

И. КЕИС

О ПОНИЖЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача оптимального синтеза n -мерной динамической системы, линейной по управлению. Нестационарная область управления, заданная системой неравенств, аппроксимируется одним ограничением. Для системы с информативными переменными задача сведена к решению характеристического уравнения размерности $l \ll n$ и выбору матрицы управления. Предложен новый способ решения проблемы Калмана—Летова — обращение посредством аппроксимации гиперкуба управления. Получено решение задач оптимального синтеза для y -инвариантных, y -одномерных и некоторых диссипативных систем.

1. Рассмотрим линейную по управлению u динамическую систему

$$\dot{\xi} = X(q) + A_1(q)u, \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad q = (t, \xi_v)^*, \quad X = (X_v)^*, \quad (1.1)$$

$$\xi = (\xi'_\alpha, \xi''_\beta)^*, \quad \xi' = (\xi'_\alpha)^*, \quad \xi'' = (\xi''_\beta)^*, \quad u = (u_s)^*, \quad A_1 = \|a_{vs}^1\|,$$

$$\text{rang } A_1 = r, \quad X(q), A_1(q) \subset C_1 \quad \text{при} \quad q \in Q : t \geq 0, \quad |\xi| < \infty,$$

$$\dot{\xi} = d\xi/dt, \quad |\xi|^2 = \xi \cdot \xi = \sum_{v=1}^n \xi_v^2 \quad (\alpha = \overline{1, n_1}, \beta = \overline{1, n_2}, v = \overline{1, n}, s = \overline{1, r}).$$

Допустимые управления $u(t)$ — кусочно-непрерывны на $T = [0, \infty)$ со значениями в $\omega^1 = \omega^1(q) \subset E^r$ выпуклой компактной области

$$0 \leq h_1(u, q) \leq \varrho = \text{const} \quad (h_1(u, q) \subset C, u \in E^r, q \in Q, \varrho > 0), \quad (1.2)$$

где скалярная функция $h_1(u, q)$ принадлежит классу выпуклых функций G

$$h_1(\alpha_0 u) = \alpha_0 h_1(u), \quad h_1(u_2) \geq h_1(u_1) + (u_2 - u_1) \nabla h_1(u_1) \quad (\alpha_0 \geq 0, u_1 \neq 0), \quad (1.3)$$

$$h_1(0, q) \equiv 0, \quad h_1(u, q) > 0, \quad u \in E_0^r = E^r \setminus 0, \quad h(u, q) \subset C_2 \quad \text{на} \quad E_0^r \times Q.$$

Граница $\{h_1(u^1) = \varrho | u^1\}$ — замкнутая поверхность при $q = q_0 = \text{const}$.

Если $\varrho \rightarrow \infty$, то $|u^1| \rightarrow \infty$, и если $\varrho \rightarrow 0$, то $|u^1| \rightarrow 0$. Неравенство (1.2) — агрегат ограничений $a_s^0(q) \leq u_s \leq a_s^1(q)$, область ω^1 — гладкая аппроксимация этого гиперкуба, регулярная [1] при $r > 1$. Обозначим $h_1^0(q) = \min_e h_1(e, q)$, $h_1^1(q) = \max_e h_1(e, q)$, $e = u |u|^{-1}$. Для задач с

границей области ω^1 в пределах $m_0 \leq |u^1| \leq m_1$ достаточно выбрать $h_1(u, q)$ согласно условиям

$$qm_1^{-1} \leq h_1^0(q) \leq h_1^1(q) \leq qm_0^{-1} \quad (0 < \text{const} = m_0 \leq m_1 = \text{const}). \quad (1.4)$$

Далее допустимы те из $\{u(t)\}$, которые приводят ξ' -компоненту ξ на множество цели $\xi'_\alpha = 0$ за конечное или бесконечное время $t_1 - t_0$.

Здесь $t_1(q_0)$ — первый момент примыкания $\xi'(t, \xi_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_1^0 - 0$, область значений $\xi_0 \equiv \xi(t_0)$ управляемости определим ниже. Введем обратимое преобразование координат $x_v = x_v(q)$

$$x = (x_v)^* = (y_i, \gamma_j)^*, \quad x_v(t, 0) \equiv 0, \quad J = \left\| \frac{\partial x_v}{\partial \xi_\sigma} \right\|, \quad \det J \neq 0, \quad \xi' \neq 0, \quad (1.5)$$

$$y = (y_i(q))^*, \quad \gamma = (\gamma_j(q))^*, \quad l = \dim y \ll n \quad (i = \overline{1, l}, j = \overline{1, n-l}),$$

$$\xi'_\alpha = \xi'_\alpha(t, x), \quad \xi''_\beta = \xi''_\beta(t, x), \quad \xi_\sigma(t, 0) \equiv 0 \quad (\sigma, v = \overline{1, n=n_1+n_2}),$$

чтобы использовать в качестве переменных агрегации $y(q)$ известные для системы (1.1) при $u \equiv 0$ информативные переменные $[1-3]$. Последними могут служить инварианты и y -автономные функции Ляпунова $y_i(q)$ со следующими свойствами.

Пусть $y_i(q), \gamma_j(q) \subset C$ на Q , в области $Q_0: t \geq 0, \xi' \in E^{n_1}, \xi' \neq 0, \xi'' \in E^{n_2}$, они принадлежат C_2 . Примем, что $y_i \geq 0, y_i(q)$ неограничены на Q , а равенство $y = 0$ эквивалентно $\xi' = 0$. Обозначим через Γ и E_+^l области значений $\gamma_j(q)$ и $0 \leq y_i(q) < \infty$. Тогда $x(q) \subset C$ на $R = T \times E_+^l \times \Gamma$ и $x(q) \subset C_1$ на $R_0 = T \times E_0^l \times \Gamma$, где $E_0^l = E_+^l \setminus 0$. Пусть в Q, R выполняются неравенства, содержащие некоторые непрерывные, положительно определенные функции $W_{ab}, a, b = \overline{1, 2} (W_{11} \rightarrow \infty$ при $|\xi'| \rightarrow \infty$ и $W_{12} \rightarrow \infty$ при $|y| \rightarrow \infty)$ со свойствами

$$W_{11}(\xi') \leq |y(q)| \leq W_{21}(\xi'),$$

$$W_{12}(y) \leq |\xi'(z)| \leq W_{22}(y) \quad (z = (t, x_v)^*, W_{ab}(0) = 0). \quad (1.6)$$

Из (1.6) имеем $\xi' \rightarrow 0, |\xi'| \rightarrow \infty$ лишь при $y' \rightarrow 0, |y| \rightarrow \infty$. Для простоты допустим, что $\{\xi''\} = E^{n_2}$ при $\gamma \in \Gamma$ и любых фиксированных $t_0 \in T, y_0 \in E_+^l$. В переменных $z = (t, y_i, \gamma_j)^*$ из (1.1), (1.5) и (1.6) получаем на R_0 систему, эквивалентную исходной

$$\dot{x} = F(z) + M_1(z)u \quad (F(t, 0) \equiv 0, u \in \omega: 0 \leq h(u, z) \leq q), \quad (1.7)$$

$$F = (Y_i^1, Z_j)^*, \quad Y^1 = (Y_i^1)^*, \quad Z = (Z_j)^*, \quad Y_i^1 = X[y_i], \quad Z_j = X[\gamma_j],$$

$$X[f] = \frac{\partial f}{\partial t} + X_v \frac{\partial f}{\partial \xi_v}, \quad M_1 = JA_1 = \left\| \frac{P}{L_1} \right\|, \quad \text{rang } M_1 = r,$$

$$P = \|p_{is}\|, \quad p_{is} = a_{vs}^1 \frac{\partial y_i}{\partial \xi_v}, \quad L_1 = \|l_{js}^1\|, \quad l_{js}^1 = a_{vs}^1 \frac{\partial \gamma_j}{\partial \xi_v} \quad (h = h_1(u, q(z))).$$

Здесь автономна ее y -подсистема при $u \equiv 0$, а матрица A_1 выбрана из условий

$$\text{rang } A \geq 1, \quad A = \lambda^{-1}P, \quad \lambda = \lambda(z) \geq W(y) > 0 (W(0) = 0), \quad (1.8)$$

$$\sup_{u_1} a \cdot u_1 = G(p, y), \quad u_1 \in \{u | h(u, z) = 1\} \quad (a = -A^*p)$$

в области $D^1: t \geq 0, y \in E_0^I, |y| < d_1, \gamma \in \Gamma (y \neq 0)$, где $\lambda, W \subset C_1$, по определению $y_i(q)$ имеем

$$y' = \lambda(z)Y(y) + P(z)u \quad (Y^1 = \lambda Y(y)),$$

$$P = \lambda A = \lambda \|a_{is}\|, Y_i(y), a_{is}(z) \subset C_1, z \in D^1 (W(y) \subset C, y \in E_+^I, |y| < d_1). \quad (1.9)$$

Норм-инвариантные $[1, 2]$, циклические $[4]$ и норм-автономные $[5]$ системы имеют информативные переменные x . Примем, что непрерывно дифференцируемые на R_0 величины Y^1, Z, M_1 удовлетворяют условиям, при которых для любой $x_0 \equiv x(t_0) \in R_0$ и допустимого $u(t) \in \omega(z)$ решения (1.7) существуют, единственные и γ -продолжаемы $[6]$ в R_0 . Из условий (1.5) и (1.6) следует $[3]$, что регулятору $u(z)$ системы (1.7), приводящему точки $D_0: t \geq 0, y \in E_0^I, |y| \leq d^0, \gamma \in \Gamma$ на $y = 0$, соответствует допустимый регулятор $u'(q) \equiv u[z(q)]$ системы (1.1). Регулятор u' приводит точки $H_0: t \geq 0, 0 < |\xi'| \leq h^0, \xi'' \in E^{n_2}$ на $\xi' = 0$, где h^0 находим по d^0 из оценки

$$W_{21}(\xi') \leq d^0 \text{ при } 0 \leq |\xi'| \leq h^0 \quad (d_1 > d^0 = \text{const}, h^0 = \text{const}). \quad (1.10)$$

Если $u(z)$ приводит точки R_0 на $y = 0$, то имеем ξ' -стабилизацию в целом решения $\xi = 0$ при $u'(q) \equiv u[z(q)]$. Поэтому достаточно решить оптимальную задачу y -стабилизации для нахождения регулятора оптимальной ξ' -стабилизации.

2. Рассмотрим в информативных переменных $x(q)$ задачу ξ' -стабилизации $\xi = 0$ при условии минимума функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \lambda(z) f(h, y) d\tau \quad (f(q, y) > 0, y \in E_0^I, |y| < \infty), \quad (2.1)$$

$$h = h(u, z) \in G, 0 \leq h \leq q, f(h, y) \subset C, y \in E_+^I.$$

Оптимальный регулятор $u_0(q) \equiv u^0[z(q)]$ найдем для допустимой функции $s = \min_u I[z, u]$ вида $s(y)$, которая непрерывна, положительно определена в D_1 и непрерывно дифференцируема на $D: y \in E_0^I, |y| < d_1 (D = D_1 \setminus 0)$. Из (1.9) и (2.1) имеем выражение гамильтониана $[4, 6, 7]$

$$B[s, u] = \lambda(L(u, z, p) + p \cdot Y), L = ha^1 \cdot u_1 + f(h, y), \quad (2.2)$$

$$p = \partial s / \partial y = (p_i)^*, a^1 = -a = A^*(z)p, u_1 = h^{-1}u \quad (i = \overline{1, l} \ll n).$$

В силу (1.3) вспомогательные управления u_s^1 связаны равенством

$$h(u_1, z) - 1 = 0 \quad (u_1 = (u_1^1, \dots, u_r^1)^*). \quad (2.3)$$

Обозначим $k(h, z, p) = \inf_{u_1} L(u_1, h, z, p)$ на поверхности (2.3). Из равенства $\inf L = \inf k$ находим, что $\mu^1 = a^1 \cdot u_1$ минимально на направлении $u_1^0 = h^{-1}u^0$ оптимального регулятора u^0 . Для этого при $a^1 \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы u_1^0 удовлетворял уравнениям

$$a^1 + \mu \partial h / \partial u_1 = 0, \quad h(u_1, z) = 1 \quad (\mu = -\inf \mu^1 > 0). \quad (2.4)$$

Рассмотрим сопряженную $h(u, z)$ функцию $g(v, z) = \sup_{u_1} v \cdot u_1$ и обозначим $m^* = -g(v, z)$. Тогда имеем систему

$$v + m^* \partial h / \partial u_* = 0, \quad h(u_*, z) = 1 \quad (m^* < 0). \quad (2.5)$$

Допуская существование достаточно гладкого решения $u_*(v, z)$ системы (2.5), находим его, дифференцируя равенство $g(v, z) = v \cdot u_*(v, z)$ с учетом $h[u_*(v, z), z] \equiv 1$, в виде

$$u_*(v, z) = \partial g / \partial v, \quad m^*(v, z) = -v \cdot \partial g / \partial v. \quad (2.6)$$

Сопоставляя системы (2.4) и (2.6) при $v = v_1 \in \{v | g(v, z) = 1 = -m^*\}$, получаем значения экстремального направления u^0 и μ с учетом (1.8)

$$u_1^0 = \partial g / \partial v_1, \quad v_1 = -\mu^{-1} a^1, \quad \mu = g(-a^1, z) = G(p, y). \quad (2.7)$$

Из определения $g(v, z)$ и свойств (1.3) находим, что $g(v)$ положительно однородна, выпукла, удовлетворяет при $v \equiv u$ всем условиям (1.3) ($g(u, z) \in G$) и соотношениям

$$g(\lambda_0 v, z) = \lambda_0 g(v, z), \quad g(0, z) \equiv 0, \quad g(v, z) > 0, \quad v \neq 0 \quad (\lambda_0 \geq 0),$$

$$h(u, z) = \sup_{v^1} u \cdot v^1 \quad (v^1 \in \{v | g(v, z) = 1\}), \quad g(v, z) = \sup_{u_1} v \cdot u_1. \quad (2.8)$$

Функция $g(u, z)$ нецентрально строго выпукла по u одновременно с функцией $h(u, z)$

$$h(u_2) - h(u_1) > (u_2 - u_1) \cdot \partial h / \partial u_1 \quad (u_2 \neq \alpha u_1, u_1 \neq 0, 0 \leq \alpha = \text{const}),$$

для которой система (2.4) при $a^1 \neq 0$ имеет единственное решение

$$u_1^0 = \partial g / \partial v_1 = \partial g / \partial v. \quad (v_* = -a^1 = -A^* p). \quad (2.9)$$

Для простоты примем, что $f(h, y)$ удовлетворяет по h условию

$$qf(h, y) \geq l(h, y) \equiv h(p \cdot Y + f(q, y)) - qp \cdot Y \quad (y \in D, 0 \leq h \leq q), \quad (2.10)$$

которое выполняется в задачах синтеза норм-автономных [5] систем. При (2.9) и (2.10) величина $k(h)$ достигает минимума в $h = q$. Оптимальный регулятор — вектор-функция $u^0(z) = q u_1^0 = q \partial g / \partial a$. Здесь $a = -A^* p \neq 0$, если $p \neq 0$, и $AA^* > 0 \sim \text{rang } A = l$. Из (1.7) — (1.9) и (2.2) получаем неравенства

$$B[s, u] \geq B[s, u^0] \quad \text{на} \quad D^1 \times \omega (\omega : h(u, z) \leq q), \quad (2.11)$$

$$s' = -\lambda f(q, y) \leq -W(y) f(q, y) \quad (D^1 : t \geq 0, y \in E_0^l, |y| < d_1, \gamma \in \Gamma),$$

если допустимая функция $s(y)$ удовлетворяет уравнению

$$p \cdot Y(y) - qG(p, y) + f(q, y) = 0 \quad (y \in E_0^l, |y| < d_1, s(0) = 0) \quad (2.12)$$

и выполняется условие граничности (2.10). Следуя [6, 7], находим d^0 в (1.10). Обозначим $s_0 = \inf s(y)$ при $y \in E_+^l, |y| = d_1 - \varepsilon_1 = d_0$ ($\varepsilon_1 > 0$). Тогда $d^0 = d^1 - \varepsilon_0$, где d^1 — наименьший модуль корня $s(y) = s_0$, $0 < \varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_1 = \text{const}$, $d^0 < d_1$. Согласно теореме 3.1 [6] и ее модификации [3] имеем следующий результат.

Если решение (2.12) — допустимая функция $s(y)$ и неравенство (2.10) справедливо, то для любых z_0 в цилиндре $C^0 : |y_0| \leq d^0, y_0 \in E_0^l$, граничный регулятор $u^0(z) = q \partial g / \partial a$ является оптимальным по (2.1) регулятором y -стабилизации решения $x = 0$ системы (1.7), (1.9).

Оптимальный регулятор $u_0(q)$ получаем из $u^0(z)$ подстановкой

(1.5). Он приводит точки цилиндра $C_1^0: 0 < |\xi_0'| \leq h^0$ на $\xi' = 0$, если h^0 удовлетворяет (1.10). При выполнении условий леммы 1 [3] время перехода $t_1 - t_0$ конечно для точек C_1^0 . Допустим, что динамическая система (1.7) при $u = u^0(z)$ имеет в области $D'_0: t \geq 0$,

$y \in E_0^l$, $|y| \leq d'$, $\gamma \in \Gamma$, функцию $V(z)$ со свойствами

$$V_1(y) \leq V(z) \leq V_2(y), \quad V(t, 0) \equiv 0, \quad V(t, 0, z) \equiv 0, \quad V_1(y) > 0, \quad y \neq 0,$$

$$V' = -w(z) \leq -W(y), \quad V_1 \rightarrow \infty, \quad |y| \rightarrow \infty, \quad V_2(0) = 0 \quad (2.13)$$

$$(V(z), V_a(y) \subset C, \quad z \in D'),$$

при которых $y \rightarrow 0$, $t \rightarrow t_1 - 0$, если $z_0 \in D_0: t \geq 0$, $y \in E_0^l$, $|y| \leq d^0 < d'$, $\gamma \in \Gamma$ ($D'_0 = D' \cap D_0$). Обозначим $v_{21} = \max V_2$ $|y| \leq d'$, $v_{22} = \max V_2$ $|y| \leq d^0$ ($y \in E_+^l$). На интервале $[t_0, t_1(z_0))$ имеем $V(t, x(t, z_0)) \equiv v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_1(z_0) - 0$.

Лемма. Пусть для $V(z)$ известна непрерывная в области $D_1^0: t \geq 0$, $0 < v < v_{21}$, функция $f(t, v)$, для которой

$$f(t, V(z)) \geq w(z), \quad z \in D'_0, \quad (2.14)$$

а неравенство $v' \geq -f(t, v)$ не имеет решений при t_0, v_0 из $D_{10}: t \geq 0$, $0 < v \leq v_{22}$, лежащих в D_1^0 и примыкающих к $v = 0$ за конечное время $t_1 - t_0 < \infty$. Тогда решения (1.7) при $u = u^0(z)$ и $z_0 \in D_0$ примыкают к $y = 0$ за бесконечное время.

Доказательство. Пусть справедливо обратное утверждение — существует $x_*(t, z_0)$ с конечным $\tau = t_1 - t_0$. Рассмотрим $V(t, x_*(t, z_0)) = v_*(t)$ вдоль кривой $t, x_*(t, z_0)$, лежащей в области D'_0 , где выполнено равенство (2.13). В силу (2.14) получаем неравенство $v_*' = -w \geq -f(t, v_*)$, которое противоречит условиям (2.14).

Регулятор $u_0(q)$ дает оптимальную ξ' -стабилизацию в целом, если $s(y)$ удовлетворяет (2.12) на E_0^l , $s \rightarrow \infty$ при $|y| \rightarrow \infty$ и условия (1.8), (1.9) и (2.10) выполняются в $R_0 = T \times E_0^l \times \Gamma$.

Отметим следующие обстоятельства. Условие граничности и вид уравнения (2.12) можно аналогично получить для системы (1.1) общего типа (без информативных переменных). Для системы (1.1) с известными информативными переменными $x(q)$ выражения величин h_1, X, A_1 определяются на $h(u, z)$, $F(z)$, $M_1(z)$ и (1.7) — (1.9) с помощью преобразования (1.5). Задача синтеза для системы (1.1) в координатах $x(q)$ сводится к вопросу существования $A_1(q)$, $f(h, y)$ и допустимой функции $s(y)$, удовлетворяющих (1.8), (2.10) и уравнению (2.12) размерности $l \ll n$.

Используя (2.8), (2.12), а также неравенства и обозначения

$$G(p, y) \geq |p| \min_e G(e, y), \quad \min |p| \geq f(q, y) k_0^{-1}(y) \quad (0 < f(q, y) \sim p \neq 0),$$

$$e \equiv p |p|^{-1}, \quad 0 < k_0 \equiv \max_e (qG(e, y) - e \cdot Y), \quad 0 < k_1 \equiv \min_e G(e, y),$$

$$l_0 \equiv 1 - q k_1 k_0^{-1}, \quad l_1 \equiv k_1 k_0^{-1}, \quad \varphi(h, y) \equiv f^{-1}(q, y) f(h, y),$$

находим оценку, не содержащую s , $\varphi(h, y) \geq l_1(y)h + l_0(y)$, при которой выполняется условие граничности (2.10).

Обозначим $\sigma = p \cdot Y$. Если допустимое решение (2.12) удовлетворяет оценке

$$\sigma \geq \max_h [h(f(q, y)q^{-1} + \sigma q^{-1}) - f(h, y)] \quad (0 \leq h \leq q), \quad (2.15)$$

то справедливо неравенство (2.10). Для вогнутой и линейной $f(h)$ на $[0, q]$ условие (2.15) имеет вид $\sigma \geq -f(0, y)$. Последнее достаточно также в случае выпуклой функции $f(h)$, удовлетворяющей оценке $|\partial f / \partial h| < |q^{-1}f(q, y) + \sigma|$ при $0 \leq h \leq q, y \in E_+^I$.

3. Отметим два варианта задачи обращения в конструировании оптимального регулятора системы (1.1), (2.1). Сперва найдем условия существования решения задачи, близкой к проблеме Калмана—Летова [2, 6]. Рассмотрим некоторую допустимую функцию $s(y)$, которая на E_+^I удовлетворяет условиям

$$s(0) = 0, s(y) > 0, y \neq 0, p = \partial s / \partial y \neq 0, y \neq 0, s \rightarrow \infty |y| \rightarrow \infty, \quad (3.1)$$

$$s(y) \subset C, y \in E_+^I, s(y) \subset C_1, y \in E_0^I \equiv E_+^I \setminus 0.$$

Условия (3.1) выполняются, в частности, для $s(y) \in G = \{h(y)\}$. Относительно системы (1.1) предположим, что она имеет информативные переменные $x(q)$, $\text{rang } A = l \leq r = \dim u$, производная $dS/d\theta$ ($d\theta = \lambda dt$) вдоль (1.9) при $u \equiv 0$ удовлетворяют неравенству

$$dS/d\theta|_{u=0} = p \cdot Y(y) < qG(p, y) \quad (y \in E_0^I), \quad (3.2)$$

$$\lambda = \lambda(z) \geq W(y), \quad \lambda(z) \subset C_1, y \neq 0 (W(0) = 0, W(y) \subset C, y \in E_+^I).$$

Возьмем $f^1(h, y)$ из класса непрерывных на $r_0 \times E_+^I$ функций, удовлетворяющих там краевому условию и оценке

$$f^1(q, y) \equiv qG(p, y) - p \cdot Y(y) > 0 \quad (y \in E_0^I), \quad (3.3)$$

$$f^1(h, y) \geq hG(p, y) - p \cdot Y(y) \quad (h \in r_0: 0 \leq h \leq q, y \in E_0^I).$$

Здесь и ниже используются обозначения (1.2), (1.5), (1.7) — (1.9). Для функции $\Phi^1 \equiv f^1(h, y) - hG(p, y)$, достигающей минимума при $h = 0$ или $h = q$ (например, вогнутой или линейной по h), оценка (3.3) эквивалентна неравенству $f^1(0, y) \geq -p \cdot Y$. Согласно результатам [6, 3] находим, что $u^0(z)$ — оптимальный по (2.1) регулятор y -стабилизации системы (1.7) в целом, если выполняются условия (3.1) — (3.3) и $f(h, y) \equiv f^1(h, y)$. Требование $s' \leq -W(y)$ здесь переходит в простое неравенство (3.2), которое выполняется, если $p \cdot Y < 0$ при $y \in E_0^I$. Условия (3.2) и (3.3) эквивалентны дифференциальным неравенствам для $s(y)$ вида

$$\max_{0 \leq h \leq q} F^1(h, y) \leq p \cdot Y < qG(p, y) \quad (y \in E_0^I, F^1 \equiv -\Phi^1), \quad (3.4)$$

$$f^1(q, y) \equiv qG(p, y) - p \cdot Y.$$

Из (1.3) и (2.8) для функции $g(v, z)$ находим оценки

$$|v| h_1^{-1}(z) \leq g(v, z) \leq |v| h_0^{-1}(z) \quad (h_0 = \min_e h(e, z), h_1 = \max_e h(e, z), |e| = 1). \quad (3.5)$$

Для задач с границей области управления в пределах $m_0 \leq |u| \leq m_1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varrho m_1^{-1} \leq h_0(z) \leq h_1(z) \leq \varrho m_0^{-1} \quad (z \in R = T \times E_+^l \times \Gamma). \quad (3.6)$$

Корни $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ уравнения $\det(AA^* - \alpha E) = 0$ положительны в силу предположения $\text{rang } A = l$. Введем обозначения

$$a_0^2(z) = \min_i \{\alpha_i\}, \quad a_1^2(z) = \max_i \{\alpha_i\} \quad (i = \overline{1, l}). \quad (3.7)$$

В задаче с ограничениями (3.6) для выполнения условий (3.4) достаточно, чтобы выбор функции $f^1(h, y)$ и матрицы A удовлетворял оценкам

$$\sup_{0 \leq h \leq \varrho} (m_1 \varrho^{-1} a_1(z) - f^1(h, y) |p|^{-1}) \leq p^0 \cdot Y(y) < m_0 a_0(z) \quad (p^0 = |p^{-1}| p), \quad (3.8)$$

которые находим из (3.5) и (3.7). Выберем $f^1(h, y)$ согласно (3.8). Если множество $m_0^{-1} |Y| < a_0(z)$ содержит подобласть $0 < |y| \leq \varepsilon_1 = \text{const}$, $y \in E_0^l$, то получаем утверждение о локальной оптимальной y -стабилизации. Здесь условие $s(y) \rightarrow \infty$ при $|y| \rightarrow \infty$ отпадает. Заметим, что строгое неравенство в (3.8) принимает вид $p \cdot Y < 0$, если $\text{rang } A < l$.

Рассмотрим новый вариант задачи обращения — с помощью аппроксимации области управления с границей в пределах $m_0 \leq |u^1| \leq m_1$. Примем для простоты, что $\text{rang } \|a_{ik}\| = l (i, k = \overline{1, l})$. В классе G возьмем функцию $g^1(u, y) \in G$, $g^*(v, z) \equiv g^1(C_0^{-1}v, y)$, удовлетворяющую неравенствам

$$m_0 \varrho_0^{-1} \leq \min_e (|C_0 e|^{-1} g^1(e, y)) \leq \max_e (|C_0 e|^{-1} g^1(e, y)) \leq m_1 \varrho_0^{-1}, \quad (3.9)$$

$$e = v |v|^{-1}, \quad y \in E_0^l, \quad C_0 = \| -A^*, N \|, \quad N = \left\| \begin{matrix} 0 \\ E_{r-l}^{r-l} \end{matrix} \right\|$$

и тождеству $g^1(p, 0, y) = G(p, y)$ ($r \geq l$), где $G(p, y)$, $0 < f(\varrho_0, y)$ — заданные функции, для которых интегрируемо [8-10] уравнение Якоби

$$p \cdot Y(y) + f(\varrho_0, y) - \varrho_0 G(p, y) = 0 \quad (\varrho_0 = \text{const} > 0, \quad y \in E_0^l) \quad (3.10)$$

и полный интеграл $S(y, \alpha)$ является при $\alpha = \alpha^0 = \text{const}$ допустимой функцией $s(y)$ ($\alpha = (\alpha_i)^*$, $s(0) = 0$). Здесь неособенная $r \times r$ матрица C_0 , $m_0 = \text{const} > 0$, $m_1 = \text{const} > 0$, $m_0 \leq m_1$ — заданные числа.

Из (2.8) и (3.9) получаем соотношение

$$h^*(u, z) = \sup_{v_1} u \cdot v_1, \quad v_1 \in \{g^*(v, z) = 1\} \quad (m_0 \leq |u_1| \leq m_1), \quad (3.11)$$

$$g^*|_{v=a} \equiv g^1(C_0^{-1}a, y) \equiv G(p, y) \left(p = \frac{\partial s}{\partial y}, \quad h^*(u, z) \leq \varrho_0 \right).$$

Пусть $s(y)$ — бесконечно большая функция, удовлетворяющая в области $0 \leq h^* \leq \varrho_0$, $y \in E_+^l$, $y \neq 0$, условию (2.10). Тогда при аппроксимации (3.11), произведенной $g^1(u, y)$, регулятор

$$u_0^*(z) = \varrho_0 \partial g^* / \partial a \quad (a = -A^* p, \quad y \in E_0^l) \quad (3.12)$$

дает оптимальную по (2.1) y -стабилизацию в целом.

Оценки (3.9) выполняются в случае $m_0 \varrho_0^{-1} c^1 \leq g_0^1(y) \leq g_1^1(y) \leq m_1 \varrho_0^{-1} c^0$, где $g_0^1 = \min_e g^1$, $g_1^1 = \max_e g^1$ ($e = |u|^{-1} u$), $(c^0)^2 = \min c_s$, $(c^1)^2 = \max c_s$,

а c_s — положительные корни $\det \|C_0 C_0^* - cE\| = 0$, $s = \overline{1, r}$. Можно показать, что $h^*(u, z) \equiv h_*(u, y)$, если $AA^* \equiv A_2(y)$. Выражая $f(q, y)$ из равенства (3.10), нетрудно получить комбинацию обоих вариантов задачи обращения.

Условия примыкания решений динамической системы Σ вида $x' = X(x)$, $(t, x_v)^* \in D: |t| < \infty, |x| < \infty, x \in Z$ ($v = \overline{1, n}$), которая имеет r функционально независимых, дифференцируемых на $E^n \setminus Z$ частных инвариантов

$$h_s(x) = 0, h_s(0) = 0, h_s(x) \subset C, x \in E^n \quad (s = \overline{1, r}, r \leq n-1),$$

$$h' = \Phi(x, h), \Phi(x, 0) \equiv 0, x \in E^n \setminus Z \quad (h = (h_s)^*),$$

выражает

Теорема. Пусть для Σ известна непрерывная на E^n и дифференцируемая вне Z функция $V(x)$, которая в $H: h(x) = 0$ имеет на Z собственный минимум $V(P) > V(Z) = V(0) = 0$, и множества $Z: x \in H, V(x) = 0, P: x \in H, x \in Z$ ($x = 0 \in Z$) не пусты.

Пусть ограничено множество $L: x \in H, V(x) < l = \text{const}$ ($l > 0$) и на $R = L \cap P$ имеем $V' \equiv X[V] \leq 0$.

Тогда любое решение системы для $x_0 \equiv x(t_0) \in R$ примыкает к множеству $N = Z \cup Q$, где Q — максимальное инвариантное множество, содержащееся в пересечении $L_0: V'(x) = 0, V(x) < l, x \in H$.

Доказательство. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$, $x_0 \in R$. Из ограниченности L и неравенств $V(x(t, x_0)) \leq V(x_0) < l$ в области определения $T_1: [t_0, t_1]$ решения имеем $|x(t, x_0)| \leq r_0(l) < \infty$. Так как $x(t, x_0)$ не уходит в бесконечность при $t \in T_1$, то время $t_1 - t_0$ определения решения в R бесконечно или конечно. Для $t \rightarrow +\infty$ продолжаемого в R решения $x(t, x_0)$ нет конечного t_1 примыкания $x(t, x_0) \rightarrow Z$ при $t \rightarrow t_1 - 0$. Тогда из непрерывности $V(x)$, $h(x)$ получаем, что $\omega(x_0) \equiv \omega_0$ — предельное множество $x(t, x_0)$ — лежит во множестве $H \cap Z \cup V(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t, x_0)) = l_0 < l$ ($l_0 \geq 0$). Для $l_0 = 0$ имеем

$x(t, x_0) \rightarrow Z$ при $t \rightarrow +\infty$. При $l_0 > 0$ из инвариантности ω_0 следует $V'(\omega'_0) = 0$ для всех $\omega'_0 \in \omega_0$, $\omega'_0 \in Z$.

Для $x(t, x_0)$ с конечным временем определения в R есть первый момент t_1 , когда $x \rightarrow Z$ при $t \rightarrow t_1 - 0$. Объединяя оба случая, получаем доказательство теоремы.

При $H \equiv E^n$ имеем отсюда модификацию теоремы VI [11] в случае недифференцируемых на $V(x) = 0$ функций $V(x)$, $X(x)$.

Если H — произвольное инвариантное множество, где $V(H) \neq 0$, то утверждение теоремы сохраняется.

Следствие 1. Пусть условия теоремы выполняются для любого конечного $l > 0$ и $V \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда любое решение $x(t, x_0)$ с $x_0 \in P$ примыкает к $Z \cup Q_1$, где Q_1 — максимальное инвариантное множество в $V'(x) = 0, x \in H$.

Следствие 2. Если $\rho(Z, M \setminus Z) = \varepsilon > 0$ и $M \setminus Z = \emptyset$, то существует δ -окрестность $Z(\delta > 0)$, в которой все решения $x(t, x_0)$ ($x_0 \in S(Z, \delta)$, $x_0 \in Z$) примыкают к Z . В новых координатах $\xi = (\xi_\alpha, \eta_s)^*$, полученных гладким обратимым преобразованием $\xi_\alpha = \xi_\alpha(x)$, $\eta_s = h_s(x)$ ($\alpha = \overline{1, n-r}$), согласно теореме находим $\xi(t, \xi_0) \rightarrow \xi(N)$ при $t \rightarrow t_1 - 0$ и $\eta_0 = 0$, где $N = Z \cup Q$. В приложениях нередко используют зависимые (избыточные) переменные. При этом для установившихся движений известны геометрические интегралы, которые можно трактовать как частные инварианты соответствующей возмущенной системы вида $x' = X(x)$, $X(0) = 0$.

4. Применим полученные результаты в задачах обращения аппроксимацией для y -одномерной и диссипативной динамических систем.

4.1. Пусть переменные $y_i = y_i(q)$ — инварианты системы (1.1) при $u \equiv 0$ ($Y_i^1 \equiv 0$) и в $D^1 \times \omega$ выполняются условия

$$\det \|a_{ik}(z)\| \neq 0, \dim y \equiv l \leq \dim u \equiv r \quad (i, k = \overline{1, l}), \quad (4.1)$$

$$\lambda \equiv 1, g^1(v, y) \equiv (g_s^2 v_s^2)^{1/2}, \quad g^*(v, z) \equiv g^1(C_0^{-1}v, y), \quad G^2(p, y) \equiv g_i^2 p_i^2,$$

$$h^*(u, z) \equiv \sup_{v^1} u \cdot v^1, \quad v^1 \in \{v \mid g^*(v, z) = 1\}, \quad g_i = g_i(y_i) > 0, \quad g_\sigma = g_\sigma(y) > 0,$$

$$\partial g_i / \partial y_s \equiv 0, \quad s \neq i, \quad f^2(q, y) \equiv q^2 \sum_{i=1}^l f_i^2(y_i), \quad \partial f_i / \partial y_s \equiv 0, \quad s \neq i,$$

$$f_i > 0, \quad f^2(h^*, y) \geq h^{*2} \sum_{i=1}^l f_i^2(y_i) \quad (s = \overline{1, r}, \quad \sigma = \overline{l+1, r}),$$

$$I_i(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{y_i} h_i(\tau) d\tau, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_i(\varepsilon) = I_i < \infty \quad (h_i = f_i(\tau) g_i^{-1}(\tau) > 0),$$

где g_s, f_i, f — достаточно гладкие функции, $C_0 = \| -A^*, N \|$ — матрица $(r \times r)$. В силу (4.1) решение (2.12) — допустимая функция

$$s_1(y) = \sum_{i=1}^l I_i(y_i), \quad s_1(0) = 0, \quad s_1 > 0, \quad y \in E_0^l, \quad |y| < d_1 \quad (4.2)$$

и выполнено условие (2.10). Согласно (3.12), (4.1) и (4.2) регулятор

$$u_1^0(z) = q \left(\sum_{i=1}^l f_i^2 \right)^{-1/2} (C_0^{-1})^* v^1 (v^1 = (g_1 f_1, \dots, g_l f_l, 0, \dots, 0)^*, \dim v^1 = r),$$

оптимальный в C^0 , осуществляет ξ' -стабилизацию в целом, если условия (1.8), (1.9), (2.10), (2.12) и (4.1) выполнены в R_0 и все $I_i \rightarrow +\infty$ при $y_i \rightarrow \infty$.

4.2. Рассмотрим одномерный случай $y = y_1 = y_1(q)$ при условиях

$$Y_1^1 = \lambda(z) Y_1(y), \quad P = \lambda(z) A(z), \quad \| -a_{1s}(z) \| = a_1 = -A^* \neq 0, \quad (4.3)$$

$$g(a_1, z) = g_0(y), \quad g(v, z) = \sup_{u_1} u_1 \cdot v \quad (h(u_1, z) = 1), \quad 0 \leq h \leq q,$$

$$g_0(y) - Y_0(y) > 0,$$

$$f(h, y) \geq f_0(g_0 h - q Y_0) (g_0 - Y_0)^{-1} (Y_0 = q^{-1} Y_1, \quad f_0 = q^{-1} f(q, y)),$$

$$I_2(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^y f_0(g_0 - Y_0)^{-1} d\tau, \quad I_2(\varepsilon) \rightarrow I_2 < \infty, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (t \geq 0, \quad 0 < y, \quad y \in \Gamma).$$

В этом случае функция $s_2(y) \equiv I_2(y)$ — допустима, условие (2.10) выполнено и граничный регулятор $u_2^0(z) = q \partial g / \partial a_1$ является оптимальным регулятором ξ' -стабилизации в целом. Последнее следует из уравнения $y' = \lambda q (Y_0 - g_0)$ и условий (1.6), (4.3), $\lambda \geq W(y) > 0, y \neq 0$.

4.3. Рассмотрим вопрос z -стабилизации решения $z = 0$ системы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + Q(z) + bv \quad (z = (x_v, y_v)^*, \quad t \geq 0, \quad |z| < \infty), \quad (4.4)$$

$$H = H_1(x) + H_2(z), \quad H_1(0) = 0, \quad H_1 > 0, \quad x \neq 0, \quad H_1 \rightarrow \infty,$$

$$\begin{aligned}
 |x| \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x} \neq Q, \quad y=0, \quad x \neq 0, \\
 \frac{\partial H_1}{\partial x} = Q|_{z=0}, \quad H_2(x, 0) \equiv 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial y} \equiv 0, \quad y=0, \\
 0 < B = \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_j} \right\| \quad (i, j = \overline{1, n}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 < \text{const} \leq \min \beta_i, \quad \det |B - \beta_i E| = 0, \quad b = A(z)x, \quad 2R = A + A^* > 0, \\
 \omega(z) = x \cdot Q(z) \leq 0 \quad (Q(z), H_1(z), A(z) \subset C_1, H_2(z) \subset C_2, |z| < \infty),
 \end{aligned}$$

управляемой одним рулем $v = (v_1)^*$, при условии минимума расхода на линейную комбинацию диссипации ω и затрат вида

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_1} (|b \cdot \partial H / \partial y| f(H, |v|) - q^{-1} \omega(z) f(H, q)) d\tau, \quad (4.5)$$

$$|v| \leq q, \quad 0 < f(H, q) \subset C, \quad q f(H, |v|) \geq |v| f(H, q) \quad (H \geq 0).$$

Условия (4.4) означают, что $H(x, y)$ строго выпукла по импульсам y_i , имеет в $z = 0$ собственный абсолютный минимум и $H \rightarrow +\infty$ при $|z| \rightarrow \infty$. Для системы (4.4) допустимая функция $s_3(y)$ и оптимальный по (4.5) регулятор z -стабилизации в целом имеют вид

$$s_3(y) = s_3^0(H) = \int_0^H q^{-1} f(\tau, q) d\tau, \quad v^0 = -M \quad (s_3(0) = 0). \quad (4.6)$$

Действительно, значения (4.6) удовлетворяют в $T \times E^{2n}$ первому из неравенств (2.11). Величина H при $v = v^0$ в силу (4.4) равна $\omega(z) - q R \partial H / \partial y \cdot \partial H / \partial y \leq 0$ и всюду отрицательна вне плоскости $y = 0$, которая не является инвариантным множеством: $dy/dt|_{y=0} = Q(x, 0) - \partial H_1 / \partial x \neq 0 (x \neq 0)$ вне $x = 0$. Из теоремы Барбашина—Красовского следует, что v^0 для (4.4) осуществляет z -стабилизацию в целом.

Заметим, что в полученных результатах глобальным условиям оптимального синтеза можно придать локальную форму. В п. 4.3 функция $\lambda(z)$ задана не обязательно H -положительно определенной и введена невязка на диссипацию. Ясно, что условие граничности (2.10), используемое здесь для упрощения постановки задачи, не является существенным. Следует отметить, что класс функционалов (2.1) включает квадратичные при $h^2 = P_1 u \cdot u$ и $y = y_1 = P_1^1 \xi \cdot \xi$ и описывает затраты времени, импульса и энергии. В постановке нет требований $u_0(t, \xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, $f(q, u_0) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$ и дополнительного условия $t_1 = \infty$.

В рассуждениях не используется дифференцируемость функций f, s, u_0, V на множестве цели. Применение вместо $s(y)$ информативной функции $y = y_1(q)$ для установления глобальной управляемости в пп. 4.2 и 4.3 нетрудно распространить на системы вида (1.6)—(1.9). Необходимость в этом определяется ситуацией, аналогичной пп. 4.2 и 4.3, где $s_2(y), s_3(y)$ — не обязательно бесконечно большие функции. Оптимальные управления $u_0[t] = u_0(t, \xi(t, \xi_0))$ в рассматриваемой задаче синтеза оказываются непрерывными функциями на интервале $[t_0, t_1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, М., 1968.
2. Летов А. М., Динамика полета и управления, М., 1969.
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, 178 (1975).
4. Румянцев В. В., ПММ, 36, вып. 6, 966 (1972).
5. Кейс И. А., Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 4, 44 (1975).
6. Румянцев В. В., ПММ, 34, вып. 3, 440 (1970).
7. Красовский Н. Н., В кн.: Малкин И. Г., Теория устойчивости движений, доп. 4, М., 1966.
8. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961.
9. Чертков Р. И., Метод Якоби в динамике твердого тела, Л., 1960.
10. Парс Л., Аналитическая динамика, М., 1971.
11. Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/IV 1976

I. KEIS

DIMENSIONI VÄHENDAMISEST MÕNEDE DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE OPTIMAALSE SÜNTEESI ÜLESANNETES

Vaadeldakse juhtimise seisukohast lineaarse n -mõõtmelise dünaamilise süsteemi optimaalse sünteesi ülesannet. Võrratussüsteemiga antud mittestatsionaarne juhtimispiirkond aproksimeeritakse ühe kitsenduse abil. Informatiivsete muutujatega süsteemi tarvis taandatakse ülesanne $l \ll n$ dimensionaalse Jacobi võrrandi lahendamisele ja juhtimismaatriksi valikule.

Esitatakse Kalman-Letovi probleemi pöördülesande lahendamise meetod, mis on saadud juhtimispiirkonna aproksimeerimisest teel.

Optimaalse sünteesi ülesanne on lahendatud y -ühemõõtmelise, y -invariantse ja dissipatiivse süsteemi puhul.

I. KEIS

DIMENSION REDUCTION IN OPTIMAL SYNTHESIS OF SOME DYNAMICAL SYSTEMS

The optimal synthesis problem for n -dimensional system, linear on control, is considered. Control lies in a region approximating one corresponding to several constraints. The dimension of Jacobi equation is diminished ($l \ll n$) for systems with informative variables via control matrix selection. The approximation of control region for solution of Kalman-Letov inverse problem is proposed. Optimal synthesis for y -one-dimensional, y -invariant and dissipating systems is obtained in the paper.