EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 1

УДК 518 : 519.3 : 62—50

Ингрид МАУЭР

К АЛГОРИТМИЗАЦИИ ОДНОГО МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

INGRID MAUER. ÜHE TRAHVIFUNKTSIOONIDE MEETODI ALGORITMEERIMISEST KUMER-PROGRAMMEERIMISÜLESANDE LAHENDAMISEKS

INGRID MAUER. ON ALGORITHMIZATION OF ONE METHOD OF PENALTY FUNCTIONS FOR SOLVING A CONVEX PROGRAMMING PROBLEM

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$\min\{f(x) \mid g(x) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

где x — n-мерная точка евклидова пространства E^n, $f(x)$ и $g(x)^{\mathrm{T}} = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$ — функция и m-мерная вектор-функция соответственно, причем обе они непрерывно дифференцируемые и выпуклые, а область $\{x \mid g(x) \leqslant 0\}$ — непустая и ограниченная.

Среди методов решения этой задачи хорошо известен метод штрафных функций, суть которого заключается в последовательной безусловной минимизации функций

$$F_k(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} M_{ik}(g_i(x)_+)^2,$$

где

$$g_i(x)_+ = \max\{0, g_i(x)\} \quad (i=1, \ldots, m),$$

а числа $M_{ik} > 0$, причем последовательности $\{M_{ik}\}$ $(i = 1, \ldots, m)$ неубывающие и $M_{ik} \to \infty$ при $k \to \infty$ $(i = 1, \ldots, m)$ (см., напр., [1, 2]). При указанных выше предположениях метод сходится, т. е. расстояние от точки минимума функции $F_k(x)$ до множества всех решений задачи (1) сходится к нулю при $k \to \infty$ (это можно показать, используя, например, результаты из [2]).

В данном сообщении займемся проблемами алгоритмизации этого метода штрафных функций. Поскольку его вычислительные алгоритмы допускают лишь приближенное решение задачи (1), то аппроксимируем ее некоторой новой задачей и на основе последней, во-первых, выпишем вытекающие из нее условия заканчивания вычислений для этих алгоритмов и, во-вторых, обоснуем точность, которую в них при минимизации функций $F_k(x)$ повышать не обязательно.

Обозначим через $f_x(x^0)$ градиент функции $f(x)$ в точке x^0 и сформулируем вспомогательную задачу

$$\min_x\{f(x) - F_{kx}(\bar{x})^{\mathrm{T}} x \mid g(x) \leqslant \varepsilon(\bar{x})\}. \tag{2}$$

Здесь $\bar{x}$ — произвольно выбранная точка и $\varepsilon(x)^{\mathrm{T}} = (g_1(x)_+, \ldots, \ldots, g_m(x)_+)$. Так как точка $\bar{x}$ и неотрицательные числа $\bar{u}_i = 2M_{ik}g_i(\bar{x})_+$ $(i = 1, \ldots, m)$ такие, что

$$f_x(\bar{x}) - F_{kx}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i g_{ix}(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{u}_i(g_i(\bar{x}) - g_i(\bar{x})_+) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$g(\bar{x}) \leqslant \varepsilon(\bar{x}),$$

то по [1] (теорема 19) $\bar{x}$ есть решение задачи (2).

На основе задачи (2) аппроксимируем исходную задачу следующей задачей

$$\min_x \{f(x) - F_{kx}(x^k)^{\mathrm{T}} x \mid g(x) \leqslant \varepsilon(x^k) \leqslant \varepsilon, \qquad (3)$$

$$\|F_{kx}(x^k)\| \leqslant \varepsilon_0\}^*,$$

где $\varepsilon^{\mathrm{T}} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, ε_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ — выбранные малые положительные числа, а функция $F_k(x)$ и точка x^k — решение этой задачи. Отметим, что нормализацию вектора $F_{kx}(x^k)$ можно ввести и по-другому, например, отдельно по его компонентам.

Пусть задача (1) заменима задачей (3), т. е. любое решение задачи (3) содержит в качестве x^k отыскиваемое решение задачи (1).

При этом предположении выпишем вытекающие из задачи (3) условия прекращения вычислений для алгоритмов описанного выше метода

$$\|F_{kx}(x)\| \leqslant \varepsilon_0, \qquad (4)$$

$$g(x) \leqslant \varepsilon. \qquad (5)$$

В самом деле, если $F_k(x)$ и x^k, полученные в процессе вычислений, удовлетворяют условиям (4) и (5), то они являются решением задачи (3), так как x^k есть решение задачи (2) при $\bar{x} = x^k$.

Минимизация функции $F_k(x)$ с точностью $\|F_{kx}(x)\| \leqslant c$ (c — положительное число) означает отыскание такой точки, которая удовлетворяет этому условию точности. Итак, условие (4) тоже определяет точность, которую в алгоритмах при минимизации функций $F_k(x)$ увеличивать не обязательно. Для доказательства этого утверждения обозначим через x^k точку, которая удовлетворяет условию (4), и покажем, что $\varepsilon(x^k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Действительно, выделим из последовательности $\{x^k\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{k_l}\}$, предельную точку которой обозначим через x^*. Это можно сделать, так как $\{x^k\}$ принадлежит к некоторому компактному множеству (доказательство здесь приводить не будем). Покажем, что $\varepsilon(x^*) = 0$. Для этого введем точку-переменную $y \in E^n$ и обозначим

$$L = \max_y \min_x \{f(x) - y^{\mathrm{T}} x \mid g(x) \leqslant 0, \quad \|y\| \leqslant \varepsilon_0\}.$$

Если хоть при одном индексе i функция $g_i(x^*)_+ > 0$, то для достаточно больших индексов l получим

$$F_{k_l}(x^{k_l}) - F_{k_l x}(x^{k_l})^{\mathrm{T}} x^{k_l} > L,$$

---

* Все нормы в тексте — нормы пространства E^n.

что противоречит соотношению

$$F_{k_l}(x^{k_l}) - F_{k_l x}(x^{k_l})^{\mathrm{T}} x^{k_l} \leqslant \min \{f(x) - F_{k_l x}(x^{k_l})^{\mathrm{T}} x \mid g(x) \leqslant 0\} \leqslant L.$$

Следовательно, $\varepsilon(x^*) = 0$. Так как для любой сходящейся подпоследовательности $\{x^{k_l}\}$ из $\{x^k\}$ вектор $\varepsilon(x^{k_l}) \to 0$ при $l \to \infty$, то и $\varepsilon(x^k) \to 0$ при $k \to \infty$ (это нетрудно показать). Доказательство завершено.

Связывая полученные результаты с ранее известными результатами (см. [3, 4]), предлагаем в алгоритмах рассматриваемого метода для решения задачи (1) минимизировать функцию $F_k(x)$ с точностью $\|F_{kx}(x)\| \leqslant \varepsilon^k$, где числа $\varepsilon^k > 0$, причем $\varepsilon^k \to 0$ при $k \to \infty$, пока $\varepsilon^k > \varepsilon_0$, а затем с точностью (4) до выполнения условия (5) в полученной точке минимума. Для формирования функций $F_{k+1}(x)$ рекомендуем использовать приемы, изложенные в работах [2–5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиакко А., Мак-Кормик Г., Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации, М., 1972.
2. Мауэр И. В., О методе штрафных функций, 17 с., Рукопись деп. в ВИНИТИ 27 марта 1975 г., № 849-75.
3. Костина М. А., Тр. Ин-та матем. и мех. УНЦ АН СССР, вып. 14, Свердловск, 1974, с. 65.
4. Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **11**, № 1, 3 (1971).
5. Keefer D. L., Gottfried B. S., AIIE Trans., **2**, No. 4, 281 (1970).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/IV 1976