EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.1.01

УДК 518.61

Э. ТАММЕ

О РЕГУЛЯРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

1. Введение

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ проблему собственных значений задачи

$$Au - \mu Bu = 0, \qquad u \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega), \tag{1.1}$$

где

$$Au = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m \\ |\beta| \leqslant m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta} D^\beta u), \quad Bu = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m \\ |\alpha+\beta| < 2m}} D^\alpha(b_{\alpha\beta} D^\beta u).$$

Собственными значениями задачи (1.1) называются такие значения комплексного параметра μ, при которых уравнение (1.1) имеет нетривиальное обобщенное решение $u \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega)$ (см. напр., [1]), а собственными функциями — эти нетривиальные решения.

Предположим, что коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ и $b_{\alpha\beta}(x)$ — измеримые ограниченные действительные функции и что при $|\alpha| = |\beta| = m$ коэффициенты $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ почти всюду в Ω удовлетворяют условию сильной эллиптичности

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) t_\alpha t_\beta \geqslant \varkappa \sum_{|\alpha|=m} t_\alpha^2, \quad \varkappa > 0, \tag{1.2}$$

где t_α — любые действительные числа. Пусть $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ продолжены на все R^n с сохранением этих свойств (напр., постоянными вне Ω). Функции из $\overset{0}{H}{}^m(\Omega)$ продолжим нулем вне Ω.

При сделанных предположениях A и B — линейные непрерывные операторы из $\overset{0}{H}{}^m(\Omega)$ в $H^{-m}(\Omega) = (\overset{0}{H}{}^m(\Omega))'$, и спектр уравнения (1.1) состоит из счетного числа изолированных собственных значений, которым соответствуют конечномерные собственные и корневые подпространства (см., напр., [2]).

Аппроксимируем уравнение (1.1) разностным уравнением

$$A_h u_h - \mu B_h u_h = 0, \qquad u_h \in \overset{0}{H}{}^m(\Omega_h), \tag{1.3}$$

где A_h и B_h — линейные непрерывные операторы из дискретного пространства Соболева $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_h)$ в $H^{-m}(\Omega_h) = (\overset{0}{H}{}^m(\Omega_h))'$. В работе Г. М.

Вайникко [2] доказано, что такой приближенный метод вычисления собственных значений и собственных и корневых функций сходится, если последовательность операторов $C_h = A_h - \mu B_h$ сходится к $C = A - \mu B$ регулярно. При этом регулярная сходимость является в некотором смысле и необходимым условием для сходимости корневых подпространств.

Отметим, что регулярная сходимость операторов является основным условием и для сходимости приближенных методов вычисления собственных значений и функций уравнения, в которое параметр μ входит нелинейно (см. [3]). Из регулярной сходимости разностных операторов следует также сходимость соответствующих разностных методов решения краевых задач (см. [2]).

Ниже докажем регулярную сходимость некоторого класса разностных аппроксимаций задачи Дирихле. Отметим, что сходимость разностных методов такого типа исследована, например, в работах [4–10].

2. Аппроксимация пространств Соболева

Семейство дискретных пространств $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_h)$ построим следующим образом.

Покроем пространство R^n равномерной сеткой

$$R_h^n = \{x_i = (i_1 h_1, \ \ldots, \ i_n h_n) : h_\nu > 0; \quad i_\nu = 0, \ \pm 1, \ \ldots\}.$$

Рассмотрим предельный переход, в котором $h = (h_1, \ \ldots \ , h_n) \to 0$ как последовательность, причем

$$\max_\nu h_\nu \leqslant K \min_\nu h_\nu, \quad K = \mathrm{const}.$$

Окружим каждый узел x_i параллелепипедом

$$\pi_i = \{x = (x_1, \ \ldots, \ x_n) : (i_\nu - 1/2) h_\nu < x_\nu < (i_\nu + 1/2) h_\nu\}$$

и введем обозначение

$$\overline{\Omega}_h = \{x_i \in R_h^n : \pi_i \cap \Omega \neq \varnothing\}.$$

Из $\overline{\Omega}_h$ выделим множество «внутренних» узлов $\Omega_h \subset \overline{\Omega}$. При этом имеется некоторая свобода. Предположим только, что выполнены следующие условия:

1) $\lim\limits_{h \to 0} \operatorname{mes} \bigcup\limits_{x_i \in \Gamma_h} \pi_i = 0, \quad$ где $\quad \Gamma_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h;$

2) существуют постоянные $h_0 > 0$ и $\varkappa_0 > 0$ такие, что при $|h| = (h_1^2 + \ldots + h_h^2)^{1/2} < h_0$ через каждый $x_i \in \Gamma_h$ проходит такая прямая сетки, на которой находятся $m+1$ последовательных узлов вне $\overline{\Omega}_h$, отстоящих от x_i не более чем на $\varkappa_0 |h|$.

Отметим, что эти условия выполняются тривиальным образом, если принять $\Omega_h = \overline{\Omega}_h$ (тогда $\Gamma_h = \varnothing$).

Элементами пространства $\overset{0}{H}{}^m(\Omega_h)$ будем считать функции $u_h(x)$, определенные на сетке R_h^n и равные нулю вне Ω_h. Определив в этом пространстве скалярное произведение

$$(u_h, \ v_h)_m = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (\partial^\alpha u_h, \partial^\alpha v_h), \ (u_h, \ v_h) = \sum_{x \in R^n} u_h(x_i) \overline{v_h(x_i)} h_1 \ldots h_n$$

и соответствующую норму $\|u_h\|_m = (u_h, u_h)_m^{1/2}$, преобразуем его в гильбертово пространство. При этом $\partial^\alpha u_h = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u_h$ — разность вперед порядка α. Элементами пространства $H^{-m}(\Omega_h)$ являются элементы пространства $\overset{m}{H_0}(\Omega_h)$, а норма определяется равенством

$$\|u_h\|_{-m} = \sup_{\|v_h\|_m \leqslant 1} (u_h, v_h).$$

Свяжем пространства $\overset{m}{H_0}(\Omega)$ и $\overset{m}{H_0}(\Omega_h)$ оператором

$$(p_h u)(x_i) = \begin{cases} (q_h u)(x_i) & \text{при} \quad x_i = \Omega_h, \\ 0 & \text{при} \quad x_i \neq \Omega_h, \end{cases}$$

где

$$(q_h u)(x_i) = \frac{1}{h_1 \ldots h_n} \int_{\pi_i} u(x)\, dx.$$

При сделанных предположениях можно показать, что p_h является линейным непрерывным оператором из $\overset{m}{H}_0(\Omega)$ в $\overset{m}{H}_0(\Omega_h)$, причем

$$\lim_{h \to 0} \|p_h u\|_m = \|u\|_m, \quad \forall\, u \in \overset{m}{H}_0(\Omega).$$

Оператор p_h можно расширить как линейный неограниченный оператор из $H^{-m}(\Omega)$ в $H^{-m}(\Omega_h)$, удовлетворяющий также условию

$$\lim_{h \to 0} \|p_h u\|_{-m} = \|u\|_{-m}, \quad \forall\, u \in H^{-m}(\Omega).$$

При этом $\|u\|_m$ и $\|u\|_{-m}$ — нормы в пространствах $\overset{m}{H}_0(\Omega)$ и $H^{-m}(\Omega)$.

Введем понятия сильной и слабой $\pm m$-сходимости (при $h \to 0$)

$$u_h \xrightarrow{\pm m} u \Leftrightarrow \|u_h - p_h u\|_{\pm m} \to 0,$$

$$u_h \overset{\pm m}{\dashrightarrow} u \Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{\mp m} v \Rightarrow (u_h, v_h) \to (u, v)\}$$

и соответствующие им понятия сильной и слабой $\pm m$-компактности (см. [2]). Аналогично [2] можно доказать следующий результат.

Лемма. *При* $m \geqslant 0$ *справедливы утверждения:*

$$\|u_h\|_{m+1} \leqslant \text{const} \Rightarrow (u_h) \quad m\text{-компактна};$$

$$\|u_h\|_m \leqslant \text{const} \Rightarrow (u_h) \quad \text{слабо } m\text{-компактна};$$

$$u_h \overset{m+1}{\dashrightarrow} u \Rightarrow u_h \xrightarrow{m} u.$$

3. Аппроксимация оператора

Рассмотрим аппроксимацию оператора A

$$A_h u_h = \sum_{|\alpha| \leqslant m,\, |\beta| \leqslant m} D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \overline{D}_h^\beta u_h), \tag{3.1}$$

где

$$D_h^\alpha = \partial^{\alpha - \gamma_\alpha} \overline{\partial}^{\gamma_\alpha}, \quad \overline{D}_h^\alpha = \overline{\partial}^{\alpha - \gamma_\alpha} \partial^{\gamma_\alpha}, \quad 0 \leqslant \gamma_\alpha \leqslant \alpha$$

и $\overline{\partial}^\gamma u_h$ — разность назад порядка γ.

Если выполнены условия, сделанные в пп. 1 и 2, то справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Имеют место сходимости*

$$A_h \to A \Leftrightarrow \{u_h \xrightarrow{m} u \Rightarrow A_h u_h \xrightarrow{-m} Au\},$$

$$A_h \dashrightarrow A \Leftrightarrow \{u_h \overset{m}{\dashrightarrow} u \Rightarrow A_h u_h \overset{-m}{\dashrightarrow} Au\}.$$

Доказательство. Из $u_h \xrightarrow{m} u$ имеем

$$D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h) \xrightarrow{-m} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant m, \quad |\beta| \leqslant m, \tag{3.2}$$

откуда, в свою очередь, получаем $A_h u_h \xrightarrow{-m} Au$, чем и доказывается сходимость $A_h \to A$. Сходимость (3.2) следует из неравенств

$$\begin{aligned} &\|D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h) - p_h D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)\|_{-m} \leqslant \\ &\leqslant \|D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h - p_h (a_{\alpha\beta} D^\beta u))\|_{-m} + \\ &+ \|D_h^\alpha p_h (a_{\alpha\beta} D^\beta u) - p_h D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)\|_{-m} \leqslant \\ &\leqslant M \|\bar{D}_h^\beta u_h - p_h D^\beta u\|_0 + \|q_h a_{\alpha\beta} p_h w - p_h (a_{\alpha\beta} w)\|_0 + \\ &+ \|D_h^\alpha p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m} \to 0 \ \text{при} \ h \to 0, \ |\alpha| \leqslant m, \ |\beta| \leqslant m, \end{aligned}$$

где использованы обозначения $w = D^\beta u \in H^0(\Omega)$, $v = a_{\alpha\beta} w \in H^0(\Omega)$.

Сходимость $A_h \dashrightarrow A$ вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} u_h \overset{m}{\dashrightarrow} u &\Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{-m} v \Rightarrow (u_h, v_h) \to (u, v)\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{D_h^\beta (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\alpha w_h) \xrightarrow{-m} D^\beta (a_{\alpha\beta} D^\alpha w) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h), w_h) \to (D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u), w)\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{w_h \xrightarrow{m} w \Rightarrow (A_h u_h, w_h) \to (Au, w)\} \Leftrightarrow A_h u_h \overset{-m}{\dashrightarrow} Au. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Для A_h имеет место неравенство коэрцитивности*

$$\|A_h u_h\|_{-m} \geqslant \varkappa \|u_h\|_m - \varkappa_1 \|u_h\|_{m-1}, \qquad \forall u_h \in \overset{m}{H_0} (\Omega_h),$$

где $\varkappa$ определяется неравенством (1.2).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из неравенств

$$\|A_h u_h\|_{-m} \|u_h\|_m \geqslant (-1)^m (A_h u_h, u_h) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant m, \, |\beta| \leqslant m} (-1)^{m-|\alpha|} (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h, \bar{D}_h^\alpha u_h) \geqslant \varkappa \|u_h\|_m - \varkappa_1 \|u_h\|_m \|u_h\|_{m-1}.$$

Из теорем 1 и 2 и леммы вытекает (см. [2]) следующий основной результат.

Теорема 3. *Последовательность операторов (A_h) сходится регулярно к оператору A.*

Теоремы 1—3 справедливы для разностного оператора (3.1) при любом выборе γ_α. Класс разностных операторов, для которых верны утверждения этих теорем, можно расширить. Пусть $A_{h1}, A_{h2}, \ldots, A_{hk}$ — разностные операторы вида (3.1). Тогда, очевидно, утверждения теорем 1—3 имеют место и для разностного оператора

$$A_h = \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu A_{h\nu}, \quad \text{если} \quad c_\nu \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu = 1.$$

4. Сходимость разностных методов в проблеме собственных значений

Построим в уравнении (1.3) разностные операторы A_h и B_h способом, описанным в конце п. 3. Тогда при любом комплексном μ для $C_h = A_h - \mu B_h$ верно утверждение теоремы 3, т. е. последовательность (C_h) сходится регулярно к оператору $C = A - \mu B$. Следовательно (см. [2]), при $h \to 0$ собственные числа уравнения (1.3) сходятся и собственные и корневые функции этого уравнения m-сходятся, соответственно, к собственным числам и собственным и корневым функциям уравнения (1.1). Более точную формулировку сходимости разностного метода (1.3) можно найти в [2]. Там же доказаны оценки скорости сходимости метода (1.3). Изложим некоторые из них.

Пусть μ_0 есть единственное собственное число уравнения (1.1) в круге $|\mu - \mu_0| \leqslant \delta$ и ему соответствует корневое подпространство W. Обозначим через W_h линейную оболочку корневых подпространств уравнения (1.3), соответствующих собственным числам μ_h, лежащим в круге $|\mu - \mu_0| \leqslant \delta$, а через μ_{0h} арифметическую среднюю этих собственных чисел (с учетом корневых кратностей). Тогда при достаточно малом $|h|$ $\dim W_h = \dim W$ и справедливы оценки

$$|\mu_{0h} - \mu_0| \leqslant M\varepsilon,$$

$$\Theta(W, W_h) = \max\Big(\max_{u_h \in W_h,\ \|u_h\|^m \leqslant 1}\ \min_{u \in W} \|u_h - p_h u\|_m,$$

$$\max_{u \in W,\ \|u\|_m \leqslant 1}\ \min_{u_h \in W_h} \|u_h - p_h u\|_m\Big) \leqslant M\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \max_{u \in W,\ \|u\|_m \leqslant 1} (\|A_h p_h u - p_h A u\|_{-m} + \|B_h p_h u - p_h B u\|_{-m}).$$

Для оценки погрешности аппроксимации ε воспользуемся дополнительными предположениями. Обозначим через Ω_h^* множество тех узлов из Ω_h, в которых $C_h u_h$ содержит значения u_h только в узлах, принадлежащих Ω_h. Пусть $\Gamma_h^* = \Omega_h \setminus \Omega_h^*$ и

$$\|u_h\|_s^* = \Big(\sum_{\Omega_h^*} |u_h|^2 h_1 \ldots h_n + \sum_{\Gamma_h^*} |h|^{-2s} |u_h|^2 h_1 \ldots h_n\Big)^{1/2}.$$

Теорема 4. *Пусть*

1° $W \subset H^{2m+1}(\Omega)$ *и* $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ *имеют в* Ω *измеримые ограниченные производные до порядка* $m+1$;

2° *граница* Γ *области* Ω *кусочно-гладкая*;

3° *существуют постоянные* $h_0 > 0$ *и* $\varkappa_0 > 0$ *такие, что при* $|h| < h_0$ *через каждый* $x_i \in \Gamma_h^*$ *проходит такая прямая сетки, на которой находятся* $m+1$ *последовательных узлов вне* Ω_h^*, *отстоящих от* x_i *не более чем на* $\varkappa_0 |h|$.

Тогда $\varepsilon = O(|h|^{1/2})$.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве теоремы 1, оценим

$$\|A_h p_h u - p_h A u\|_{-m} \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m,\ |\beta| \leqslant m} [M \|\bar{D}_h\, p_h u - p_h D^\beta u\|_0 +$$

$$+ \|q_h a_{\alpha\beta} p_h w - p_h(a_{\alpha\beta} w)\|_0 + \|D_h\, p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m}],$$

где $w = D^\beta u$ и $v = a_{\alpha\beta} w$.

Оценивая аналогично [11], получим при $|\beta| \leqslant m$, $u \in H^{m+1}(\Omega) \cap \cap \overset{0}{H}{}^m(\Omega)$ и $w \in H^1(\Omega)$

$$\|\overline{D}_h^\beta p_h u - p_h D^\beta u\|_0 \leqslant \|\overline{D}_h^\beta (p_h u - q_h u)\|_0 + $$
$$+ \|\overline{D}_h^\beta q_h u - p_h D^\beta u\|_0 \leqslant M_1 |h|^{1/2} \|u\|_{m+1},$$
$$\|q_h a_{\alpha\beta} p_h w - p_h (a_{\alpha\beta} w)\|_0 \leqslant M_2 |h|^{1/2} \|w\|_1.$$

В [7] доказано, что $\|u_h\|_m^* \leqslant M \|u_h\|_m$, из чего вытекает $\|u_h\|_{-m} \leqslant \leqslant M \|u_h\|_{-m}^*$. Следовательно,

$$\|D_h^\alpha p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m} \leqslant M \|D_h^\alpha p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m}^* \leqslant$$
$$\leqslant M_3 |h|^{1/2} \|v\|_{m+1} \quad \text{при} \quad v \in H^{m+1}(\Omega), \quad |\alpha| \leqslant m.$$

Оценив с помощью этих неравенств и $\|B_h p_h u - p_h B u\|_{-m}$, получим утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., 1971.
2. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов, Тарту, 1976.
3. Вайникко Г. М., Карма О. О., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **14**, 1393 (1974).
4. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953.
5. Саульев В. К., В сб.: Вычислительная математика, **1**, М., 1957, с. 81.
6. Лебедев В. И., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, 649 (1964).
7. Thomée V., Contributions to differential equations, **3**, 301 (1964).
8. Лапин А. В., Ляшко А. Д., Изв. вузов, Математика, № 10, 37 (1970).
9. Лапин А. В., В сб.: Исследования по прикладной математике, **1**, Казань, 1973, с. 90.
10. Гудович Н. Н., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **13**, 658 (1973).
11. Вайникко Г. М., Тамме Э. Э., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **16**, 652 (1976).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 24/III 1976

E. TAMME

DIRICHLET' ÜLESANDE DIFERENTSAPROKSIMATSIOONIDE REGULAARSEST KOONDUMISEST

Tõestatakse ühe elliptilist tüüpi $2m$ järku diferentsiaaloperaatori klassi diferentsaproksimatsioonide regulaarne koondumine, millest [2] põhjal järeldub vastavate diferentsmeetodite koondumine omaväärtusülesande lahendamisel. Näidatakse, et omaväärtuste ja juurfunktsioonide lähendid koonduvad kiirusega $O(|h|^{1/2})$.

E. TAMME

ÜBER DIE REGULÄRE KONVERGENZ DER DIFFERENZENAPPROXIMATIONEN DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS

Es wird die reguläre Konvergenz einer Klasse der Differenzenapproximationen des elliptischen Differentialoperators $2m$-ter Ordnung bewiesen. Aus der regulären Konvergenz folgt (s. [2]) die Konvergenz der entsprechenden Differenzenverfahren für die Lösung der Eigenwertaufgabe. Es wird bezeigt, daß die Näherungen der Eigenwerte und Hauptfunktionen mit der Geschwindigkeit $O(|h|^{1/2})$ konvergieren.