EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.1.03

УДК 62-50+531.36

И. КЕЙС

МЕТОД АГРЕГАЦИИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ И ЛИНЕЙНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

Рассматривается задача оптимального синтеза n-мерной нелинейной динамической системы с инвариантами, производящими постоянно положительные квадратичные формы $w^2(x, \lambda_*)$ ранга p (p-агрегаты). Исследуется вопрос о выборе оптимальных постоянных $\lambda^1{}_*$ линейной агрегации [1, 2] с целью минимизации параметров близости заданного множества цели и стационарного подпространства агрегата максимального ранга p_*. Методом одномерной w-агрегации, использующим оптимальный агрегат $w(x, \lambda^1{}_*)$, получено решение задачи синтеза для рассматриваемых критериев качества и ограничений на управление. Результаты иллюстрируются на примере оптимального синтеза норм-инвариантных систем.

1. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = f(x) + f^1(x, u) \quad \left(t \in E^1,\ |x| < \infty,\ u \in \omega,\ \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}\right), \tag{1.1}$$

$$x = (x_s)^*,\ u = (u_\sigma)^*,\ f = (f_s)^*,\ f^1 = (f^1_s)^* \quad (s = \overline{1, n};\ \sigma = \overline{1, r} \leqslant n),$$
$$f(0) = 0,\ f^1(0, u) \equiv f^1(x, 0) \equiv 0,$$
$$f(x) \subset C_1,\ f(x, u) \subset C_1 \quad (x \in E^n,\ u \in \omega \subset E^r),$$

где множество допустимых управлений $\Omega = \{u(t)\}$ составляют кусочно-непрерывные $u(t)$ с компактной, регулярной и замкнутой относительно нуля областью значений ω, заданной неравенством

$$g(u, x) \leqslant \varrho^0 = \mathrm{const} \quad (\varrho^0 > 0,\ g(u, x) \subset C_1 \text{ на } E^r \times E^n,\ u \neq 0), \tag{1.2}$$
$$g(u, x) > 0,\ u \neq 0,\ g(\alpha u, x) = \alpha g(u, x),\ \alpha \in E^1,\ \alpha \geqslant 0.$$

Условия существования, единственности и $t \to +\infty$ продолжаемости решения $x(t, x_0)$ при $u \in \Omega$, $x_0 \equiv x(t_0) \in E^n$ для системы (1.1), (1.2) предполагаются выполненными ($t_0 \leqslant t < \infty$).

Допустим, что система (1.1) при $u \equiv 0$ имеет d независимых инвариантов — вещественных квадратичных форм $h_k(x) = x^* H_k x$, соответствующих известным линейным инвариантам $h_\beta = l^2_\beta(x)$ $(k = \overline{1, 2, d})$ и квадрикам $h_\alpha = x^* H_\alpha x$ $(l_\beta = l_{\beta s} x_s,\ l_{\beta s} = \mathrm{const},\ \alpha = \overline{1, d_1},\ \beta = \overline{d_1 + 1, d} \leqslant n - 1$. Здесь и ниже используются обозначения

$$H_k = \|h^{(k)}_{ij}\|, \quad H_\alpha = \|h^{(\alpha)}_{ij}\|, \quad H_\beta = \|h^{(\beta)}_{ij}\| \quad (i, j = \overline{1, n}), \tag{1.3}$$

$$a_s b_s \equiv \sum_{s=1}^{n} a_s b_s = a \cdot b \quad (\alpha = \overline{1,\ d_1} \geqslant 0,\ \beta = \overline{d_1 + 1,\ d} \leqslant n - 1).$$

Предположим, что во множестве линейных комбинаций

$$h(x, \lambda) \equiv \lambda_k h_k(x) = x^* H(\lambda) x \quad (k = \overline{1, 2, d} \leqslant n-1), \tag{1.4}$$
$$\lambda = (\lambda_k)^* = \mathrm{const} \neq 0, \quad \lambda \in E^d$$

содержится p-положительный линейный агрегат $h(\lambda^0)$, удовлетворяющий условиям

$$h(\lambda^0) \equiv h(x, \lambda^0) \geqslant 0, \quad x \in E^n, \tag{1.5}$$
$$\mathrm{rank}\, H(\lambda^0) = p, \quad 1 \leqslant p \leqslant n,$$

при которых p собственных чисел $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p$ матрицы $H(\lambda^0)$ положительны, а остальные $n-p$ из них — нули. Рассмотрение ограничим невырожденным случаем существования у системы (1.1) хотя бы одного p-агрегата (1.5) $(1 \leqslant p)$.

При $d=2$, $p=n$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы связка (1.4) была n-агрегатом (1.5), выражаются следующей теоремой Финслера [3, 4]: *для того, чтобы для заданных квадратичных форм $h_1(x)$, $h_2(x)$ можно было составить определенно положительную связку $S(x, \lambda_0) \equiv h_2(x) - \lambda_0 h_1(x) > 0$, $x \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы форма $h_2(x)$ была определенно положительной на многообразии $h_1(x) = 0$, т. е. $h_2 > 0$ при $x \neq 0$, $h_1(x) = 0$.*

Аналогичные условия существования определенно положительной на линейном подпространстве $L(m_0) = \{x \mid l_m(x) = 0\}$ связки S выражаются неравенством $h_2 > 0$ при $x \in \{h_1(x) = 0 \cap L(m_0)\}$, $x \neq 0$, $m = \overline{1, m_0} \leqslant n-1$.

Используя эквивалентность условий (1.5) и неравенств $0 < a_1(\lambda) \leqslant \leqslant a_2(\lambda) \leqslant \ldots \leqslant a_p(\lambda)$, $a_\beta(\lambda) = 0$ $(\beta = \overline{p+1, n})$, находим необходимые и достаточные условия на λ:

$$A_\alpha(H) > 0, \quad A_\beta(H) = 0, \tag{1.6}$$
$$\alpha = \overline{1, p}, \quad \beta = \overline{p+1, n},$$

при которых система (1.1) с инвариантами $h_k(x)$ имеет (1.4) в качестве p-агрегата (1.5).

$A_\gamma(H)$ обозначает сумму главных диагональных миноров порядка γ

$$A_\gamma = \sum M \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_\gamma \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_\gamma \end{pmatrix}, \quad A_1 = \mathrm{tr}\, H, \; A_n = \det H, \tag{1.7}$$
$$H = \lambda_k H_k, \; 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\gamma, \; 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\gamma, \; 1 \leqslant \gamma \leqslant n.$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что для существования одномерно положительной связки (1.4) необходимы и достаточны условия

$$A_1 = \mathrm{tr}\, H = \lambda_k\, \mathrm{tr}\, H_k > 0, \; A_\delta(H) = 0 \quad (\delta = \overline{2, n}). \tag{1.8}$$

На основании (1.8) заключаем, что система (1.1) с инвариантами $h_k(x)$, все матрицы H_k которых имеют нулевой след (напр., кососимметрические), не имеют p-агрегатов (1.5). Этот вариант является вырожденным.

В рассматриваемом случае множество векторов $\{\lambda^0(p)\}$, которым соответствует p-агрегат (1.5), образуют в E^d выпуклый конус $C_0(p)$ без вершины $\lambda = 0$. Действительно, обозначим $(n-p)$-мерные линейные подпространства через $Q_1 = Q(\lambda_1(p))$, $Q_2(\lambda_2(p))$, $Q_0 = Q_1 \cap Q_2$, где $h(Q_1, \lambda_1) = h(Q_2, \lambda_2) = 0$. Из неравенств

$$h(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\lambda_2)=\alpha h(\lambda_1)+(1-\alpha)h(\lambda_2)>0, \quad x\in E_0^n\setminus Q_0, \tag{1.9}$$

$$h(x,\lambda_1)>0,\ E_0^n\setminus Q_1,\ h(x,\lambda_2)>0,\ E_0^n\setminus Q_2\ (0<\alpha<1,\ E_2^n=E^n\setminus 0)$$

находим, что для всех точек отрезка $[\lambda_1,\lambda_2]$ размерность нулевого подпространства агрегата (1.9) не возрастает. Поэтому $\{\lambda^0(p)\}$ выпукло. Его положительная однородность очевидна. Отсюда $\{\lambda^0(p)\}=C_0(p)$.

Поставим задачу λ-максимизировать размерность положительного подпространства связки (1.4). Эта задача равносильна λ-минимизации размерности дополнительного нулевого линейного подпространства $Q(\lambda)=\{x\,|\,h(x,\lambda)=0\}$. В силу (1.5) максимум по λ функции $\Phi(\lambda)=\sum_{\gamma=1}^{n}\operatorname{sign}A_\gamma$ при условиях $A_\gamma\geqslant 0$ $(\gamma=\overline{1,n})$ равен $\max\limits_\lambda\operatorname{rank}H(\lambda)$ — максимальной размерности p-агрегата (1.5). Он достигается на $\forall\lambda_*\in C_0(p_*)$, где $p_*=\max\Phi(\lambda)\geqslant 1$ при $A_\gamma\geqslant 0$ для рассматриваемой невырожденной задачи $(A_1>0)$. Уравнения выпуклого конуса $C_0(p_*)$, образуемого решениями λ_* этой задачи, выражаются неравенствами (1.6) при $p=p_*$ — максимально допустимом числе положительных $a_\alpha(\lambda)$ $(a_\beta(\lambda)=0,\ \alpha=\overline{1,p_*},\ \beta=\overline{p_*+1,n})$.

2. Так как в невырожденном случае $\dim C_0(p_*)\geqslant 1$, то выбор решений λ_* задачи можно определить дополнительными условиями оптимальности по λ-параметру связки (1.4) из конуса $C_0(p_*)$. При этом за критерий оптимальности λ_* примем минимум некоторой меры близости тривиального подпространства $Q(\lambda_*)=\{x\,|\,h(\lambda_*)=0\}$ p-агрегата (1.5) и двух заданных однородных многообразий Q^0, Q^1, рассматриваемых ниже.

2.1. Обозначим пересечение $Q^0=\bigcap\limits_\lambda Q(\lambda)$ подпространств через $Q(\lambda)=\{x\,|\,h(x,\lambda)=0\}$, $\lambda\in E^d$. Непустое множество Q^0 замкнуто, удовлетворяет уравнениям $h_k(x)=0$ $(k=\overline{1,d}\leqslant n-1)$ и является однородным собственным многообразием в нетривиальном подслучае $Q^0\neq 0$ $(p_*<n)$. Исключим в этом подслучае тривиальный вариант — λ_*-линейной независимости квадрик $h_k(x)$ на $E^n\setminus Q^0$, где существует λ_*^0 в конусе $C_0(p_*)$, для которого имеем

$$h(x,\lambda_*^0)=\lambda_{*k}^0 h_k(x)>0, \quad x\in E^n\setminus Q^0(k=\overline{1,d}).$$

Тогда не существует $\lambda_*\in C_0(p_*)$, при котором Q^0 — часть любого $Q(\lambda_*)$ — реализуется выбором λ_* $(Q(\lambda_*)\neq Q^0,\ Q^0\subset Q(\lambda_*))$. Мерой близости $Q(\lambda)$ к Q^0 будем считать число, равное $I_1=\max\limits_y R_1(y)$, при условиях

$$\lambda_k y_k=0,\ |y|=1\ (y=(y_k)^*,\ k=\overline{1,d}), \tag{2.1}$$

где $2R_1=\varrho_k y_k^2>0$, $y\neq 0$, $0<\mathrm{const}=\varrho_k$ — различные весовые коэффициенты. Из условий стационарности $R_1(y)$ при связях (2.1) в неособенном случае $\lambda_k\neq 0$, $k=\overline{1,d}$, для определения множителей Лагранжа μ, ν и соответствующего максимальному $\mu^*(\lambda)$ экстремального вектора $y^0(\mu^*)$ получаем уравнения

$$\sum_{k=1}^{d}\lambda_k^2(\varrho_k-\mu)^{-1}=0, \quad \nu^2\sum_{k=1}^{d}\lambda_k^2(\varrho_k-\mu)^{-2}=1 \quad (\nu\neq 0), \tag{2.2}$$

$$y_k^0=y_k(\mu^*)=\nu\lambda_k(\varrho_k-\mu^*)^{-1}(\mu^*=\varrho_k y_k^{0^2}>0,\ k=\overline{1,d}), \tag{2.3}$$

где μ^* обозначает максимальный из корней (2.2) вида

$$\varrho_1 < \mu_1(\lambda) < \varrho_2 < \mu_2(\lambda) < \ldots < \varrho_{d-1} < \mu_{d-1}(\lambda) < \varrho_d,$$

который равен $\mu_{d-1} = \max\limits_y 2R_1$ при условиях (2.1). Для решения задачи достаточно минимизировать $\mu^*(\lambda)$ на $\lambda_* \in C_0(p_*)$.

В особенном случае ($\exists \lambda_k = 0$) задача минимизации по λ_* теряет смысл в двух подслучаях из трех допустимых. В первом из них несколько $\lambda_k \equiv \lambda_\alpha = 0$ ($\alpha = \overline{1, \alpha_0} < d$) и $\mu^* = \max\limits_\alpha \varrho_\alpha$. Во втором $d = 2$, $\lambda_\alpha = 0$, $\mu^* = \varrho_\alpha$ ($\alpha = 1$ или 2). В третьем допустимом подслучае существует несколько $\lambda_\beta \neq 0$ и лишь одно $\lambda_\alpha = 0$ ($d > 2$). В последнем подслучае, аналогично неособенному случаю, задача λ_*-минимизации меры близости сводится к поиску $\min\limits_{\lambda_*} \mu^*(\lambda_*)$ на $\lambda_* \in C_0(p_*)$, где $\varrho_{d-1} < \mu^*(\lambda_*) < \varrho_d = \max\limits_\beta \varrho_\beta$ ($\beta \neq \alpha$). Здесь после перенумерации имеем

$$\sum_{\beta=2}^{d} \frac{\lambda_\beta^2}{\varrho_\beta - \mu} = 0, \quad \nu^2 \sum_{\beta=2}^{d} \frac{\lambda_\beta^2}{(\varrho_\beta - \mu)^2} = 1, \quad y_\beta^0 = \nu \frac{\lambda_\beta}{\varrho_\beta - \mu^*} \neq 0 \quad (\lambda_1 = y_1^0 = 0).$$

Рассмотрим преобразование T_0^1, порожденное $R^1 = \mathrm{diag}(\varrho_1, \ldots, \varrho_d)$, на подпространстве $Q_* = Q(\lambda_*)$ в неособенном случае $\lambda_k \neq 0$, $k = \overline{1, d} \leqslant n-1$. Будем считать $\mathrm{tr}\, T_0^1$ мерой I_0 близости Q_* к Q^0. Используя (2.1) и (2.2), получаем равенства

$$I_0 = \mathrm{tr}\, T_0^1 = \sum_{\gamma=1}^{d-1} \mu_\gamma = \varrho_0 - \varrho_k \lambda_k^2 |\lambda|^{-2} \left(\varrho_0 = \sum_{k=1}^{d} \varrho_k, \ k = \overline{1, d}\right). \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) достигает минимума на $C_0(p_*)$, если в конусе существует экстремальное значение λ_*^0 с направлением $\lambda_0^0 = \lambda_*^0 |\lambda_*^0|^{-1} = \mp \varrho_0^{-1/2} (\varrho_k^{1/2})^*$, для которого мера I_0 имеет значение $\varrho_0^{-1}(\varrho_0^2 - \sum\limits_{k=1}^{d} \varrho_k^2)$.

2.2. Предположим, что множество цели Q^1 является $(n - s_2)$-мерным подпространством $y \in E^n$ вида

$$Cy = 0, \quad C = \|c_{mi}\| = \mathrm{const}, \quad \mathrm{rank}\, C = s_2, \tag{2.5}$$

$$1 \leqslant s_2 \leqslant n-1, \quad m = \overline{1, s_2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Точки $x_0(\lambda_*)$ s_1-мерного тривиального подпространства $Q(\lambda_*)$ p_*-агрегата (1.5) удовлетворяют системе линейных уравнений

$$Hx_0 = 0, \quad H = \left\| \begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix} \right\| = \|h_{ij}(\lambda_*)\|, \quad H_1 = \|h_{\alpha j}\| \tag{2.6}$$

$$(\alpha = \overline{1, p_*}; \ i, j = \overline{1, n}).$$

Перенумерацией получим

$$\mathrm{rank}\, H = \mathrm{rank}\, H_1 = p_* \leqslant n-1,$$

$$H_2 = \|h_{\beta j}\|, \quad 1 \leqslant s_1 = n - \overset{*}{p} \leqslant n-1 \ (\beta = \overline{p_* + 1, n}).$$

Рассмотрим сперва случай $p_* + s_2 \geqslant n$ ($s_2 \geqslant s_1$), для которого можно определить I_2 — однородную по λ меру близости множеств Q^1 и $Q(\lambda_*)$, характеризующую угол между подпространствами Q^1, $Q(\lambda_*)$.

Составим из $H(\lambda_*)$ и C вспомогательную блочную матрицу

$$G = \left\| \begin{matrix} H_0 \\ C \end{matrix} \right\| = \|g_{\gamma i}\| \; (\gamma = \overline{1, p_* + s_2},\; i = \overline{1, n}). \tag{2.7}$$

Здесь H_0 обозначает субматрицу H ранга p_*, получаемую из H выбором p_* ее строк с наименьшими индексами $i_1, i_2, \ldots, i_{p_*}$, расположенными в порядке их возрастания $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n$ (в частности, $H_0 = H_1$). Нормируя вектор-строки в (2.7), получаем матрицу

$$G^0 = \|g^0_{\gamma i}\|, \quad g^0_{\gamma i} = g_{\gamma i} \Big(\sum_{i=1}^{n} g^2_{\gamma i}\Big)^{-1/2}. \tag{2.8}$$

Обозначим через $M(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s_1})$ минор, полученный из p_* первых строк матрицы (2.8) добавлением $n - p_*$ строк из матрицы $\|g^0_{\beta i}\|$ с сохранением их порядка $p_* + 1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{s_1} \leqslant p_* + s_2$. Таких миноров $m = C\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$, каждый из них является однородной функцией λ нулевой степени. Меру I_2 угловой близости $Q(\lambda_*)$, Q^1 определим равенством

$$I_2(\lambda_*) = \sum_{s=1}^{m} M_s^2(\lambda_*) \qquad (M_s = M_s(\beta_1, \ldots, \beta_{s_1})), \tag{2.9}$$

из которого следует нулевая однородность I_2. В качестве второго критерия оптимальности выбора λ^0_* примем условие минимума параметра (2.9) на конусе допустимых значений λ_*, соответствующих p_*-агрегату (1.5). Заметим, что $I_2(\lambda_*) = 0$, если строки C линейно зависят от строк H_0, когда $Q(\lambda_*) \subseteq Q^1$. При $n = p_* + s_2$ из равенства (2.9) имеем $I_2(\lambda_*) = (\det G^0)^2$. В общем случае $p_* + s_2 \leqslant n$ определим I^1_2 — параметр угловой близости $Q(\lambda_*)$ и Q^1 следующим образом. Обозначим через $\{y_e\}$ $(e = \overline{1, n - s_2})$ ортонормальную базу решений (2.5) $(y_{e_1} \cdot y_{e_2} = 0,\; e_1 \neq e_2,\; |y_e| = 1)$. Составим сумму квадратов скалярных произведений векторов y_e, g^0_α

$$I^1_2(\lambda) = \sum_{\alpha=1, e=1}^{p_*, n-s_2} (g^0_\alpha \cdot y_e)^2 \,(g^0_\alpha = (g^0_{\alpha i})^*,\; G^0 = \|g^0_{\gamma i}\|,\; \gamma = \overline{1, p_* + s_2}). \tag{2.10}$$

Критерием оптимальности λ_* будем считать минимум I^1_2 на выпуклом конусе $C_0(p_*)$. Предположим, что в $C_0(p_*)$ из условий минимума параметров вида (2.1), (2.4), (2.9), (2.10) методами нелинейного программирования получены практически достаточные приближенные значения минимизирующих значений параметра агрегации λ^1_*, которым соответствует p_*-агрегат (1.5) с минимальной размерностью $n - p_*$ нулевого подпространства. Назовем p_*-агрегат (1.5) вида $w^2(x) \equiv h(x, \lambda^1_*)$ оптимальным.

3. Рассмотрим задачу приведения $x(t, x_0)$ $(x_0 = x(t_0))$ вдоль (1.1) на подпространство $Q(\lambda^1_*)$ при связи (1.2) и условии минимума интеграла

$$F(u, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(u, x)\, d\tau, \tag{3.1}$$

$$f_0(u, x) \subset C_1, \quad x \in E^n, \quad u \in \omega,$$

где $t_0 < t_1$ — первый момент выполнения соотношения $w(t) \to 0$ при $t \to t_1$ (t_1 — конечно или бесконечно). В этой задаче оптимального синтеза множество цели является, очевидно, нуль-подпространством $Q(\lambda^1_*) = \{x \mid h(x, \lambda^1_*) = 0\}$ при $u \equiv 0$ инварианта $h(x, \lambda^1_*) = w^2$ системы (1.1). Переменная w удовлетворяет уравнению

$$w^{\cdot} = w^{-1} a_s \xi_s X_s(\xi, u), \quad w \neq 0, \tag{3.2}$$

$$\xi = P^* x, \quad X = P^* f^1, \quad P^* = P^{-1} = \|p_{ij}\| = \mathrm{const}, \quad s = \overline{1, p_*}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где $0 < a_s(\lambda^1_*)$ — положительные собственные числа матрицы $H(\lambda^1_*)$, P-матрица ортогонального преобразования $H(\lambda^1_*)$ к диагональному виду. Предполагая, что существует достаточно гладкая функция Беллмана $S(x) \equiv S_1[w(x)]$, имеем гамильтониан [5, 6] вида

$$G(u, x, w, \psi) = f_0(u, x) + \psi w^{-1} g_0(u, x) \quad (w \neq 0), \tag{3.3}$$

$$\psi = dS_1/dw, \quad g_0 = a_s \xi_s X_s(\xi, u) \quad (X_s(\xi, 0) \equiv 0),$$

$$S_1(w) \subset C, \quad w \geqslant 0, \quad S_1(w) \subset C_1, \quad w > 0 \quad (\xi = (\xi_s)^* = P^* x).$$

Допустим, что для S_1 существует непрерывно дифференцируемая вне $w = 0$ вектор-функция $u^0 = u^0(x)$, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \equiv G(u^0, x, w, \psi) \leqslant G(u, x, w, \psi) \ (u, u^0 \in \omega), \tag{3.4}$$

$$\psi^{-1} f_0(u^0, x) \subset C_1 \quad (x \in E^n \ w = 0).$$

Из (3.2) и (3.4) находим уравнение

$$w^{\cdot} = w^{-1} g_0(u^0, x) = -\psi^{-1} f_0(u^0, x) \equiv k_0(x). \tag{3.5}$$

Предположим, что $w(t)$ вдоль решений системы (1.1), замкнутой регулятором $u = u^0(x)$, является в области $w > 0$ определенно убывающей функцией ($\Delta w < 0$ при $\forall \Delta t, \ t + \Delta t < t_1$). Последнее выполняется, в частности, при условиях

$$k_0(x) \leqslant 0, \quad |x(t, x_0 \mid u^0)| \leqslant N < \infty \quad \forall x_0 \in E^n \ w = 0,$$

если множество $k_0(x) = 0$ не содержит положительных полутраекторий вне гиперплоскости $w(x) = 0$ ($0 < N \in E^1$, $N = N(x_0)$, $w(x_0) \neq 0$). Используя результаты [5–7] с учетом допущений (3.3), (3.4), из условия $\Delta w < 0$ заключаем, что $u^0(x)$ является оптимальным по (3.1) регулятором в целом рассмотренной задачи синтеза. Здесь для получения выражения $u^0(x)$ можно с учетом свойств (1.2) проводить раздельную минимизацию функции (3.3) на вспомогательных ϱ, ν управлениях типа расстояние-направление

$$\varrho = g(u, x), \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant \varrho^0, \quad \nu = g^{-1} u \quad g(\nu, x) = 1. \tag{3.6}$$

Это утверждение следует из условий (1.2), (3.6) и равенств

$$\inf_{u \in \omega} G(u, x, w, \psi) = \min_{\varrho} \min_{\nu} G^1 = \min_{\nu} \min_{\varrho} G^1, \tag{3.7}$$

$$G^1(\varrho, \nu, x, w, \psi) \equiv G(\varrho\nu, x, w, \psi).$$

Для некоторых норм-автономных систем [8, 9] экстремальные (для (3.7)) значения $\nu = \nu^0$ не зависят от ϱ и порождают граничный оптимальный регулятор

$$\varrho=\varrho^0, \quad \nu^0=\nu^0(x,\psi), \quad u^0=\varrho^0\nu^0 \quad (\psi=dS_1\backslash dw).$$

Обсуждение. Эффективность агрегации возрастает в случае замены связки (1.4) на оптимальный агрегат вида $S(C)=h(x,\lambda_*^1)+ + c_{\beta\gamma}l_\beta l_\gamma$, $C=\|c_{\beta\gamma}\|=\text{const}$ $(\beta,\gamma=\overline{d_1+1,d})$, где постоянные $c_{\beta\gamma}$ определяются из условий минимума параметров вида (2.1), (2.4), (2.9), (2.10). Заметим, что для некоторых динамических систем с аналитическими инвариантами их приближения $h_\alpha(x)$ и $l_\beta(x)$ в (1.3) являются инвариантами соответствующей системы уравнений в вариациях. С другой стороны, рассмотрим неособенное преобразование $q=q(x)$, $q= =(y_s,z_\sigma)^*$, $y_s=V_s(x)$, $z_\sigma=W_\sigma(x)$ $(s=\overline{1,m};\ \sigma=\overline{1,\ n-m})$, где $\{V\}=E^m$, $V=(V_s)^*$, V_s — дифференцируемые инварианты (1.1) при $u\equiv 0$. Тогда в новых переменных q имеем систему с m линейными инвариантами y_s, для которой применимы все рассуждения пп. 1—3.

4. Пример. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}=f(x)+Au, \quad \operatorname{rank}A=\dim u=m\leqslant n=\dim x, \tag{4.1}$$

$$f(0)=0, \quad A=\|a_{ij}\|=\text{const} \quad (i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m})$$

с оптимальным p_*-агрегатом $w_1^2(x)\equiv h(x,\lambda_*^1)$, который в переменных $\xi=Cx=(z_s,y_\sigma)^*$ $(\det C\neq 0,\ s=\overline{1,p_*},\ \sigma=\overline{1,n-p_*})$ является суммой квадратов $(1\leqslant p_*\leqslant m)$

$$w_1^2(x)=w^2(z)=\sum_{s=1}^{p_*} z_s^2=|z|^2, \tag{4.2}$$

$$z=(z_s)^*=C_1x, \quad y=(y_\sigma)^*=C_2x, \quad C=\left\|\begin{matrix}C_1\\ C_2\end{matrix}\right\|.$$

Согласно (4.1) z-компонента ξ удовлетворяет системе

$$\dot{z}=Z(\xi)+v \quad (Z=C_1f(C^{-1}\xi),\ z(0)=0), \tag{4.3}$$

$$v=B_1u_1+B_2u_2=Bu, \quad B=C_1A=\|B_1,B_2\|,$$

$$u=(u_{1s},u_{2r})^* \quad u_1=(u_{1s})^*, \quad u_2=(u_{2r})^* \quad (r=\overline{p_*+1,m}).$$

Предположим, что для системы (4.1) выполнены условия

$$\det B_1\neq 0, \quad |v|=|B_1u_1+B_2u_2|\leqslant\varrho_1=\text{const}, \quad |u_2|\leqslant\varrho_2=\text{const}. \tag{4.4}$$

Множество цели задано равенствами $z=C_1x=0$, а критерий оптимальности в задаче синтеза — минимум функционала затрат типа времени-импульса

$$F_1=\int_0^{t_1}[k_1(w)|v|+k_2(w)]\,d\tau,$$
$$\varrho_1k_1(w)+k_2(w)>0, \quad k_2(w)\geqslant 0 \quad (w=|z|) \tag{4.5}$$

при ограничениях $|v|\leqslant\varrho_1$, $|u_2|\leqslant\varrho_2$. Из (4.2)—(4.5) следует, что (4.1) принадлежит классу систем, рассмотренных в п. 3. Выражения компоненты u_1^0 оптимального регулятора и функции Беллмана имеют вид

$$u_1^0=-B_1^{-1}(B_2u_2^1+\varrho_1w^{-1}z), \quad S_1(w)=\min_u F_1=\int_0^w(k_1+\varrho_1^{-1}k_2)\,dw,$$

$$w=h^{1/2}(x,\lambda_*^1), \quad z=C_1x, \quad |u_2^1(t)|\leqslant\varrho_2,$$

$u_2^1(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция времени. Из уравнения $w^{\cdot} = -\varrho_1$ заключаем, что $u^0 = (u_{1s}^0, u_{2r}^1)^*$ является оптимальным по (4.5) регулятором $z = C_1x$-стабилизации в целом за минимальное время $t_1 = w(0)\varrho_1^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aoki, M., IEEE Trans. Automatic Control, **AC-13**, No. 3, 246 (1968).
2. Ульм С. Ю., Автоматика и телемеханика, № 5, 27 (1972).
3. Finsler, P., Comment. Math. Helv., **9**, 172 (1937).
4. Кузьмин П. А., Малые колебания и устойчивость движения, М., 1973.
5. Красовский Н. Н., В кн.: Малкин И. Г., Теория устойчивости движений, изд. 4, М., 1966.
6. Румянцев В. В., ПММ, **34**, вып. 3, 440 (1970).
7. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 178 (1975).
8. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, М., 1968.
9. Кейс И., Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 4, 44 (1975).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
10/IX 1976

I. KEIS

AGREGATSIOONIMEETOD RUUT- JA LINEAARVARIANTIDEGA DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE OPTIMAALSEKS SÜNTEESIKS

On vaadeldud n-mõõtmelise mittelineaarse dünaamilise süsteemi optimaalse sünteesi ülesannet mittenegatiivsete invariantide $w^2(x, \lambda)$ puhul. Invariandid $w^2(x, \lambda)$ on võetud p-agregaatide mõttes, kusjuures p-agregaat on vektori λ koordinaatide (agregatsiooni parameetrite) lineaarse funktsiooni p-järku ruutvorm. Käsitletakse hulga $w(x, \lambda) = 0$ mõõtme minimeerimist ja mõningaid vaadeldava hulga ja etteantud sihihulga läheduse kohta käivaid kriteeriume rahuldavate optimaalsete agregatsioonikonstantide leidmist. Saadud agregaati kasutades on leitud mõningaid optimaalsuskriteeriume rahuldav sünteesiülesande lahend.

I. KEIS

ON THE OF METHOD OF AGGREGATION FOR OPTIMAL SYNTHESIS OF DYNAMICAL SYSTEM WITH QUADRATIC AND LINEAR INVARIANTS

The optimal synthesis problem for n-dimensional nonlinear system with non-negative invariants $w^2(x, \lambda)$ as p-aggregates is considered. p-aggregate is a quadratic form, linear on aggregation parameter-vector λ, rank $w^2 = p$. The problem of λ-optimal choice is investigated. For this purpose $n - p$ minimum and various closeness criteria between $w(x, \lambda) = 0$ and target hyperplane are used. When the system, constraints and performance index satisfy certain conditions, the optimal synthesis is obtained on the basis of scalar aggregation and Liapunov's direct method.