EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 1

УДК 519.8

Э. ЮБИ

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАНДОМИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ В *М*- И *Р*-МОДЕЛЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данной статье для решения рассмотренной С. Фромовицем и Ю. М. Ермольевым задачи о нахождении оптимального распределения в *М*-модели предлагается метод обратной матрицы для обобщенной задачи линейного программирования, разработанный Я. М. Берщанским. Этот же метод предлагается и для *Р*-модели (рассмотренной Д. Б. Юдиным при двух ограничениях) при любом числе ограничений.

Рассмотрим множество $X \subset E^n$. Пусть на X задана функция $f(x)$, $f: X \to E^1$.

Определение 1. *Функция* $f(x)$ *называется квазивыпуклой, если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *и для любого* λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \leqslant \max[f(x_1), f(x_2)].$$

Определение 2. *Дифференцируемая функция* $f(x)$ *называется псевдовыпуклой, если из условия* $(\nabla f(x), y-x) \geqslant 0$ *следует, что* $f(y) \geqslant f(x)$ *для любых* $x, y \in X$.

Рассмотрим обычную задачу нелинейного программирования

$$f(x) \to \inf,$$
$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i=1, \ldots, m, \tag{1}$$
$$x \in X.$$

Существуют ситуации, когда решение этой задачи разумно свести к отысканию случайного вектора x, т. е. к отысканию функции распределения $F(x)$ вектора x [1,2].

Предположим, что все функции $f(x)$ и $g_i(x)$ измеримы по Борелю. Тогда возможна следующая постановка задачи:

$$M[f(x)] = \int_X f(x)\,dF(x) \to \inf,$$
$$M[g_i(x)] = \int_X g_i(x)\,dF(x) \leqslant 0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$
$$x \in X,$$

где по всевозможным m-мерным распределениям точки x минимизируется среднее значение $f(x)$, а ограничения выполняются в среднем. Такая задача называется *М*-моделью.

P-моделью называется задача

$$P[\varphi(x) \leqslant 0] \to \inf,$$
$$P[\psi_i(x) \leqslant 0] \geqslant \alpha_i, \ i=1, 2, \ldots, m, \tag{3}$$
$$x \in X,$$

которая представляет собой частный случай задачи (2).

Как доказали независимо друг от друга С. Фромовиц [1] и Ю. М. Ермольев [2], оптимальным решением задачи (2) является дискретное, сосредоточенное не более чем в $m+1$ точках распределение.

Поэтому преобразуем задачу (2) в задачу

$$\sum_{j=0}^{m} f(x_j) p_j \to \inf_{x_j, p_j},$$
$$\sum_{j=0}^{m} g_i(x_j) p_j \leqslant 0, \ i=1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$
$$\sum_{j=0}^{m} p_j = 1, \ p_j \geqslant 0, \ x_j \in X, \ j=0, 1, \ldots, m$$

и при фиксированных x_j ($j=0, 1, \ldots, m$) будем обозначать ее как задачу (4а). Последняя относительно p_j — задача линейного программирования. Несмотря на линейность по p_j, задача (4) намного сложнее задачи (1), поскольку в ней область допустимых значений x зависит от значений $g_i(x)$ во всем X, а в задаче (1) — определяется лишь неравенствами $\operatorname{sign} g_i(x) \leqslant 0$. Уже при $m=0$ (когда оптимальным является детерминированное решение) задача (4) преобразуется в задачу невыпуклого программирования, а в случае, когда все функции $f(x)$, $g_i(x)$ и множество X выпуклы, — в задачу выпуклого программирования, т. е. в задачу минимизации $f(x)$ на X. В невыпуклом случае (уже при квази- или псевдовыпуклых функциях) можно построить примеры, когда рандомизация улучшает значение целевой функции, а также показать, что задача (1) допустимых решений не имеет, а задача (2) — имеет.

Изложим метод решения задачи (4). Как уже было отмечено, задача (4а) — задача линейного программирования, причем точка x_j определяет столбец коэффициентов $\{g_i(x_j)\}$, $i=1, 2, \ldots, m$, соответствующих p_j. Будем предполагать, что ни одна функция $g_i(x)$ не является тождественно постоянной на X и что функции $g_i(x)$ независимы. Тогда выбором точек x_j можно будет добиться независимости строк линейных ограничений.

Запишем задачу линейного программирования, двойственную к (4а):

$$u_{m+1} \to \sup_{u_i},$$
$$\sum_{i=1}^{m} g_i(x_j) u_i - u_{m+1} \geqslant -f(x_j), \ j=0, 1, \ldots, m, \tag{5}$$
$$u_i \geqslant 0, \ i=1, 2, \ldots, m.$$

Допустим, что значение целевой функции в (4) ограничено снизу и задача имеет решение. Тогда при фиксированных x_j inf в прямой задаче линейного программирования (4а) и sup в двойственной задаче (5) достигаются. Ю. М. Ермольев предложил для решения (4) использовать идею Вулфа, которая состоит в следующем. Фиксируется $m+1$ точек $x_j = x_j^{(0)} \in X$ таких, что задача (4а) имеет решение. Пусть $p_j^{(0)}$ есть решение (4а), а $u_i^{(0)}$ — решение (5), $j=0, \ldots, m$, $i=1, \ldots, m+1$. Новый вектор $x \in X$, который позволяет уменьшать значение целевой функции в (4а), может быть найден в результате минимизации по x:

$$f(x)+\sum_{i=1}^{m} u_i^{(0)} g_i(x), \quad x \in X. \tag{6}$$

Очевидно, (4а) при новом x имеет решение, и столбец, соответствующий новому x, не может быть представлен в виде линейной комбинации имеющихся столбцов с положительными коэффициентами. Затем снова решается задача (4а) при $x_j = x_j^{(1)}$ (верхний индекс соответствует номеру задачи линейного программирования типа (4а)).

Обозначим через z_0 минимум в (4), через $z^{(s)}$ — минимум, соответствующий s-й задаче (4а), $\delta_j^{(s)} = \sum_{i \in I} u_i^{(s)} g_i(x_j) + u_{m+1}^{(s)} + f(x_j)$, $\delta^{(s)} = \min_j \delta_j^{(s)}$, где $j=0, 1, \ldots, m$, а I — множество индексов базиса s-й задачи (4а) для ограничений в виде неравенств. Определение базиса в задаче (4а) такое же, как и в задаче линейного программирования с постоянными коэффициентами и смешанными ограничениями [3].

Докажем теперь условие оптимальности для задачи (4), аналогичное условию оптимальности для задачи с постоянными коэффициентами (см. [3], с. 335).

Лемма. *Пусть решение s-й задачи* (4а) *невырожденное и* $\delta^{(s)} \geqslant 0$. *Тогда решение s-й задачи* $p_j^{(s)}, x_j^{(s)}$ ($j=0, 1, \ldots, m$) *является оптимальным решением для задачи* (4).

Доказательство. В силу невырожденности базиса s-й задачи типа (4а) ограничения для $i \in I$ выполняются как равенства. (Вместо термина «базис, соответствующий невырожденному решению» будем писать сокращенно «невырожденный базис».) Пусть $x_j^{(s)} \in X$ точки, в которых вычисляются столбцы $\{g_i(x_j^{(s)})\}$ в s-й задаче типа (4а), а $u_1^{(s)}, \ldots, u_{m+1}^{(s)}$ — оптимальное решение s-й двойственной задачи типа (5), $j=0, 1, \ldots, m$; $i=1, 2, \ldots, m$. Тогда $u_1^{(s)} \geqslant 0, \ldots, u_m^{(s)} \geqslant 0$. Для любых допустимых p_j, x_j можно писать:

$$z = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) p_j - \sum_{i=1}^{m} u_i^{(s)} \Big[0 - \sum_{j=0}^{m} g_i(x_j) p_j\Big] - u_{m+1}^{(s)} \Big(1 - \sum_{j=0}^{m} p_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \Big[f(x_j) + \sum_{i=1}^{m} u_i^{(s)} g_i(x_j) + u_{m+1}^{(s)}\Big] p_j - u_{m+1}^{(s)} \geqslant \delta^{(s)} \sum_{j=0}^{m} p_j + z^{(s)} = \delta^{(s)} + z^{(s)}.$$

Для любых x_j и p_j таких, что $x_j \in X$, $p_j \geqslant 0$, $\sum_{j=0}^{m} p_j = 1$, выполняется неравенство $z \geqslant \delta^{(s)} + z^{(s)}$, т. е. $z \geqslant z^{(s)}$, так как $\delta^{(s)} \geqslant 0$. Тогда $z^{(s)}$ является оптимальным значением целевой функции.

Найти условия, когда предложенный Ю. М. Ермольевым алгоритм сходится к оптимальному решению, очень трудно, но лемма позволяет проверить условия оптимальности. Сложность таит и построение начального допустимого плана. Задача нахождения оптимального распределения представляет интерес, если не все функции $f(x)$, $g_i(x)$ и множество X выпуклы, но тогда становится очень трудной задача (6). Единственное, чем можно воспользоваться в данном случае, это то, что от итерации к итерации изменяются только входные параметры u_i, не меняя при этом своего знака. Но, к сожалению, даже если все функции в (6) квази- или псевдовыпуклы, их сумма с положительными u_i этим свойством в общем случае не обладает.

Рассмотрим т. н. обобщенную задачу линейного программирования [4]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j p_j \to \min, \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_j p_j = B,$$

$$(c_j, a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in D, \; p_j \geqslant 0, \; j=1, \ldots, n,$$

где D — компактное множество $(n+1)$-мерного пространства. В [4] для решения этой задачи Я. М. Берщанским был предложен метод обратной матрицы, доказана сходимость алгоритма и даны некоторые рекомендации по его применению.

Теорема 1. *Если функции $f(x)$, $g_i(x)$ и множество X такие, что образ множества X при отображении $\{f(x), g_1(x), \ldots, g_m(x)\}$ является компактом, то алгоритм обратной матрицы сходится к оптимальному решению* (4).

Доказательство. Преобразуем задачу (4) к виду

$$\sum_{j=0}^{m} f(x_j) p_j \to \min,$$

$$\sum_{j=0}^{m} g_i(x_j) p_j + \mu_i = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{m} p_j = 1, \; p_j \geqslant 0, \; \mu_i \geqslant 0,$$

$$x_j \in X, \; j=0, 1, \ldots, m, \; i=1, 2, \ldots, m.$$

Ясно, что образ множества X после дополнения его векторами вида $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1)$ останется компактом. Следовательно, задача (8) является обобщенной задачей линейного программирования, т. е. все условия для сходимости алгоритма обратной матрицы выполняются. Для начала вычислений предположим, что заданы невырожденный базис, который используется на всех дальнейших итерациях, и положительное число Δ (одно и то же на всех итерациях). Опишем одну итерацию алгоритма обратной матрицы. Пусть уже задан s-й базис. Вычислим оценки векторов начального базиса, соответствующих основным переменным p_j, относительно s-го базиса. Если наибольшая оценка больше Δ, то соответствующий начальный вектор вводится в базис. В противном случае он находится из решения вспомогательной задачи

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^{(s)} g_i(x) - f(x) \to \max = \delta^{(s)}, \qquad x \in X. \tag{9}$$

В общем, при вычислении оценки $\delta^{(s)}$ следовало бы принимать во внимание и дополнительные переменные μ_i (т. е. вычислять максимум в (9) по образу X, дополненному векторами $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$ $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)$) но, как легко понять, значение целевой функции (8) не может быть улучшено введением дополнительной переменной в базис и выведением основной переменной. Полученное решение является оптимальным, если $\delta^{(s)} \leqslant 0$.

Пусть в дальнейшем условия теоремы 1 для M-модели выполнены. Рассмотрим построение начального базиса. Если точка x_0, удовлетворяющая условию Слейтера, $g_i(x_0) = a_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x_0 \in X$, известна, то в качестве базиса можно взять вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_m, 1)$ и набор m дополнительных векторов $(1, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 1, 0)$. Исследуем случай, когда точка, удовлетворяющая условию Слейтера, не известна. Пусть для точки x_0 имеем $a_i = g_i(x_0) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ (при выборе x_0 следует руководствоваться как можно большим k), а для $i = k+1, \ldots, m$ имеем $a_i = g_i(x_0) \geqslant 0$, причем некоторые из последних неравенств выполняются как строгие. Тогда ограничения в (8), начиная с $(k+1)$-го до m-го, записываются как $\sum_{j=0}^{m} g_i(x_j) p_j + \mu_i - \lambda_i = 0$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = k+1, \ldots, m$, где искусственные переменные λ_i используются для сведения неравенств к равенствам. Тогда на первом этапе построения начального допустимого базиса целевой функцией в (8) будет $\sum_{i=k+1}^{m} \lambda_i \to \min$.

Определение 3. *Функция $f(x)$ называется кусочно-линейной, если она имеет точки разрыва только первого рода, а область ее определения можно разбить на конечное число областей, в каждой из которых она линейна.*

Дополнительно к условиям теоремы 1 допустим, что X — многогранное множество. Докажем, что в таком случае алгоритм обратной матрицы сходится за конечное число шагов. Образ X является компактом, и так как все функции кусочно-линейны, всякая точка выпуклой оболочки образа X может быть представлена в виде выпуклой комбинации угловых точек, которые являются одними и теми же для всех точек образа X. Ограничения задачи эквивалентны конечной системе ограничений, и задача решается методом обратной матрицы за конечное число шагов.

Задача нахождения оптимального априорного распределения тоже сводится к задаче типа (8) [5]. Если все функции $f(x)$, $g_i(x)$ и множество X выпуклы и выполнены условия теоремы 1, то $x^{(s)} = \sum_{j=0}^{m} p_j^{(s)} x_j^{(s)}$ сходится к оптимальному решению задачи (1). В работе [6] для решения задачи (4) в случае дифференцируемых $f(x)$ и $g_i(x)$ предлагается метод возможных направлений. Если выполнены условия теоремы 1, метод обратной матрицы сходится и для разрывных функций.

Перейдем теперь к рассмотрению P-модели вида (3). Предположим, что ограничения в (3) непротиворечивы, т. е. что допустимое решение существует. Достаточным условием этого является, например, совместность системы ограничений $\psi_i(x) \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x \in X$. Допустим также, что ни одна функция $\operatorname{sign} \psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, не является тождественно постоянной на X и что среди этих функций нет таких, которые совпадали бы между собой для всех $x \in X$.

Теорема 2. *Алгоритм обратной матрицы сходится к оптимальному решению P-модели за конечное число шагов.*

Доказательство. Как и в M-модели, в P-модели оптимальным является дискретное распределение, сосредоточенное не более чем в $m+1$ точках. Преобразовывая задачу (3) в M-модель и учитывая, что все функции $f(x)$ и $g_i(x)$ принимают независимо от формы множества X всего лишь два значения, получим, что образ множества всегда компакт, т. е. все условия теоремы 1 выполнены. Значит, образ множества X состоит из q, $q \leqslant 2^{m+1}$, отдельных точек.

P-модель (3) эквивалентна следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{j=0}^{q-1} f(x_j)\, p_j \to \min_{p_j},$$

$$\sum_{j=0}^{q-1} g_i(x_j)\, p_j + \mu_i = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{q-1} p_j = 1, \quad p_j \geqslant 0, \quad \mu_i \geqslant 0, \tag{10}$$

$$x_j \in X, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Для такой задачи алгоритм обратной матрицы сходится за конечное число шагов. Построение начального допустимого базиса такое же, как и в M-модели.

Легко построить пример P-модели, когда множество X и все функции $\varphi(x)$ и $\psi_i(x)$ выпуклы, а оптимальным является случайное решение. Если система неравенств $\varphi(x) > 0$, $\psi_i(x) \leqslant 0$, $x \in X$, имеет решение x^* (в обычном смысле), то x^* является и оптимальным решением (10), т. е. одно из возможных оптимальных решений — детерминированное.

Решение P-модели в случае $m = 2$ было рассмотрено Д. Б. Юдиным [5] (с. 95). Вводится три множества $G_0 = \{x : x \in X,\ \varphi(x) \leqslant 0\}$, $G_1 = \{x : x \in X,\ \psi_1(x) \leqslant 0\}$, $G_2 = \{x : x \in X,\ \psi_2(x) \leqslant 0\}$. Их взаимное расположение определяет оптимальное распределение, которое находится путем решения задачи линейного программирования. К этому следует добавить, что оптимальное решение сосредоточено не более чем в 3 точках. Для $m > 2$ метод не применим из-за комбинаторных трудностей. Хотя и в методе обратной матрицы вспомогательная задача (9) сложнее, чем задача линейного программирования, метод применим и для больших m. (Очевидно, условие $x \in G_i$ можно заменить на условие $M[1 - \psi_i(x)] \leqslant 0$, где $\psi_i(x)$ — характеристическая функция множества G_i.) Несколько иной подход к P-модели был предложен С. В. Жуленевым [7]. Заранее предполагается, что x — нормально распределенная случайная величина, а искомые — параметры распределения. Но если целевая функция такая же, как в M-модели или в P-модели, оптимальным является дискретное распределение, моделирование которого в практике реализуется проще и которое кажется более естественным, чем нормальное распределение.

Следует сказать, что решение в P-модели почти всегда неединственное. Функции $f(x)$ и $g_i(x)$ кусочно-постоянны, и точек максимума в (9) может быть много. По этой причине естественно искать решение P-модели не в виде дискретной случайной величины, принимающей не более чем $m+1$ значений, а в виде системы, содержащей не более чем $m+1$ множеств X_i и соответствующих им вероятностей p_j, $p_j = P[x_j \in X_j]$, где компонента x_j может иметь любое распределение в X_j, лишь бы $P[x_i \in X_j] = p_j$. Тогда оптимальное решение P-модели в принципе может быть построено по следующей схеме: вне G_0 находится пересечение множеств G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, с максимальным числом входящих в это пересечение множеств G_i (если таких пересечений много, берется любое из них), это пересечение принимается за множество X_0, p_0 приравнивается к наименьшему из чисел α_i входящих в это пересечение множеств G_0 и соответствующее множество исключается из дальнейшего рассмотрения, а остальные α_i уменьшаются на p_0. Эти действия повторяются до тех пор, пока не будут выполнены все ограничения, кроме таких, что $G_i \subset G_0$. Затем по такой же схеме удовлетворяют эти ограничения. Все оставшиеся распределяют вне G_0.

При исследовании M-модели наибольшую трудность представляет решение вспомогательной задачи (9), так как с точки зрения рандомизации интересен случай невыпуклых $f(x)$ и $g_i(x)$. При разрывных функциях приемлем случайный поиск. Для P-модели следует использовать ненаправленный случайный поиск или направленный случайный поиск с «большим» шагом. При этом задачу (9) нет необходимости решать на каждом шагу точно.

В заключение рассмотрим пример решения P-модели методом обратной матрицы: найти такую функцию распределения $F(x)$, что

$$P[|x-7|-4\leqslant 0] \to \min,$$
$$P[|x-5|-1\leqslant 0] \geqslant 0{,}3,$$
$$P[|x-9|-1\leqslant 0] \geqslant 0{,}4,$$
$$x \in X = [0, 20].$$

Преобразуем задачу в M-модель. Функция $f(x)=1$ при $x \in [3, 11]$, в остальных точках $f(x)=0$. Далее $g_1(x) = -0{,}7$ при $x \in [4, 6]$, в остальных точках $g_1(x) = 0{,}3$. И, наконец, $g_2(x) = -0{,}6$ при $x \in [8, 10]$, в остальных точках $g_2(x) = 0{,}4$. В качестве начальной точки выбираем $x_0 = 5$. Получаем $f(5) = 1$, $g_1(5) = -0{,}7$, $g_2(5) = 0{,}4$, $p_0 = 1$, $\mu_1 = 0{,}7$, $\lambda_2 = 0{,}4$, $\bar{c} = (0,0,1)$. На первом этапе минимизируется λ_2, $\lambda_2 \to \min$. Максимум δ достигается, например, при $x_1 = 9$ и равняется 1, а в базис вводится столбец (0,3; —0,6; 1). На первом шаге выводится из базиса искусственная переменная λ_2 и вводится p_1.

$A_{\cdot 0}$	1	0	0	1	1
$A_{\cdot \mu_1}$	0,7	1	0	0,7	1
$A_{\cdot \lambda_2}$	0,4	0	−1	0,4	1
1.	0,4	0	−1	0,4	1

$A_{\cdot 0}$	0,6	0	1	0,6	1
$A_{\cdot \mu_1}$	0,3	1	1	0,3	1
$A_{\cdot 1}$	0,4	0	−1	0,4	0
2.	1	0	0	1	0

$A_{\cdot 0}$	0,3	−1	0	0,3
$A_{\cdot 2}$	0,3	1	1	0,3
$A_{\cdot 1}$	0,4	0	−1	0,4
3.	0,7	−1	−1	0,7

Одно из возможных оптимальных решений (при значении целевой функции, равной 0,7) таково: $x_0 = 5$, $x_1 = 9$, $x_2 = 12$, $p_0 = 0{,}3$, $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fromovitz S., Management Sci., Ser. A, 1965.
2. Ермольев Ю. М., Кибернетика, № 1, 1 (1970).
3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование. Теория, методы и приложения, М., 1969, с. 335.
4. Берщанский Я. М., В сб.: Математические методы в экономических исследованиях, М., 1974.
5. Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., 1974.
6. Каплинский А. И., Позняк А. С., Пропой А. И., Автоматика и телемеханика, № 8, 71 (1971).
7. Жуленев С. В., В сб.: Математические методы в экономических исследованиях, М., 1974.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
6/II 1976

E. ÜBI

STOHHASTILISE PLANEERIMISE *M*- JA *P*-MUDELI OPTIMAALSE RANDOMISEERITUD LAHENDI LEIDMINE

M- ja *P*-mudeli optimaalse randomiseeritud lahendi leidmise ülesanne on taandatud muutuvate koefitsientidega lineaarse planeerimise ülesandeks. Viimase lahendamiseks on kasutatud J. Berštšanski pöördmaatriksimeetodit, mis *P*-mudeli puhul koondub lõpliku arvu iteratsioonidega.

E. ÜBI

FINDING AN OPTIMAL RANDOM SOLUTION OF *M*- AND *P*-MODELS IN STOCHASTIC PROGRAMMING

The optimal random solution problem of *M*- and *P*-models is reduced to a linear programming problem with variable coefficients. To solve this linear programming problem, Berschansky's inverse matrix method is used. For *P*-models this method converges with a finite number of iterations.