $A_1$ замкнуто относительно (4), то $\chi_{A_1}$, а следовательно, и $F_1(x,u)$ тоже полунепрерывны снизу относительно (4).

Аналогично доказывается полунепрерывность снизу функционала $F_2(x,u)$.

Лемма 2. *Пусть множества* $C_1$ *и* $C_2$ *ограничены. Тогда при каждом* $u \in U$ *существует* $x \in L^\infty_{n_1}(S) \times L^\infty_{n_2}(S\times S)$, *минимизирующее* $F(x,u)$.

Лемма вытекает из леммы 1 и результатов [10].

Определим функцию $\varphi(u) = \inf\limits_{x\in X} F(x,u) = F(\bar{x}, u)$. Согласно лемме 1, $\varphi(u)$ является выпуклой полунепрерывной снизу функцией.

Выпишем для задачи (1)—(3) функцию Лагранжа (ср. [3]).

$$L(x,v) = \inf_{u\in U}\{\langle u, v\rangle + F(x,u)\} =$$

$$= \sum v_{1i}\int\limits_S f_{1i}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) + \sum v_{2i}\int\limits_{S\times S}\int f_{2i}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2)) \times$$

$$\times \sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) + \int\limits_S f_{10}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) +$$

$$+ \int\limits_{S\times S}\int f_{20}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2), \quad \text{если } x \in X_0,\ v \in V_0;$$

$$= -\infty, \text{ если } x \in X_0,\ v \overline{\in} V_0; \quad = \infty, \text{ если } x \overline{\in} X_0.$$

Здесь $X_0 = \{x \in X : x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2 \text{ п. в.}\}$, $V_0 = \{v \in V : v_1 \geqslant 0,\ v_2 \geqslant 0\}$.

Приспособим к рассматриваемой задаче (1)—(3) известные результаты общей теории двойственности (см., напр., [3, 4]).

Функции Лагранжа соответствует следующая пара двойственных задач:

$P$: найти $x \in X$ такое, чтобы $\sup\limits_{v \in V} L(x, v) \to \min$,

и

$D$: найти $v \in V$ такое, чтобы $\inf\limits_{x \in X} L(x, v) \to \max$.

Задача $P$ эквивалентна задаче (1)—(3).

Так как $\varphi(u)$ является полунепрерывной снизу функцией, то можно сказать, что $\min P = \sup D$. Если дополнительно предположить, что выполняется условие Слейтера (т. е. существует $x \in X$ такое, что

$$x_1(s_1) \in C_1 \text{ п. в.}, \int\limits_S f_{1i}(s_1, x_1(s_1))\,\sigma(ds_1) < 0,\ x_2(s_1, s_2) \in C_2 \text{ п. в.},$$

$$\iint\limits_{S \times S} f_{2i}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) < 0), \text{ то } \min P = \max D.$$

Для решения задачи (1)—(3) получается следующая характеристика: $\bar{x} \in X$ является решением задачи (1)—(3) тогда и только тогда, когда существует $\bar{v} \in V$ такое, что $(\bar{x}, \bar{v})$ есть седловая точка функции Лагранжа.

3. Выведем условия Куна—Таккера, характеризующие седловую точку функции Лагранжа.

В силу леммы 2 решение $x = (x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))$ принадлежит пространству $L^\infty_{n_1}(S) \times L^\infty_{n_2}(S \times S)$. Предположим дополнительно, что для каждого $x_1 \in L^\infty_{n_1}(S)$, удовлетворяющего условию (2), существует $x_2 \in L^\infty_{n_2}(S \times S)$, удовлетворяющий условию (3) (т. е. в задаче (1)—(3) нет индуцированных ограничений).

Пусть $(\bar{x}, \bar{v})$ — седловая точка функции Лагранжа, т. е.

$$\max_{v \in V} L(\bar{x}, v) = L(\bar{x}, \bar{v}) = \min_{x \in X} L(x, \bar{v}). \tag{6}$$

Теорема. *Для выполнения соотношения* (6) *необходимо и достаточно, чтобы:*

а) $\bar{x}_1(s_1) \in C_1$ *п. в.*, $\bar{v}_{1i} \geqslant 0$, $\int\limits_S f_{1i}(s_1, \bar{x}_1(s_1))\,\sigma(ds_1) \leqslant 0$,

$$\bar{v}_{1i} \int\limits_S f_{1i}(s_1, \bar{x}_1(s_1))\,\sigma(ds_1) = 0, \quad i = 1, \ldots, m_1;$$

б) $\bar{x}_2(s_1, s_2) \in C_2$ *п.в.*, $\bar{v}_{2i} \geqslant 0$, $\iint\limits_{S \times S} f_{2i}(s_1, s_2, \bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) \leqslant$

$\leqslant 0$, $\bar{v}_{2i} \iint\limits_{S \times S} f_{2i}(s_1, s_2, \bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) = 0$, $i = 1, \ldots, m_2$;

*существует функция* $\varrho(s_1, s_2) \in L^1_{n_1}(S \times S)$ *такая, что*

в) *функция* $f_{10}(s_1, x_1(s_1)) + \sum v_{1i} f_{1i}(s_1, x_1(s_1)) + (x_1(s_1), \int\limits_S \varrho(s_1, s_2)\,\sigma(ds_2))$ *достигает (при* $x_1(s_1) \in C_1$ *п. в.) своего минимума в точке* $\bar{x}_1(s_1)$;

г) *функция* $f_{20}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2)) + \sum v_{2i} f_{2i}(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))$ — — $(x_1(s_1), \varrho(s_1, s_2))$ *достигает при* $x_1(s_1) \in C_1$, $x_2(s_1, s_2) \in C_2$ *п. в. своего минимума в точке* $\bar{x} = (\bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2))$.

Сформулированные условия (а)—(г) аналогичны соответствующим условиям [4]. Условия (а) и (б) стандартные. Они обеспечивают выполнение первого равенства из (6). Достаточность (в) и (г) очевидна, покажем их необходимость. Для этого рассмотрим вычисление субдифференциала от одного интегрального функционала.

Пусть $X = L^\infty_{n_1}(S) \times L^\infty_{n_2}(S \times S)$, $X_1 = L^\infty_{n_1}(S \times S) \times L^\infty_{n_2}(S \times S)$

и пусть $f(s_1, s_2, x_1(s_1), x_2(s_1, s_2)) = f_s(x_1(s_1), x_2(s_1, s_2))$ является выпуклым нормальным интегрантом (см. [11]) в пространстве $S \times S \times R_{n_1} \times R_{n_2}$. Обозначим

$$Jf = \iint\limits_{S \times S} f_s[x_1(s_1, s_2), x_2(s_1, s_2)]\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2),$$

где $x = (x_1, x_2) \in X_1$.

Допустим, что $f(\cdot, \cdot, x_1, x_2)$ суммируема для всех $(x_1, x_2) \in R_{n_1} \times R_{n_2}$. Известно [11], что тогда субдифференциал $\partial Jf$ функционала $Jf$ принадлежит замкнутому подпространству сопряженного пространства $X'_1$ — пространству суммируемых на $S \times S$ функций, а именно

$$\partial Jf = \partial f_s(x_1(s_1, s_2), x_2(s_1, s_2)) \subset Z = L^1_{n_1}(S \times S) \times L^1_{n_2}(S \times S).$$

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{J}f$ является сужением функционала $Jf$ на подпространство $X \subset X_1$. Тогда $\partial \mathcal{J}f$ состоит из всех элементов вида $\tilde{z} = (\int\limits_S z_1(s_1, s_2)\,\sigma(ds_2), z_2(s_1, s_2))$, где $z = (z_1, z_2) \in \partial Jf$.*

Пусть $A : X \to X_1$ — канонический изоморфизм. Рассмотрим функционал $\mathcal{J}f \equiv \mathcal{J}^A f = \iint\limits_{S \times S} f_s\{A[x_1(s_1), \; x_2(s_1, s_2)]\}\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2)$. Известно ([1], с. 47), что $\partial \mathcal{J}^A f = A^* \partial Jf$, где $A^* : X'_1 \to X'$ — сопряженный к $A$ оператор.

Пусть $X^\perp = \{z \in Z : (z, x) = 0\}$ — аннулятор пространства $X$, т. е. $z \in X^\perp \subset Z$, если $\iint\limits_{S \times S} (x_1(s_1), \; z_1(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) + \iint\limits_{S \times S} (x_2(s_1, s_2), z_2(s_1, s_2))\,\sigma(ds_1)\,\sigma(ds_2) = 0$, $\forall x \in X$. Отсюда следует, что $X^\perp = \{z \in Z : \int\limits_S z_1(s_1, s_2)\,\sigma(ds_2) = 0, \; z_2(s_1, s_2) = 0$ п. в.$\}$, $X'$ изометрично фактор-пространству $X'_1/X^\perp$ ([12], с. 269). Но $X'_1/X^\perp = \{\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \in Z \subset X'_1 : \tilde{z}_1 = \int\limits_S z_1(s_1, s_2)\,\sigma(ds_2), \;\; \tilde{z}_2 = z_2(s_1, s_2)\}$, что и доказывает лемму.

Доказательство необходимости условий (в) и (г) теоремы можно теперь провести по схеме работы [4].

Если функции $f_{10}$, $f_{1i}$, $f_{20}$ и $f_{2i}$ дифференцируемы по $x = (x_1, x_2) \in R_{n_1} \times R_{n_2}$ и $C_1 = R_{n_1}$, $C_2 = R_{n_2}$, то условия (в) и (г) принимают вид: существует функция $\varrho(s_1, s_2) \in L^1_{n_1}(S \times S) \times L^1_{n_2}(S \times S)$ такая, что п. в.

$$(\text{в}')\ \nabla_{x_1} f_{10}(s_1, \bar{x}_1(s_1)) + \sum \bar{v}_{1i} \nabla_{x_1} f_{1i}(s_1, \bar{x}_1(s_1)) = -\int\limits_S \varrho(s_1, s_2)\,\sigma(ds_2),$$

$$(\text{г}')\ \nabla_{x_1} f_{20}(s_1, s_2, \bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2)) + \sum \bar{v}_{2i} \nabla_{x_1} f_{2i}(s_1, s_2, \bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2)) = \varrho(s_1, s_2),$$

$$\nabla_{x_2} f_{20}(s_1, s_2, \bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2)) + \sum \bar{v}_{2i} \nabla_{x_2} f_{2i}(s_1, s_2, \bar{x}_1(s_1), \bar{x}_2(s_1, s_2)) = 0.$$

Интерпретация функции $\varrho(s_1, s_2)$ дана в [4]. $\varrho(s_1, s_2)$ является множителем Лагранжа, что соответствует дополнительному ограничению $x_1(s_1) - \tilde{x}_1(s_1, s_2) = 0$, т. е. функция $x_1(s_1)$ может зависеть только от $s_1$. В результате возмущения этого ограничения функцией из $L^\infty_n(S \times S)$ и появляется множитель Лагранжа $\varrho(s_1, s_2) \in L^1_{n_1}(S \times S) \subset (L^\infty_{n_1}(S \times S))'$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пшеничный Б. Н., Необходимые условия экстремума, М., 1969.
2. Wets, R. J.-B., In: Intern. Symp. on Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling, I. R. I. A., Springer-Verlag Lecture Notes, **107,** 1974, p. 350.
3. Rockafellar, R. T., Wets, R. J.-B., Pacif. J. Math., **62,** 173 (1976).
4. Rockafellar R. T., Wets, R. J.-B., J. Math. Economics, **2,** 349 (1975).
5. Rockafellar R. T., Wets, R. J.-B., Pacif. J. Math., **62,** 507 (1976).
6. Rockafellar, R. T., Wets, R. J.-B., SIAM J. Control Opt., **14,** 574 (1976).
7. Rockafellar, R. T., Wets, R. J.-B., Math. Programming Study, **6,** 170 (1976).
8. Evstigneev, I. V., Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, **133,** 1976, p. 34.
9. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М., Теория экстремальных задач, М., 1974.
10. Поляк Б. Т., Матем. сборник, 78 (120), 65 (1969).
11. Rockafellar, R. T., Pacif. J. Math., **39,** 439 (1971).
12. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, М., 1959.


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
20/XII 1976

*T. TOBIAS*

## KUHN-TUCKERI TINGIMUSED KAHEETAPILISELE INTEGRAALSETE KITSENDUSTEGA STOHHASTILISELE PROGRAMMEERIMISÜLESANDELE

On vaadeldud kaheetapilist stohhastilist programmeerimisülesannet kumera sihifunktsiooni ja kumerate integraalsete kitsenduste korral ning tõestatud lahendi olemasolu teoreem. Kuhn-Tuckeri tingimuste tuletamisel on arvestatud lahendi järjestikust iseloomu, mistõttu tingimustesse on lisatud täiendav Lagrange'i kordaja.

*T. TOBIAS*

## KUHN-TUCKER CONDITIONS FOR TWO-STAGE STOCHASTIC PROGRAMMING MODEL WITH INTEGRAL CONSTRAINTS

The two-stage stochastic programming model with convex objective and convex integral constraints is considered. The existence theorem is proved. On deriving the Kuhn-Tucker conditions, the sequential nature of the solution is taken into account and, as a result, the additional Lagrange multiplier appears.