LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 1

УДК 519.217

Галина ПРИСТАВКО

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ВЫБОРОМ МОМЕНТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

GALINA PRISTAVKO. MARKOVI JADADE OPTIMAALSEST PEATAMISEST VAATLUSMOMENTIDE VALIKU ALUSEL

GALINA PRISTAVKO. ON OPTIMAL STOPPING OF MARKOV SEQUENCES WITH CHOOSING OBSERVATION MOMENTS

На фиксированном измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{F})$ рассматривается однородная марковская цепь $X = (x_n, \mathfrak{F}_n, \mathbf{P}_x)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathfrak{B})$. Пусть $\mathfrak{M}_N$ — класс марковских моментов τ (относительно семейства $\{\mathfrak{F}_n\}$) со значениями во множестве $\{0, 1, \ldots, N\}$ и $g = g(x)$ — борелевская функция, $-\infty < g(x) \leqslant +\infty$, удовлетворяющая условиям $\mathbf{M}_x |g(x_n)| < \infty$, $n \leqslant N$, $x \in E$. С каждой такой функцией $g(x)$ и марковским моментом τ свяжем функцию $g(x_\tau)$ (полагая по определению $g(x_\tau)$ равным $g(x_n)$ на множестве $\{\tau = n\}$), которую будем интерпретировать как выигрыш, получаемый в состоянии x_τ при остановке наблюдений в момент τ. Естественно тогда $\mathbf{M}_x g(x_\tau)$ назвать средним выигрышем, соответствующим начальному состоянию x и выбранному моменту τ.

В теории оптимальных правил остановки [1] подробно изучен вопрос о структуре «цены» $s_N(x) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{M}_N} \mathbf{M}_x g(x_\tau)$ и способах отыскания оптимальных моментов τ_N. Существенно при этом, что наблюдения (до момента остановки) осуществляются «подряд» и это отражено в требовании «марковости» момента τ (т. е. событие $\{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n$ при всех $n \leqslant N$).

В настоящей работе рассмотрено обобщение этой задачи, состоящее в том, что наблюдать цепь X разрешается не во все моменты времени, а лишь в K моментах ($K \leqslant N$), выбор которых принадлежит наблюдателю.

Пусть τ_l^k — момент l-го наблюдения и τ^k — момент остановки ($\tau_0^k = 0$, $\tau_1^k \leqslant \tau_2^k \leqslant \ldots \leqslant \tau_l^k \leqslant \tau^k \leqslant N$). Будем предполагать, что момент τ_l^k измерим относительно σ-алгебры $\sigma(x_{\tau_1^k}, \ldots, x_{\tau_{l-1}^k})$, а момент τ^k — относительно $\sigma(x_{\tau_1^k}, \ldots, x_{\tau_l^k})$.

Иначе говоря, выбор момента для последующего наблюдения и остановки определяется лишь значениями наблюдений в предшествующие моменты.

Пусть $\overset{k}{s}_N(x) = \sup \mathbf{M}_x g(x_{\tau^k})$, где супремум берется по всем последовательностям $(\tau_1^k, \ldots, \tau_k^k, \tau^k)$, $\sigma_l^k = \tau_l^k - \tau_{l-1}^k$, $\sigma^k = \tau^k - \tau_k^k$, $\sigma_0^k = 0$.

Теорема 1. (1) *Имеют место следующие рекуррентные соотношения*:

$$\overset{k}{s}_N(x) = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} \mathbf{M}_x \overset{k-1}{s}_{N-n}(x), k = 1, 2, \ldots, K, \text{ где } \overset{0}{s}_N(x) = \max_{0 \leqslant n \leqslant N} \mathbf{M}_x g(x_n).$$

(2) *Оптимальные моменты* $\sigma_1^k, \ldots, \sigma_k^k$ *и* $\sigma^k = \sigma_{k+1}^k$ *определяются из соотношений*

$$\sigma_l^k = \min\{\sigma_{l-1}^k \leqslant n \leqslant N : \mathbf{M}_{x_{\sigma_{l-1}^k}} s_{N-n}^{k-l}(x_n) = s_{N-\sigma_{l-1}^k}^{k-(l-1)}(x_{\sigma_{l-1}^k})\},$$

$$l = 1, 2, \ldots, k.$$

при этом $\sigma^0 = \min\{0 \leqslant n \leqslant N : \mathbf{M}_x g(x_n) = \overset{0}{s}_N(x)\}$.

Наряду с ценами $\overset{k}{s}_N(x)$ введем цены $s^k(x) = \sup \mathbf{M}_x g(x_{\tau^k})$, где супремум берется по всем последовательностям $(\tau_1^k, \ldots, \tau_k^k, \tau^k)$ таким, что $\tau_l^k(\omega) < \infty$, $\tau^k(\omega) < \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{M}_x[\sup_n |g(x_n)|] < \infty$, $x \in E$. *Тогда*

$$\lim_{N \to \infty} \overset{k}{s}_N(x) = s^k(x) \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} s^k(x) = s(x).$$

Если множество E — конечно, можно дать оценку скорости сходимости. Именно, имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть множество* E *конечно*, $|g(x)| < \infty$. *Тогда существует* $0 \leqslant \lambda < 1$ *такое, что для достаточно больших* k $\|s^k(x) - s(x)\| \leqslant \lambda^k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/IV 1976