EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.1.11

УДК 519.217

Галина ПРИСТАВКО

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ВЫБОРОМ МОМЕНТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

GALINA PRISTAVKO. MARKOVI JADADE OPTIMAALSEST PEATAMISEST VAATLUSMOMENTIDE VALIKU ALUSEL

GALINA PRISTAVKO. ON OPTIMAL STOPPING OF MARKOV SEQUENCES WITH CHOOSING OBSERVATION MOMENTS

На фиксированном измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$ рассматривается однородная марковская цепь $X=(x_n, \mathfrak{F}_n, \mathbf{P}_x)$, $n=0, 1, \ldots, N$, со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{M}_N$ — класс марковских моментов τ (относительно семейства $\{\mathfrak{F}_n\}$) со значениями во множестве $\{0, 1, \ldots, N\}$ и $g=g(x)$ — борелевская функция, $-\infty<g(x)\leqslant+\infty$, удовлетворяющая условиям $\mathbf{M}_x|g(x_n)|<\infty$, $n\leqslant N$, $x\in E$. С каждой такой функцией $g(x)$ и марковским моментом τ свяжем функцию $g(x_\tau)$ (полагая по определению $g(x_\tau)$ равным $g(x_n)$ на множестве $\{\tau=n\}$), которую будем интерпретировать как выигрыш, получаемый в состоянии x_τ при остановке наблюдений в момент τ. Естественно тогда $\mathbf{M}_x g(x_\tau)$ назвать средним выигрышем, соответствующим начальному состоянию x и выбранному моменту τ.

В теории оптимальных правил остановки [1] подробно изучен вопрос о структуре «цены» $s_N(x)=\sup\limits_{\tau\in\mathfrak{M}_N}\mathbf{M}_x g(x_\tau)$ и способах отыскания оптимальных моментов τ_N. Существенно при этом, что наблюдения (до момента остановки) осуществляются «подряд» и это отражено в требовании «марковости» момента τ (т. е. событие $\{\tau=n\}\in\mathfrak{F}_n$ при всех $n\leqslant N$).

В настоящей работе рассмотрено обобщение этой задачи, состоящее в том, что наблюдать цепь X разрешается не во все моменты времени, а лишь в K моментах $(K\leqslant N)$, выбор которых принадлежит наблюдателю.

Пусть τ_l^k — момент l-го наблюдения и τ^k — момент остановки $(\tau_0^k=0,\ \tau_1^k\leqslant\tau_2^k\leqslant\ldots\leqslant\tau_l^k\leqslant\tau^k\leqslant N)$. Будем предполагать, что момент τ_l^k измерим относительно σ-алгебры $\sigma(x_{\tau_1^k}, \ldots, x_{\tau_{l-1}^k})$, а момент τ^k — относительно $\sigma(x_{\tau_1^k}, \ldots, x_{\tau_l^k})$.

Иначе говоря, выбор момента для последующего наблюдения и остановки определяется лишь значениями наблюдений в предшествующие моменты.

Пусть $\overset{k}{s}_N(x)=\sup \mathbf{M}_x g(x_{\tau^k})$, где супремум берется по всем последовательностям $(\tau_1^k, \ldots, \tau_k^k, \tau^k)$, $\sigma_l^k=\tau_l^k-\tau_{l-1}^k$, $\sigma^k=\tau^k-\tau_k^k$, $\sigma_0^k=0$.

Теорема 1. (1) *Имеют место следующие рекуррентные соотношения*:

$$\overset{k}{s}_N(x)=\max_{0\leqslant n\leqslant N} \mathbf{M}_x \overset{k-1}{s}_{N-n}(x),\ k=1, 2, \ldots, K, \text{ где } \overset{0}{s}_N(x)=\max_{0\leqslant n\leqslant N} \mathbf{M}_x g(x_n).$$

(2) *Оптимальные моменты* $\sigma_1^k, \ldots, \sigma_k^k$ *и* $\sigma^k=\sigma_{k+1}^k$ *определяются из соотношений*

$$\sigma_l^k=\min\{\sigma_{l-1}^k\leqslant n\leqslant N: \mathbf{M}_{x_{\sigma_{l-1}^k}} s_{N-n}^{k-l}(x_n)=s_{N-\sigma_{l-1}^k}^{k-(l-1)}(x_{\sigma_{l-1}^k})\},$$

$$l=1, 2, \ldots, k.$$

при этом $\sigma^0=\min\{0\leqslant n\leqslant N: \mathbf{M}_x g(x_n)=\overset{0}{s}_N(x)\}$.

Наряду с ценами $\overset{k}{s}_N(x)$ введем цены $s^k(x)=\sup \mathbf{M}_x g(x_{\tau^k})$, где супремум берется по всем последовательностям $(\tau_1^k, \ldots, \tau_k^k, \tau^k)$ таким, что $\tau_l^k(\omega)<\infty$, $\tau^k(\omega)<\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{M}_x[\sup_n|g(x_n)|]<\infty$, $x\in E$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\overset{k}{s}_N(x)=s^k(x) \text{ и } \lim_{k\to\infty}s^k(x)=s(x).$$

Если множество E — конечно, можно дать оценку скорости сходимости. Именно, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть множество* E *конечно*, $|g(x)|<\infty$. *Тогда существует* $0\leqslant\lambda<1$ *такое, что для достаточно больших* k $\|s^k(x)-s(x)|\leqslant\lambda^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/IV 1976