EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.1.05

УДК 62—50

И. КЕЙС

О ПОНИЖЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача оптимального синтеза n-мерной динамической системы, линейной по управлению. Нестационарная область управления, заданная системой неравенств, аппроксимируется одним ограничением. Для системы с информативными переменными задача сведена к решению характеристического уравнения размерности $l \ll n$ и выбору матрицы управления. Предложен новый способ решения проблемы Калмана—Летова — обращение посредством аппроксимации гиперкуба управления. Получено решение задач оптимального синтеза для y-инвариантных, y-одномерных и некоторых диссипативных систем.

1. Рассмотрим линейную по управлению u динамическую систему

$$\xi^{\cdot}=X(q)+A_1(q)u, \quad X(t,0)\equiv 0, \quad q=(t,\xi_\nu)^*, \quad X=(X_\nu)^*, \tag{1.1}$$

$$\xi=(\xi'_\alpha,\ \xi''_\beta)^*, \quad \xi'=(\xi'_\alpha)^*, \quad \xi''=(\xi''_\beta)^*, \quad u=(u_s)^*, \quad A_1=\|a^1_{\nu s}\|,$$

$$\operatorname{rang} A_1=r, \quad X(q),\ A_1(q)\subset C_1 \quad \text{при} \quad q\in Q:\ t\geqslant 0, \quad |\xi|<\infty,$$

$$\xi^{\cdot}=d\xi/dt, \quad |\xi|^2=\xi\cdot\xi=\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu^2 \ (\alpha=\overline{1,n_1},\ \beta=\overline{1,n_2},\ \nu=\overline{1,n},\ s=\overline{1,r}).$$

Допустимые управления $u(t)$ — кусочно-непрерывны на $T=[0,\infty)$ со значениями в $\omega^1=\omega^1(q)\subset E^r$ выпуклой компактной области

$$0\leqslant h_1(u,q)\leqslant \varrho=\text{const}\ (h_1(u,q)\subset C,\ u\in E^r,\ q\in Q,\ \varrho>0), \tag{1.2}$$

где скалярная функция $h_1(u,q)$ принадлежит классу выпуклых функций G

$$h_1(\alpha_0 u)=\alpha_0 h_1(u),\ h_1(u_2)\geqslant h_1(u_1)+(u_2-u_1)\nabla h_1(u_1)\ (\alpha_0\geqslant 0,\ u_1\neq 0), \tag{1.3}$$

$$h_1(0,q)\equiv 0,\ h_1(u,q)>0,\ u\in E^r_0=E^r\backslash 0,\ h(u,q)\subset C_2 \text{ на } E^r_0\times Q.$$

Граница $\{h_1(u^1)=\varrho\,|\,u^1\}$ — замкнутая поверхность при $q=q_0=\text{const}$. Если $\varrho\to\infty$, то $|u^1|\to\infty$, и если $\varrho\to 0$, то $|u^1|\to 0$. Неравенство (1.2) — агрегат ограничений $a^0_s(q)\leqslant u_s\leqslant a^1_s(q)$, область ω^1 — гладкая аппроксимация этого гиперкуба, регулярная [1] при $r>1$. Обозначим $\overset{0}{h_1}(q)=\min_e h_1(e,q)$, $\overset{1}{h_1}(q)=\max_e h_1(e,q)$, $e=u\,|u|^{-1}$. Для задач с границей области ω^1 в пределах $m_0 \leqslant |u^1| \leqslant m_1$ достаточно выбрать $h_1(u, q)$ согласно условиям

$$\varrho m_1^{-1} \leqslant h_1^0(q) \leqslant h_1^1(q) \leqslant \varrho m_0^{-1} \quad (0 < \mathrm{const} = m_0 \leqslant m_1 = \mathrm{const}). \tag{1.4}$$

Далее допустимы те из $\{u(t)\}$, которые приводят ξ'-компоненту ξ на множество цели $\xi'_\alpha = 0$ за конечное или бесконечное время $t_1 - t_0$. Здесь $t_1(q_0)$ — первый момент примыкания $\xi'(t, \xi_0) \to 0$ при $t \to t_1^0 - 0$, область значений $\xi_0 \equiv \xi(t_0)$ управляемости определим ниже. Введем обратимое преобразование координат $x_\nu = x_\nu(q)$

$$x = (x_\nu)^* = (y_i, \gamma_j)^*, \quad x_\nu(t, 0) \equiv 0, \quad J = \left\| \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi_\sigma} \right\|, \quad \det J \neq 0, \quad \xi' \neq 0, \tag{1.5}$$

$$y = (y_i(q))^*, \quad \gamma = (\gamma_j(q))^*, \quad l = \dim y \ll n \quad (i = \overline{1, l},\ j = \overline{1, n-l}),$$
$$\xi'_\alpha = \xi'_\alpha(t, x), \quad \xi''_\beta = \xi''_\beta(t, x), \quad \xi_\sigma(t, 0) \equiv 0 \quad (\sigma, \nu = \overline{1, n = n_1 + n_2}),$$

чтобы использовать в качестве переменных агрегации $y(q)$ известные для системы (1.1) при $u \equiv 0$ информативные переменные [1–3]. Последними могут служить инварианты и y-автономные функции Ляпунова $y_i(q)$ со следующими свойствами.

Пусть $y_i(q), \gamma_j(q) \subset C$ на Q, в области $Q_0: t \geqslant 0,\ \xi' \in E^{n_1},\ \xi' \neq 0,\ \xi'' \in E^{n_2}$, они принадлежат C_2. Примем, что $y_i \geqslant 0$, $y_i(q)$ неограничены на Q, а равенство $y = 0$ эквивалентно $\xi' = 0$. Обозначим через Γ и E_+^l области значений $\gamma_j(q)$ и $0 \leqslant y_i(q) < \infty$. Тогда $x(q) \subset C$ на $R = T \times E_+^l \times \Gamma$ и $x(q) \subset C_1$ на $R_0 = T \times E_0^l \times \Gamma$, где $E_0^l = E_+^l \setminus 0$. Пусть в Q, R выполняются неравенства, содержащие некоторые непрерывные, положительно определенные функции W_{ab}, $a, b = \overline{1, 2}$ ($W_{11} \to \infty$ при $|\xi'| \to \infty$ и $W_{12} \to \infty$ при $|y| \to \infty$) со свойствами

$$W_{11}(\xi') \leqslant |y(q)| \leqslant W_{21}(\xi'),$$
$$W_{12}(y) \leqslant |\xi'(z)| \leqslant W_{22}(y) \quad (z = (t, x_\nu)^*, W_{ab}(0) = 0). \tag{1.6}$$

Из (1.6) имеем $\xi' \to 0$, $|\xi'| \to \infty$ лишь при $y' \to 0$, $|y| \to \infty$. Для простоты допустим, что $\{\xi''\} = E^{n_2}$ при $\gamma \in \Gamma$ и любых фиксированных $t_0 \in T, y_0 \in E_+^l$. В переменных $z = (t, y_i, \gamma_j)^*$ из (1.1), (1.5) и (1.6) получаем на R_0 систему, эквивалентную исходной

$$\dot{x} = F(z) + M_1(z) u \quad (F(t, 0) \equiv 0,\ u \in \omega: 0 \leqslant h(u, z) \leqslant \varrho), \tag{1.7}$$

$$F = (Y_i^1, Z_j)^*, \quad Y^1 = (Y_i^1)^*, \quad Z = (Z_j)^*, \quad Y_i^1 = X[y_i],\ Z_j = X[\gamma_j],$$

$$X[f] = \frac{\partial f}{\partial t} + X_\nu \frac{\partial f}{\partial \xi_\nu}, \quad M_1 = JA_1 = \left\| \begin{matrix} P \\ L_1 \end{matrix} \right\|, \quad \operatorname{rang} M_1 = r,$$

$$P = \|p_{is}\|, \quad p_{is} = \overset{1}{a}_{\nu s} \frac{\partial y_i}{\partial \xi_\nu}, \quad L_1 = \|\overset{1}{l}_{js}\|, \quad \overset{1}{l}_{js} = \overset{1}{a}_{\nu s} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_\nu} \quad (h = h_1(u, q(z))).$$

Здесь автономна ее y-подсистема при $u \equiv 0$, а матрица A_1 выбрана из условий

$$\operatorname{rang} A \geqslant 1, \quad A = \lambda^{-1} P, \quad \lambda = \lambda(z) \geqslant W(y) > 0 \ (W(0) = 0), \tag{1.8}$$

$$\sup_{u_1} a \cdot u_1 = G(p, y), \quad u_1 \in \{u \mid h(u, z) = 1\} \quad (a = -A^* p)$$

в области $D^1: t \geqslant 0, y \in E^l_0, |y| < d_1, \gamma \in \Gamma\ (y \neq 0)$, где $\lambda, W \subset C_1$, по определению $y_i(q)$ имеем

$$y^{\cdot} = \lambda(z) Y(y) + P(z) u \quad (Y^1 = \lambda Y(y)),$$

$$P = \lambda A = \lambda \|a_{is}\|, \ Y_i(y), a_{is}(z) \subset C_1, z \in D^1 (W(y) \subset C, \ y \in E^l_+, |y| < d_1). \quad (1.9)$$

Норм-инвариантные [1, 2], циклические [4] и норм-автономные [5] системы имеют информативные переменные x. Примем, что непрерывно дифференцируемые на R_0 величины Y^1, Z, M_1 удовлетворяют условиям, при которых для любой $x_0 \equiv x(t_0) \in R_0$ и допустимого $u(t) \in \omega(z)$ решения (1.7) существуют, единственны и γ-продолжаемы [6] в R_0. Из условий (1.5) и (1.6) следует [3], что регулятору $u(z)$ системы (1.7), приводящему точки $D_0: t \geqslant 0, y \in E^l_0 \cdot |y| \leqslant d^0, \gamma \in \Gamma$ на $y = 0$, соответствует допустимый регулятор $u'(q) \equiv u[z(q)]$ системы (1.1). Регулятор u' приводит точки $H_0: t \geqslant 0, \ 0 < |\xi'| \leqslant h^0, \ \xi'' \in E^{n_2}$ на $\xi' = 0$, где h^0 находим по d^0 из оценки

$$W_{21}(\xi') \leqslant d^0 \text{ при } 0 \leqslant |\xi'| \leqslant h^0 \ (d_1 > d^0 = \text{const}, \ h^0 = \text{const}). \quad (1.10)$$

Если $u(z)$ приводит точки R_0 на $y = 0$, то имеем ξ'-стабилизацию в целом решения $\xi = 0$ при $u'(q) \equiv u[z(q)]$. Поэтому достаточно решить оптимальную задачу y-стабилизации для нахождения регулятора оптимальной ξ'-стабилизации.

2. Рассмотрим в информативных переменных $x(q)$ задачу ξ'-стабилизации $\xi = 0$ при условии минимума функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \lambda(z) f(h, y) d\tau \ (f(\varrho, y) > 0, \ y \in E^l_0, |y| < \infty),$$
$$h = h(u, z) \in G, \ 0 \leqslant h \leqslant \varrho, \ f(h, y) \subset C, \ y \in E^l_+. \quad (2.1)$$

Оптимальный регулятор $u_0(q) \equiv u^0[z(q)]$ найдем для допустимой функции $s = \min\limits_u I[z, u]$ вида $s(y)$, которая непрерывна, положительно определена в D_1 и непрерывно дифференцируема на $D: y \in E^l_0, |y| < d_1 (D = D_1 \backslash 0)$. Из (1.9) и (2.1) имеем выражение гамильтониана [4, 6, 7]

$$B[s, u] = \lambda (L(u, z, p) + p \cdot Y), \ L = h a^1 \cdot u_1 + f(h, y), \quad (2.2)$$

$$p = \partial s / \partial y = (p_i)^*, \ a^1 = -a = A^*(z) p, \ u_1 = h^{-1} u \ (i = \overline{1, l} \ll n).$$

В силу (1.3) вспомогательные управления u^1_s связаны равенством

$$h(u_1, z) - 1 = 0 \quad (u_1 = (u^1_1, \ \dots, \ u^1_r)^*). \quad (2.3)$$

Обозначим $k(h, z, p) = \inf\limits_{u_1} L(u_1, h, z, p)$ на поверхности (2.3). Из равенства $\inf\limits_u L = \inf\limits_h k$ находим, что $\mu^1 = a^1 \cdot u_1$ минимально на направлении $u^0_1 = h^{-1} u^0$ оптимального регулятора u^0. Для этого при $a^1 \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы u^0_1 удовлетворял уравнениям

$$a^1 + \mu \, \partial h / \partial u_1 = 0, \quad h(u_1, z) = 1 \quad (\mu = -\inf \mu^1 > 0). \quad (2.4)$$

Рассмотрим сопряженную $h(u, z)$ функцию $g(v, z) = \sup\limits_{u_1} v \cdot u_1$ и обозначим $m^* = -g(v, z)$. Тогда имеем систему

$$v+m^*\,\partial h/\partial u_*=0, \quad h(u_*, z)=1 \quad (m^*<0). \tag{2.5}$$

Допуская существование достаточно гладкого решения $u_*(v, z)$ системы (2.5), находим его, дифференцируя равенство $g(v, z) = v \cdot u_*(v, z)$ с учетом $h[u_*(v, z), z] \equiv 1$, в виде

$$u_*(v, z)=\partial g/\partial v, \quad m^*(v, z)=-v\cdot\partial g/\partial v. \tag{2.6}$$

Сопоставляя системы (2.4) и (2.6) при $v = v_1 \in \{v \,|\, g(v, z) = 1 = = -m^*\}$, получаем значения экстремального направления u^0 и μ с учетом (1.8)

$$\overset{0}{u_1}=\partial g/\partial v_1, \quad v_1=-\mu^{-1}a^1, \quad \mu=g(-a^1, z)=G(p, y). \tag{2.7}$$

Из определения $g(v, z)$ и свойств (1.3) находим, что $g(v)$ положительно однородна, выпукла, удовлетворяет при $v \equiv u$ всем условиям (1.3) $(g(u, z) \in G)$ и соотношениям

$$\begin{gathered} g(\lambda_0 v, z)=\lambda_0 g(v, z), \quad g(0, z)\equiv 0, \quad g(v, z)>0, \quad v\neq 0 \quad (\lambda_0\geqslant 0), \\ h(u, z)=\sup_{v^1} u\cdot v^1 \quad (v^1\in\{v\,|\,g(v, z)=1\}, \; g(v, z)=\sup_{u_1} v\cdot u_1). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Функция $g(u, z)$ нецентрально строго выпукла по u одновременно с функцией $h(u, z)$

$$h(u_2)-h(u_1)>(u_2-u_1)\cdot\partial h/\partial u_1 \quad (u_2\neq\alpha u_1, \; u_1\neq 0, \; 0\leqslant\alpha=\text{const}),$$

для которой система (2.4) при $a^1 \neq 0$ имеет единственное решение

$$\overset{0}{u_1}=\partial g/\partial v_1=\partial g/\partial v_* \quad (v_*=-a^1=-A^*p). \tag{2.9}$$

Для простоты примем, что $f(h, y)$ удовлетворяет по h условию

$$\varrho f(h, y)\geqslant l(h, y)\equiv h(p\cdot Y+f(\varrho, y))-\varrho p\cdot Y \quad (y\in D, \; 0\leqslant h\leqslant\varrho), \tag{2.10}$$

которое выполняется в задачах синтеза норм-автономных [5] систем. При (2.9) и (2.10) величина $k(h)$ достигает минимума в $h = \varrho$. Оптимальный регулятор — вектор-функция $u^0(z)=\varrho\overset{0}{u_1}=\varrho\,\partial g/\partial a$. Здесь $a = -A^*p \neq 0$, если $p \neq 0$, и $AA^* > 0 \sim \operatorname{rang} A = l$. Из (1.7)—(1.9) и (2.2) получаем неравенства

$$B[s, u]\geqslant B[s, u^0] \quad \text{на} \quad D^1\times\omega(\omega: h(u, z)\leqslant\varrho), \tag{2.11}$$

$$\dot{s}=-\lambda f(\varrho, y)\leqslant -W(y)f(\varrho, y) \quad (D^1: t\geqslant 0, \; y\in E_0^l, \; |y|<d_1, \; \gamma\in\Gamma),$$

если допустимая функция $s(y)$ удовлетворяет уравнению

$$p\cdot Y(y)-\varrho G(p, y)+f(\varrho, y)=0 \quad (y\in E_0^l, \; |y|<d_1, \; s(0)=0) \tag{2.12}$$

и выполняется условие граничности (2.10). Следуя [6, 7], находим d^0 в (1.10). Обозначим $s_0 = \inf s(y)$ при $y \in E_+^l$, $|y|=d_1-\varepsilon_1=d_0$ $(\varepsilon_1>0)$. Тогда $d^0 = d^1 - \varepsilon_0$, где d^1 — наименьший модуль корня $s(y) = s_0$, $0 < \varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = \text{const}$, $d^0 < d_1$. Согласно теореме 3.1 [6] и ее модификации [3] имеем следующий результат.

Если решение (2.12) — допустимая функция $s(y)$ и неравенство (2.10) справедливо, то для любых z_0 в цилиндре $C^0: |y_0| \leqslant d^0$, $y_0 \in E_0^l$, граничный регулятор $u^0(z) = \varrho\,\partial g/\partial a$ является оптимальным по (2.1) регулятором y-стабилизации решения $x = 0$ системы (1.7), (1.9).

Оптимальный регулятор $u_0(q)$ получаем из $u^0(z)$ подстановкой

(1.5). Он приводит точки цилиндра $C_1^0: 0<|\xi_0'|\leqslant h^0$ на $\xi'=0$, если h^0 удовлетворяет (1.10). При выполнении условий леммы 1 [3] время перехода t_1-t_0 конечно для точек C_1^0. Допустим, что динамическая система (1.7) при $u=u^0(z)$ имеет в области $D'_0: t\geqslant 0$, $y\in E_0^l$, $|y|\leqslant d'$, $\gamma\in\Gamma$, функцию $V(z)$ со свойствами

$$V_1(y)\leqslant V(z)\leqslant V_2(y),\quad V(t,0)\equiv 0,\quad V(t,0,z)\equiv 0,\quad V_1(y)>0,\quad y\neq 0,$$

$$V^{\cdot}=-w(z)\leqslant -W(y),\quad V_1\to\infty,\quad |y|\to\infty,\quad V_2(0)=0 \tag{2.13}$$

$$(V(z),V_a(y)\subset C,\ z\in D'),$$

при которых $y\to 0$, $t\to t_1-0$, если $z_0\in D_0: t\geqslant 0$, $y\in E_0^l$, $|y|\leqslant d^0<d'$, $\gamma\in\Gamma$ $(D'_0=D'\setminus 0)$. Обозначим $v_{21}=\max V_2$ $|y|\leqslant d'$, $v_{22}=\max V_2$ $|y|\leqslant d^0$ $(y\in E_+^l)$. На интервале $[t_0,t_1(z_0))$ имеем $V(t,x(t,z_0))\equiv v(t)\to 0$ при $t\to t_1(z_0)-0$.

Лемма. *Пусть для $V(z)$ известна непрерывная в области $D_1^0: t\geqslant 0$, $0<v<v_{21}$, функция $f(t,v)$, для которой*

$$f(t,V(z))\geqslant w(z),\qquad z\in D'_0, \tag{2.14}$$

а неравенство $v^{\cdot}\geqslant -f(t,v)$ не имеет решений при t_0, v_0 из $D_{10}: t\geqslant 0$, $0<v\leqslant v_{22}$, лежащих в D_1^0 и примыкающих к $v=0$ за конечное время $t_1-t_0<\infty$. Тогда решения (1.7) при $u=u^0(z)$ и $z_0\in D_0$ примыкают к $y=0$ за бесконечное время.

Доказательство. Пусть справедливо обратное утверждение — существует $x_*(t,z_0)$ с конечным $\tau=t_1-t_0$. Рассмотрим $V(t,x_*(t,z_0))=$ $=v_*(t)$ вдоль кривой $t,x_*(t,z_0)$, лежащей в области D'_0, где выполнено равенство (2.13). В силу (2.14) получаем неравенство $v_*^{\cdot}=-w\geqslant$ $\geqslant -f(t,v_*)$, которое противоречит условиям (2.14).

Регулятор $u_0(q)$ дает оптимальную ξ'-стабилизацию в целом, если $s(y)$ удовлетворяет (2.12) на E_0^l, $s\to\infty$ при $|y|\to\infty$ и условия (1.8), (1.9) и (2.10) выполняются в $R_0=T\times E_0^l\times\Gamma$.

Отметим следующие обстоятельства. Условие граничности и вид уравнения (2.12) можно аналогично получить для системы (1.1) общего типа (без информативных переменных). Для системы (1.1) с известными информативными переменными $x(q)$ выражения величин h_1, X, A_1 определяются на $h(u,z)$, $F(z)$, $M_1(z)$ и (1.7)—(1.9) с помощью преобразования (1.5). Задача синтеза для системы (1.1) в координатах $x(q)$ сводится к вопросу существования $A_1(q), f(h,y)$ и допустимой функции $s(y)$, удовлетворяющих (1.8), (2.10) и уравнению (2.12) размерности $l\ll n$.

Используя (2.8), (2.12), а также неравенства и обозначения

$$G(p,y)\geqslant |p|\min_e G(e,y),\ \min|p|\geqslant f(\varrho,y)k_0^{-1}(y)\ (0<f(\varrho,y)\sim p\neq 0),$$

$$e\equiv p|p|^{-1},\quad 0<k_0\equiv\max_e(\varrho G(e,y)-e\cdot Y),\ 0<k_1\equiv\min_e G(e,y),$$

$$l_0\equiv 1-\varrho k_1k_0^{-1},\ l_1\equiv k_1k_0^{-1},\ \varphi(h,y)\equiv f^{-1}(\varrho,y)f(h,y),$$

находим оценку, не содержащую $s, \varphi(h,y)\geqslant l_1(y)h+l_0(y)$, при которой выполняется условие граничности (2.10).

Обозначим $\sigma = p \cdot Y$. Если допустимое решение (2.12) удовлетворяет оценке

$$\sigma \geqslant \max_h [h(f(\varrho, y)\varrho^{-1} + \sigma\varrho^{-1}) - f(h, y)] \quad (0 \leqslant h \leqslant \varrho), \tag{2.15}$$

то справедливо неравенство (2.10). Для вогнутой и линейной $f(h)$ на $[0, \varrho]$ условие (2.15) имеет вид $\sigma \geqslant -f(0, y)$. Последнее достаточно также в случае выпуклой функции $f(h)$, удовлетворяющей оценке $|\partial f/\partial h| < |\varrho^{-1} f(\varrho, y) + \sigma|$ при $0 \leqslant h \leqslant \varrho$, $y \in E^l_+$.

3. Отметим два варианта задачи обращения в конструировании оптимального регулятора системы (1.1), (2.1). Сперва найдем условия существования решения задачи, близкой к проблеме Калмана—Летова [2, 6]. Рассмотрим некоторую допустимую функцию $s(y)$, которая на E^l_+ удовлетворяет условиям

$$s(0) = 0,\ s(y) > 0,\ y \neq 0,\ p = \partial s/\partial y \neq 0,\ y \neq 0,\ s \to \infty\ |y| \to \infty, \tag{3.1}$$

$$s(y) \subset C,\ y \in E^l_+,\ s(y) \subset C_1,\ y \in E^l_0 \equiv E^l_+ \backslash 0.$$

Условия (3.1) выполняются, в частности, для $s(y) \in G = \{h(y)\}$. Относительно системы (1.1) предположим, что она имеет информативные переменные $x(q)$, $\operatorname{rang} A = l \leqslant r = \dim u$, производная $dS/d\Theta$ ($d\Theta = \lambda dt$) вдоль (1.9) при $u \equiv 0$ удовлетворяют неравенству

$$dS/d\Theta|_{u=0} = p \cdot Y(y) < \varrho G(p, y) \quad (y \in E^l_0), \tag{3.2}$$

$$\lambda = \lambda(z) \geqslant W(y),\ \lambda(z) \subset C_1\ \ y \neq 0\ (W(0) = 0,\ W(y) \subset C\ \ y \in E^l_+).$$

Возьмем $f^1(h, y)$ из класса непрерывных на $r_0 \times E^l_+$ функций, удовлетворяющих там краевому условию и оценке

$$f^1(\varrho, y) \equiv \varrho G(p, y) - p \cdot Y(y) > 0 \quad (y \in E^l_0), \tag{3.3}$$

$$f^1(h, y) \geqslant hG(p, y) - p \cdot Y(y)\ (h \in r_0 : 0 \leqslant h \leqslant \varrho,\ y \in E^l_0).$$

Здесь и ниже используются обозначения (1.2), (1.5), (1.7)—(1.9). Для функции $\Phi^1 \equiv f^1(h, y) - hG(p, y)$, достигающей минимума при $h = 0$ или $h = \varrho$ (например, вогнутой или линейной по h), оценка (3.3) эквивалентна неравенству $f^1(0, y) \geqslant -p \cdot Y$. Согласно результатам [6, 3] находим, что $u^0(z)$ — оптимальный по (2.1) регулятор y-стабилизации системы (1.7) в целом, если выполняются условия (3.1)—(3.3) и $f(h, y) \equiv f^1(h, y)$. Требование $s^{\cdot} \leqslant -W(y)$ здесь переходит в простое неравенство (3.2), которое выполняется, если $p \cdot Y < 0$ при $y \in E^l_0$. Условия (3.2) и (3.3) эквивалентны дифференциальным неравенствам для $s(y)$ вида

$$\max_{0 \leqslant h \leqslant \rho} F^1(h, y) \leqslant p \cdot Y < \varrho G(p, y) \quad (y \in E^l_0,\ F^1 \equiv -\Phi^1), \tag{3.4}$$

$$f^1(\varrho, y) \equiv \varrho G(p, y) - p \cdot Y.$$

Из (1.3) и (2.8) для функции $g(v, z)$ находим оценки

$$|v|\, h_1^{-1}(z) \leqslant g(v, z) \leqslant |v|\, h_0^{-1}(z)\ (h_0 = \min_e h(e, z),\ \ h_1 = \max_e h(e, z),\ \ |e| = 1). \tag{3.5}$$

Для задач с границей области управления в пределах $m_0 \leqslant |u^1| \leqslant m_1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varrho m_1^{-1} \leqslant h_0(z) \leqslant h_1(z) \leqslant \varrho m_0^{-1} \quad (z \in R = T \times E_+^l \times \Gamma). \tag{3.6}$$

Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ уравнения $\det(AA^* - \alpha E) = 0$ положительны в силу предположения $\operatorname{rang} A = l$. Введем обозначения

$$a_0^2(z) = \min_i \{\alpha_i\}, \; a_1^2(z) = \max_i \{\alpha_i\} \quad (i = \overline{1, l}). \tag{3.7}$$

В задаче с ограничениями (3.6) для выполнения условий (3.4) достаточно, чтобы выбор функции $f^1(h, y)$ и матрицы A удовлетворял оценкам

$$\sup_{0 \leqslant h \leqslant \varrho} (m_1 \varrho^{-1} a_1(z) - f^1(h, y)|p|^{-1}) \leqslant p^0 \cdot Y(y) < m_0 a_0(z) \; (p^0 = |p^{-1}| \, p), \tag{3.8}$$

которые находим из (3.5) и (3.7). Выберем $f^1(h, y)$ согласно (3.8). Если множество $m_0^{-1}|Y| < a_0(z)$ содержит подобласть $0 < |y| \leqslant \varepsilon_1 = \text{const}$, $y \in E_0^l$, то получаем утверждение о локальной оптимальной y-стабилизации. Здесь условие $s(y) \to \infty$ при $|y| \to \infty$ отпадает. Заметим, что строгое неравенство в (3.8) принимает вид $p \cdot Y < 0$, если $\operatorname{rang} A < l$.

Рассмотрим новый вариант задачи обращения — с помощью аппроксимации области управления с границей в пределах $m_0 \leqslant |u^1| \leqslant m_1$. Примем для простоты, что $\operatorname{rang} \|a_{ik}\| = l \; (i, k = \overline{1, l})$. В классе G возьмем функцию $g^1(u, y) \in G$, $g^*(v, z) \equiv g^1(C_0^{-1} v, y)$, удовлетворяющую неравенствам

$$m_0 \varrho_0^{-1} \leqslant \min_e (|C_0 e|^{-1} g^1(e, y)) \leqslant \max_e (|C_0 e|^{-1} g^1(e, y)) \leqslant m_1 \varrho_0^{-1}, \tag{3.9}$$

$$e = v\,|v|^{-1}, \quad y \in E_0^l \quad C_0 = \|-A^*, N\|, \; N = \left\| \begin{matrix} 0 \\ E_{r-l} \end{matrix} \right\|_{r-l}$$

и тождеству $g^1(p, 0, y) = G(p, y) \; (r \geqslant l)$, где $G(p, y)$, $0 < f(\varrho_0, y)$ — заданные функции, для которых интегрируемо [8–10] уравнение Якоби

$$p \cdot Y(y) + f(\varrho_0, y) - \varrho_0 G(p, y) = 0 \quad (\varrho_0 = \text{const} > 0, \; y \in E_0^l) \tag{3.10}$$

и полный интеграл $S(y, \alpha)$ является при $\alpha = \alpha^0 = \text{const}$ допустимой функцией $s(y)$ $(\alpha = (\alpha_i)^*$, $s(0) = 0)$. Здесь неособенная $r \times r$ матрица C_0, $m_0 = \text{const} > 0$, $m_1 = \text{const} > 0$, $m_0 \leqslant m_1$ — заданные числа.

Из (2.8) и (3.9) получаем соотношение

$$h^*(u, z) = \sup_{v_1} u \cdot v_1, \quad v_1 \in \{g^*(v, z) = 1\} \quad (m_0 \leqslant |u_1| \leqslant m_1),$$
$$g^*|_{v=a} \equiv g^1(C_0^{-1} a, y) \equiv G(p, y) \left(p = \frac{\partial s}{\partial y}, \; h^*(u, z) \leqslant \varrho_0 \right). \tag{3.11}$$

Пусть $s(y)$ — бесконечно большая функция, удовлетворяющая в области $0 \leqslant h^* \leqslant \varrho_0$, $y \in E_+^l$, $y \neq 0$, условию (2.10). Тогда при аппроксимации (3.11), произведенной $g^1(u, y)$, регулятор

$$u_*^0(z) = \varrho_0 \partial g^* / \partial a \quad (a = -A^* p, \; y \in E_0^l) \tag{3.12}$$

дает оптимальную по (2.1) y-стабилизацию в целом.

Оценки (3.9) выполняются в случае $m_0 \varrho_0^{-1} c^1 \leqslant g_0^1(y) \leqslant g_1^1(y) \leqslant m_1 \varrho_0^{-1} c^0$ где $g_0^1 = \min_e g^1$, $g_1^1 = \max_e g^1$ $(e = |u|^{-1} u)$, $(c^0)^2 = \min c_s$, $(c^1)^2 = \max c_s$, а c_s — положительные корни $\det\|C_0C_0^* - cE\| = 0$, $s = \overline{1, r}$. Можно показать, что $h^*(u, z) \equiv h_*(u, y)$, если $AA^* \equiv A_2(y)$. Выражая $f(\varrho, y)$ из равенства (3.10), нетрудно получить комбинацию обоих вариантов задачи обращения.

Условия примыкания решений динамической системы Σ вида $x^{\cdot} = X(x)$, $(t, x_\nu)^* \in D : |t| < \infty$, $|x| < \infty$, $x \,\overline{\in}\, Z$ $(\nu = \overline{1, n})$, которая имеет r функционально независимых, дифференцируемых на $E^n \setminus Z$ частных инвариантов

$$h_s(x) = 0,\ h_s(0) = 0,\ h_s(x) \subset C,\ x \in E^n\ (s = \overline{1, r} \leqslant n - 1),$$

$$h^{\cdot} = \Phi(x, h),\ \Phi(x, 0) \equiv 0,\ x \in E^n \setminus Z\ (h = (h_s)^*),$$

выражает

Теорема. *Пусть для Σ известна непрерывная на E^n и дифференцируемая вне Z функция $V(x)$, которая в $H : h(x) = 0$ имеет на Z собственный минимум $V(P) > V(Z) = V(0) = 0$, и множества $Z : x \in H$, $V(x) = 0$, $P : x \in H$, $x \,\overline{\in}\, Z$ $(x = 0 \in Z)$ не пусты.*

Пусть ограничено множество $L : x \in H$, $V(x) < l = \mathrm{const}$ $(l > 0)$ и на $R = L \cap P$ имеем $V^{\cdot} \equiv X[V] \leqslant 0$.

Тогда любое решение системы для $x_0 \equiv x(t_0) \in R$ примыкает к множеству $N = Z \cup Q$, где Q — максимальное инвариантное множество, содержащееся в пересечении $L_0 : V^{\cdot}(x) = 0$, $V(x) < l$, $x \in H$.

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$, $x_0 \in R$. Из ограниченности L и неравенств $V(x(t, x_0)) \leqslant V(x_0) < l$ в области определения $T_1 : [t_0, t_1)$ решения имеем $|x(t, x_0)| \leqslant r_0(l) < \infty$. Так как $x(t, x_0)$ не уходит в бесконечность при $t \in T_1$, то время $t_1 - t_0$ определения решения в R бесконечно или конечно. Для $t \to +\infty$ продолжаемого в R решения $x(t, x_0)$ нет конечного t_1 примыкания $x(t, x_0) \to Z$ при $t \to t_1 - 0$. Тогда из непрерывности $V(x)$, $h(x)$ получаем, что $\omega(x_0) \equiv \omega_0$ — предельное множество $x(t, x_0)$ — лежит во множестве $H \cap Z \cup V(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} V(x(t, x_0)) = l_0 < l$ $(l_0 \geqslant 0)$. Для $l_0 = 0$ имеем $x(t, x_0) \to Z$ при $t \to +\infty$. При $l_0 > 0$ из инвариантности ω_0 следует $V^{\cdot}(\omega'_0) = 0$ для всех $\omega'_0 \in \omega_0$, $\omega_0' \,\overline{\in}\, Z$.

Для $x(t, x_0)$ с конечным временем определения в R есть первый момент t_1, когда $x \to Z$ при $t \to t_1 - 0$. Объединяя оба случая, получаем доказательство теоремы.

При $H \equiv E^n$ имеем отсюда модификацию теоремы VI [11] в случае недифференцируемых на $V(x) = 0$ функций $V(x)$, $X(x)$.

Если H — произвольное инвариантное множество, где $V(H) \not\equiv 0$, то утверждение теоремы сохраняется.

Следствие 1. Пусть условия теоремы выполняются для любого конечного $l > 0$ и $V \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Тогда любое решение $x(t, x_0)$ с $x_0 \in P$ примыкает к $Z \cup Q_1$, где Q_1 — максимальное инвариантное множество в $V^{\cdot}(x) = 0$, $x \in H$.

Следствие 2. Если $\varrho(Z, N \setminus Z) = \varepsilon > 0$ и $N \setminus Z = \varnothing$, то существует δ-окрестность $Z(\delta > 0)$, в которой все решения $x(t, x_0)$ $(x_0 \in S(Z, \delta),\ x_0 \,\overline{\in}\, Z)$ примыкают к Z. В новых координатах $\zeta = (\xi_\alpha, \eta_s)^*$, полученных гладким обратимым преобразованием $\xi_\alpha = \xi_\alpha(x)$, $\eta_s = h_s(x)$ $(\alpha = \overline{1, n - r})$, согласно теореме находим $\xi(t, \zeta_0) \to \xi(N)$ при $t \to t_1 - 0$ и $\eta_0 = 0$, где $N = Z \cup Q$. В приложениях нередко используют зависимые (избыточные) переменные. При этом для установившихся движений известны геометрические интегралы, которые можно трактовать как частные инварианты соответствующей возмущенной системы вида $x^{\cdot} = X(x)$, $X(0) = 0$.

4. Применим полученные результаты в задачах обращения аппроксимацией для y-одномерной и диссипативной динамических систем.

4.1. Пусть переменные $y_i = y_i(q)$ — инварианты системы (1.1) при $u \equiv 0$ $(Y_i^1 \equiv 0)$ и в $D^1 \times \omega$ выполняются условия

$$\det \|a_{ik}(z)\| \neq 0, \ \dim y \equiv l \leqslant \dim u \equiv r \ \ (i,k = \overline{1,l}), \tag{4.1}$$

$$\lambda \equiv 1, \ g^1(v, y) \equiv (g_s^2 v_s^2)^{1/2}, \ \ g^*(v,z) \equiv g^1(C_0^{-1} v, y), \ \ G^2(p,y) = g_i^2 p_i^2,$$

$$h^*(u,z) \equiv \sup_{v^1} u \cdot v_1, \ v_1 \in \{v \mid g^*(v,z) = 1\}, \ g_i = g_i(y_i) > 0, \ g_\sigma = g_\sigma(y) > 0,$$

$$\partial g_i / \partial y_s \equiv 0, \ s \neq i, \ f^2(\varrho, y) \equiv \varrho^2 \sum_{i=1}^{l} f_i^2(y_i), \ \partial f_i / \partial y_s \equiv 0, \ s \neq i,$$

$$f_i > 0, \ f^2(h^*, y) \geqslant h^{*2} \sum_{i=1}^{l} f_i^2(y_i) \ \ (s = \overline{1,r}, \ \sigma = \overline{l+1,r}),$$

$$I_i(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{y_i} h_i(\tau)\, d\tau, \ \ \lim_{\varepsilon \to +0} I_i(\varepsilon) = I_i < \infty \ \ (h_i = f_i(\tau) g_i^{-1}(\tau) > 0),$$

где g_s, f_i, f — достаточно гладкие функции, $C_0 = \|-A^*, N\|$ — матрица $(r \times r)$. В силу (4.1) решение (2.12) — допустимая функция

$$s_1(y) = \sum_{i=1}^{l} I_i(y_i), \ s_1(0) = 0, \ s_1 > 0, \ y \in E_0^l, \ |y| < d_1 \tag{4.2}$$

и выполнено условие (2.10). Согласно (3.12), (4.1) и (4.2) регулятор

$$u_1^0(z) = \varrho \Big(\sum_{i=1}^{l} f_i^2\Big)^{-1/2} (C_0^{-1})^* v^1 (v^1 = (g_1 f_1, \ldots, g_l f_l, 0, \ldots, 0)^*, \ \dim v^1 = r),$$

оптимальный в C^0, осуществляет ξ'-стабилизацию в целом, если условия (1.8), (1.9), (2.10), (2.12) и (4.1) выполнены в R_0 и все $I_i \to +\infty$ при $y_i \to \infty$.

4.2. Рассмотрим одномерный случай $y = y_1 = y_1(q)$ при условиях

$$Y_1^1 = \lambda(z) Y_1(y), \ P = \lambda(z) A(z), \ \ \|-a_{1s}(z)\|^* = a_1 = -A^* \neq 0, \tag{4.3}$$

$$g(a_1, z) = g_0(y), \ g(v,z) = \sup_{u_1} u_1 \cdot v \ \ (h(u_1, z) = 1), \ 0 \leqslant h \leqslant \varrho,$$

$$g_0(y) - Y_0(y) > 0,$$

$$f(h,y) \geqslant f_0(g_0 h - \varrho Y_0)(g_0 - Y_0)^{-1} (Y_0 = \varrho^{-1} Y_1, \ f_0 = \varrho^{-1} f(\varrho, y)),$$

$$I_2(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{y} f_0 (g_0 - Y_0)^{-1}\, d\tau, \ \ I_2(\varepsilon) \to I_2 < \infty, \ \ \varepsilon \to +0 \ \ (t \geqslant 0, \ 0 < y, \ \gamma \in \Gamma).$$

В этом случае функция $s_2(y) \equiv I_2(y)$ — допустима, условие (2.10) выполнено и граничный регулятор $u_2^0(z) = \varrho\, \partial g / \partial a_1$ является оптимальным регулятором ξ'-стабилизации в целом. Последнее следует из уравнения $y^{\cdot} = \lambda \varrho (Y_0 - g_0)$ и условий (1.6), (4.3), $\lambda \geqslant W(y) > 0$, $y \neq 0$.

4.3. Рассмотрим вопрос z-стабилизации решения $z = 0$ системы

$$x^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial y}, \ \ y^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial x} + Q(z) + bv \ \ \ (z = (x_\nu, y_\nu)^*, \ t \geqslant 0, \ |z| < \infty), \tag{4.4}$$

$$H = H_1(x) + H_2(z), \ \ \ H_1(0) = 0, \ \ \ H_1 > 0, \ \ \ x \neq 0, \ \ \ H_1 \to \infty,$$

$$|x|\to\infty,\quad \frac{\partial H_1}{\partial x}\neq Q,\quad y=0,\quad x\neq 0,$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}=Q|_{z=0},\quad H_2(x,0)\equiv 0,\quad \frac{\partial H_2}{\partial y}\equiv 0,\quad y=0,$$

$$0<B=\left\|\frac{\partial^2 H}{\partial y_i\partial y_j}\right\|\quad (i,j=\overline{1,n}),$$

$$0<\mathrm{const}\leqslant\min\beta_i,\quad \det|B-\beta_i E|=0,\quad b=A(z)x^{\cdot},\quad 2R=A+A^*>0,$$

$$w(z)=x^{\cdot}\cdot Q(z)\leqslant 0\quad (Q(z),\ H_1(z),\ A(z)\subset C_1,\ H_2(z)\subset C_2,\ |z|<\infty),$$

управляемой одним рулем $v=(v_1)^*$, при условии минимума расхода на линейную комбинацию диссипации w и затрат вида

$$I_3=\int_{t_0}^{t_1}(|b\cdot\partial H/\partial y|\,f(H,|v|)-\varrho^{-1}w(z)f(H,\varrho))\,d\tau,$$
$$|v|\leqslant\varrho,\quad 0<f(H,\varrho)\subset C,\quad \varrho f(H,|v|)\geqslant|v|\,f(H,\varrho)\quad (H\geqslant 0).\tag{4.5}$$

Условия (4.4) означают, что $H(x,y)$ строго выпукла по импульсам y_i, имеет в $z=0$ собственный абсолютный минимум и $H\to+\infty$ при $|z|\to\infty$. Для системы (4.4) допустимая функция $s_3(y)$ и оптимальный по (4.5) регулятор z-стабилизации в целом имеют вид

$$s_3(y)=s_3^0(H)=\int_0^H\varrho^{-1}f(\tau,\varrho)\,d\tau,\quad v^0=-M\quad (s_3(0)=0).\tag{4.6}$$

Действительно, значения (4.6) удовлетворяют в $T\times E^{2n}$ первому из неравенств (2.11). Величина $H^{\cdot}$ при $v=v^0$ в силу (4.4) равна $w(z)-\varrho R\partial H/\partial y\cdot\partial H/\partial y\leqslant 0$ и всюду отрицательна вне плоскости $y=0$, которая не является инвариантным множеством: $dy/dt|_{y=0}=$ $=Q(x,0)-\partial H_1/\partial x\neq 0\,(x\neq 0)$ вне $x=0$. Из теоремы Барбашина—Красовского следует, что v^0 для (4.4) осуществляет z-стабилизацию в целом.

Заметим, что в полученных результатах глобальным условиям оптимального синтеза можно придать локальную форму. В п. 4.3 функция $\lambda(z)$ задана не обязательно H-положительно определенной и введена невязка на диссипацию. Ясно, что условие граничности (2.10), используемое здесь для упрощения постановки задачи, не является существенным. Следует отметить, что класс функционалов (2.1) включает квадратичные при $h^2=P_1u\cdot u$ и $y=y_1=P^1\xi\cdot\xi$ и описывает затраты времени, импульса и энергии. В постановке нет требований $u_0(t,\xi)\to 0$ при $\xi\to 0$, $f(q,u_0)\to 0$ при $\xi\to 0$ и дополнительного условия $t_1=\infty$.

В рассуждениях не используется дифференцируемость функций f,s,u_0,V на множестве цели. Применение вместо $s(y)$ информативной функции $y=y_1(q)$ для установления глобальной управляемости в пп. 4.2 и 4.3 нетрудно распространить на системы вида (1.6)—(1.9). Необходимость в этом определяется ситуацией, аналогичной пп. 4.2 и 4.3, где $s_2(y)$, $s_3(y)$ — не обязательно бесконечно большие функции. Оптимальные управления $u_0[t]=u_0(t,\xi(t,\xi_0))$ в рассматриваемой задаче синтеза оказываются непрерывными функциями на интервале $[t_0,t_1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, М., 1968.
2. Летов А. М., Динамика полета и управления, М., 1969.
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 178 (1975).
4. Румянцев В. В., ПММ, **36**, вып. 6, 966 (1972).
5. Кейс И. А., Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 4, 44 (1975).
6. Румянцев В. В., ПММ, **34**, вып. 3, 440 (1970).
7. Красовский Н. Н., В кн.: Малкин И. Г., Теория устойчивости движений, доп. 4, М., 1966.
8. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961.
9. Чертков Р. И., Метод Якоби в динамике твердого тела, Л., 1960.
10. Парс Л., Аналитическая динамика, М., 1971.
11. Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/IV 1976

I. KEIS

DIMENSIOONI VÄHENDAMISEST MÕNEDE DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE OPTIMAALSE SÜNTEESI ÜLESANNETES

Vaadeldakse juhtimise seisukohast lineaarse n-mõõtmelise dünaamilise süsteemi optimaalse sünteesi ülesannet. Võrratussüsteemiga antud mittestatsionaarne juhtimispiirkond aproksimeeritakse ühe kitsenduse abil. Informatiivsete muutujatega süsteemi tarvis taandatakse ülesanne $l \ll n$ dimensionaalse Jacobi võrrandi lahendamisele ja juhtimismaatriksi valikule.

Esitatakse Kalman-Letovi probleemi pöördülesande lahendamise meetod, mis on saadud juhtimispiirkonna aproksimeerimise teel.

Optimaalse sünteesi ülesanne on lahendatud y-ühemõõtmelise, y-invariantse ja dissipatiivse süsteemi puhul.

I. KEIS

DIMENSION REDUCTION IN OPTIMAL SYNTHESIS OF SOME DYNAMICAL SYSTEMS

The optimal synthesis problem for n-dimensional system, linear on control, is considered. Control lies in a region approximating one corresponding to several constraints. The dimension of Jacobi equation is diminished ($l \ll n$) for systems with informative variables via control matrix selection. The approximation of control region for solution of Kalman-Letov inverse problem is proposed. Optimal synthesis for y-one-dimensional, y-invariant and dissipating systems is obtained in the paper.