

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÕIDE
FÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 1

УДК 621.3.011

Р. АЛЛИКАС

СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

R. ALLIKAS. ELEKTRIAHELA VÖRRANDISOSTEEMI SÖMMEETRILINE KUJU

R. ALLIKAS. SYMMETRICAL FORM OF CIRCUIT EQUATIONS

Уравнения Кирхгофа, описывающие процессы в электрических цепях с сосредоточенными параметрами, могут иметь различные эквивалентные формы. Форма уравнения Кирхгофа, составленная по приведенному ниже правилу, отличается от ранее известных форм минимальным числом отличных от нуля слагаемых и симметричным расположением этих слагаемых относительно главной диагонали матрицы. Последнее свойство позволяет легко и наглядно доказать ряд энергетических соотношений типа теоремы Телледжина [1, 2].

Рассмотрим правила составления симметричной формы системы уравнений электрической цепи.

Примем какой-нибудь узел электрической цепи за базисный и обозначим его индексом «0». Условимся считать направление ветви от узла с меньшим индексом к узлу с большим индексом положительным.

Уравнения узловых токов будем составлять в предположении, что положительные направления узловых токов и соответствующих им ветвей совпадают. Уравнения контурных напряжений выпишем по контурам, имеющим только три узла: базисный узел с индексом «0» и два узла какой-нибудь определяющей ветви. При этом не будем обращать внимания на то, есть между узлами схемы реальные связи (элементы) или нет.

Положительное направление обхода контура выберем так, чтобы оно совпадало с положительным направлением определяющей ветви контура. В случае совпадения этих направлений знак перед слагаемыми напряжения ветвей будет положительным и в противном случае — отрицательным. Кроме того, изменим знак перед величиной э. д. с. на противоположный.

Уравнения узловых токов упорядочим по индексам узлов начиная с первого (уравнения токов базисного узла с индексом «0» опустим). Уравнения контурных напряжений упорядочим по индексам определяющих ветвей контура: сначала по первому (меньшему), а если первые индексы одинаковы, то по второму. По таким же правилам упорядочим слагаемые токов и напряжений в соответствующих уравнениях. В результате получим независимую систему уравнений, имеющую в

общем случае наименьшее из возможных число слагаемых, отличных от нуля. Назовем эту систему уравнений базисной. Представим слагаемые этих уравнений в виде таблицы, где сумма слагаемых каждого ряда с учетом соответствующих знаков перед слагаемыми равняется нулю.

Базисная система уравнений (1) электрической цепи в случае пяти узлов

		Индексы ветвей									x	
		01	02	03	04	12	13	14	23	24		34
Индексы узлов	1	i_{01}	0	0	0	$-i_{12}$	$-i_{13}$	$-i_{14}$	0	0	0	u_{01}
	2	0	i_{02}	0	0	i_{12}	0	0	$-i_{23}$	$-i_{24}$	0	u_{02}
	3	0	0	i_{03}	0	0	i_{13}	0	i_{23}	0	$-i_{34}$	u_{03}
	4	0	0	0	i_{04}	0	0	i_{14}	0	i_{24}	i_{34}	u_{04}
Индексы контуров	012	u_{01}	$-u_{02}$	0	0	u_{12}	0	0	0	0	0	i_{12}
	013	u_{01}	0	$-u_{03}$	0	0	u_{13}	0	0	0	0	i_{13}
	014	u_{01}	0	0	$-u_{04}$	0	0	u_{14}	0	0	0	i_{14}
	023	0	u_{02}	$-u_{03}$	0	0	0	0	u_{23}	0	0	i_{23}
	024	0	u_{02}	0	$-u_{04}$	0	0	0	0	u_{24}	0	i_{24}
	034	0	0	u_{03}	$-u_{04}$	0	0	0	0	0	u_{34}	i_{34}

Слагаемые базисной системы уравнений (1) расположены относительно диагонали матрицы (1) симметрично и имеют разные знаки. Умножим уравнения (1) на сомножители, приведенные в последнем столбце таблицы, и сложим все уравнения. В результате сумма всех слагаемых, находящихся вне главной диагонали, окажется равной нулю. Таким образом,

$$\sum_{k,l} u_{kl} i_{kl} = 0, \quad (2)$$

где k, l — индексы узлов. В случае отсутствия между u_{kl} и i_{kl} конститутивных связей (напр., u_{hl} и i_{kl} принадлежат различным схемам с одинаковым числом узлов) уравнения (2) можно рассматривать как закон сохранения квазимощностей [1, 2]. Применение операторов, не изменяющих структуру уравнений Кирхгофа (операторы Кирхгофа), оставляет законы сохранения типа (2) в силе [2]. Отсюда можно сделать некоторые выводы.

1. Законы сохранения типа (2) для физических величин, подчиняющихся законам Кирхгофа, вытекают из симметричного расположения слагаемых относительно диагонали матрицы (1).

2. Верно и обратное утверждение: если для какой-нибудь системы действителен закон сохранения какой-то величины (напр., энергии), и эта величина состоит из суммы нескольких слагаемых, которые можно представить в виде произведения величин x_k и y_k , где $k = 0, 1, \dots, n$, то для набора x_k, y_k следует составить матрицу (1) и по ней построить топологическую модель типа электрической цепи.

Известно, что от закона сохранения типа (2) и от одного из законов Кирхгофа можно прийти к другому закону Кирхгофа [3]. Поэтому выбор слагаемых в базисной системе уравнений (1) будет однозначным.

При исследованиях и расчетах энергетических процессов в электрических цепях следует учитывать, что энергетический баланс ветвей какого-либо узла (контура) не изменяется в результате прибавления ко всем узловым напряжениям (контурным токам) постоянной или переменной величины Δu (Δi):

$$\sum_m i_m (u_m + \Delta u) = \sum_m i_m u_m + \Delta u \sum_m i_m = \sum_m i_m u_m, \quad (3)$$

$$\sum_n (i_n + \Delta i) u_n = \sum_n i_n u_n + \Delta i \sum_n u_n = \sum_n i_n u_n, \quad (4)$$

где i_m , i_n и u_m , u_n — токи и напряжения ветвей узла и контура соответственно. В таком случае условия

$$\sum_m i_m = 0, \quad \sum_n u_n = 0 \quad (5)$$

можно считать выполненными, а равенства (3) и (4) правильными.

Сумма внешних токов любого контура электрической цепи равняется нулю. За внешние токи контура принимаются токи таких ветвей, которые имеют только один общий узел с контуром. При сложении уравнений токов всех узлов часть слагаемых токов взаимно уничтожается. Остается лишь сумма внешних токов контура, равная нулю. Таким образом, первое из уравнений (5) удовлетворяется и, следовательно, для внешних ветвей контура действительно соотношение (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tellegen, B. D. H., Philips Res. Repts, 7, 259 (1952).
2. Tellegen, B. D. H., Proc. Instn Radio Engrs. Australia, 1, 265 (1953).
3. Пенфилд П., Спенс Р., Дюинкер С., Энергетическая теория электрических цепей, М., 1974.

Институт термодинамики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/II 1976