

Э. ТАММЕ

## О РЕГУЛЯРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

### 1. Введение

Рассмотрим в ограниченной области  $\Omega \subset R^n$  проблему собственных значений задачи

$$Au - \mu Bu = 0, \quad u \in H_0^m(\Omega), \quad (1.1)$$

где

$$Au = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u), \quad Bu = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m \\ |\alpha + \beta| < 2m}} D^\alpha (b_{\alpha\beta} D^\beta u).$$

Собственными значениями задачи (1.1) называются такие значения комплексного параметра  $\mu$ , при которых уравнение (1.1) имеет нетривиальное обобщенное решение  $u \in H_0^m(\Omega)$  (см. напр., [1]), а собственными функциями — эти нетривиальные решения.

Предположим, что коэффициенты  $a_{\alpha\beta}(x)$  и  $b_{\alpha\beta}(x)$  — измеримые ограниченные действительные функции и что при  $|\alpha| = |\beta| = m$  коэффициенты  $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$  почти всюду в  $\Omega$  удовлетворяют условию сильной эллиптичности

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) t_\alpha t_\beta \geq \kappa \sum_{|\alpha|=m} t_\alpha^2, \quad \kappa > 0, \quad (1.2)$$

где  $t_\alpha$  — любые действительные числа. Пусть  $a_{\alpha\beta}$  и  $b_{\alpha\beta}$  продолжены на все  $R^n$  с сохранением этих свойств (напр., постоянными вне  $\Omega$ ). Функции из  $H_0^m(\Omega)$  продолжим нулем вне  $\Omega$ .

При сделанных предположениях  $A$  и  $B$  — линейные непрерывные операторы из  $H_0^m(\Omega)$  в  $H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))'$ , и спектр уравнения (1.1) состоит из счетного числа изолированных собственных значений, которым соответствуют конечномерные собственные и корневые подпространства (см., напр., [2]).

Аппроксимируем уравнение (1.1) разностным уравнением

$$A_h u_h - \mu B_h u_h = 0, \quad u_h \in H_0^m(\Omega_h), \quad (1.3)$$

где  $A_h$  и  $B_h$  — линейные непрерывные операторы из дискретного пространства Соболева  $H_0^m(\Omega_h)$  в  $H^{-m}(\Omega_h) = (H_0^m(\Omega_h))'$ . В работе Г. М.

Вайникко [2] доказано, что такой приближенный метод вычисления собственных значений и собственных и корневых функций сходится, если последовательность операторов  $C_h = A_h - \mu B_h$  сходится к  $C = A - \mu B$  регулярно. При этом регулярная сходимость является в некотором смысле и необходимым условием для сходимости корневых подпространств.

Отметим, что регулярная сходимость операторов является основным условием и для сходимости приближенных методов вычисления собственных значений и функций уравнения, в которое параметр  $\mu$  входит нелинейно (см. [3]). Из регулярной сходимости разностных операторов следует также сходимость соответствующих разностных методов решения краевых задач (см. [2]).

Ниже докажем регулярную сходимость некоторого класса разностных аппроксимаций задачи Дирихле. Отметим, что сходимость разностных методов такого типа исследована, например, в работах [4-10].

## 2. Аппроксимация пространств Соболева

Семейство дискретных пространств  $H_0^m(\Omega_h)$  построим следующим образом.

Покроем пространство  $R^n$  равномерной сеткой

$$R_h^n = \{x_i = (i_1 h_1, \dots, i_n h_n) : h_\nu > 0; \quad i_\nu = 0, \pm 1, \dots\}.$$

Рассмотрим предельный переход, в котором  $h = (h_1, \dots, h_n) \rightarrow 0$  как последовательность, причём

$$\max_{\nu} h_\nu \leq K \min_{\nu} h_\nu, \quad K = \text{const.}$$

Окружим каждый узел  $x_i$  параллелепипедом

$$\pi_i = \{x = (x_1, \dots, x_n) : (i_\nu - 1/2)h_\nu < x_\nu < (i_\nu + 1/2)h_\nu\}$$

и введем обозначение

$$\bar{\Omega}_h = \{x_i \in R_h^n : \pi_i \cap \Omega \neq \emptyset\}.$$

Из  $\bar{\Omega}_h$  выделим множество «внутренних» узлов  $\Omega_h \subset \bar{\Omega}$ . При этом имеется некоторая свобода. Предположим только, что выполнены следующие условия:

$$1) \lim_{h \rightarrow 0} \text{mes} \bigcup_{x_i \in \Gamma_h} \pi_i = 0, \quad \text{где} \quad \Gamma_h = \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h;$$

2) существуют постоянные  $h_0 > 0$  и  $\kappa_0 > 0$  такие, что при  $|h| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{1/2} < h_0$  через каждый  $x_i \in \Gamma_h$  проходит такая прямая сетки, на которой находятся  $m + 1$  последовательных узлов вне  $\bar{\Omega}_h$ , отстоящих от  $x_i$  не более чем на  $\kappa_0 |h|$ .

Отметим, что эти условия выполняются тривиальным образом, если принять  $\Omega_h = \bar{\Omega}_h$  (тогда  $\Gamma_h = \emptyset$ ).

Элементами пространства  $H_0^m(\Omega_h)$  будем считать функции  $u_h(x)$ , определенные на сетке  $R_h^n$  и равные нулю вне  $\Omega_h$ . Определив в этом пространстве скалярное произведение

$$(u_h, v_h)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u_h, \partial^\alpha v_h), \quad (u_h, v_h) = \sum_{x \in R^n} u_h(x) \overline{v_h(x)} h_1 \dots h_n$$

и соответствующую норму  $\|u_h\|_m = (u_h, u_h)_m^{1/2}$ , преобразуем его в гильбертово пространство. При этом  $\partial^\alpha u_h = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} u_h$  — разность вперед порядка  $\alpha$ . Элементами пространства  $H^{-m}(\Omega_h)$  являются элементы пространства  $H_0^m(\Omega_h)$ , а норма определяется равенством

$$\|u_h\|_{-m} = \sup_{\|v_h\|_m \leq 1} (u_h, v_h).$$

Свяжем пространства  $H_0^m(\Omega)$  и  $H_0^m(\Omega_h)$  оператором

$$(p_h u)(x_i) = \begin{cases} (q_h u)(x_i) & \text{при } x_i \in \Omega_h, \\ 0 & \text{при } x_i \notin \Omega_h, \end{cases}$$

где

$$(q_h u)(x_i) = \frac{1}{h_1 \dots h_n} \int_{\pi_i} u(x) dx.$$

При сделанных предположениях можно показать, что  $p_h$  является линейным непрерывным оператором из  $H_0^m(\Omega)$  в  $H_0^m(\Omega_h)$ , причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|p_h u\|_m = \|u\|_m, \quad \forall u \in H_0^m(\Omega).$$

Оператор  $p_h$  можно расширить как линейный неограниченный оператор из  $H^{-m}(\Omega)$  в  $H^{-m}(\Omega_h)$ , удовлетворяющий также условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|p_h u\|_{-m} = \|u\|_{-m}, \quad \forall u \in H^{-m}(\Omega).$$

При этом  $\|u\|_m$  и  $\|u\|_{-m}$  — нормы в пространствах  $H_0^m(\Omega)$  и  $H^{-m}(\Omega)$ .

Введем понятия сильной и слабой  $\pm m$ -сходимости (при  $h \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} u_h \xrightarrow{\pm m} u &\Leftrightarrow \|u_h - p_h u\|_{\pm m} \rightarrow 0, \\ u_h \xrightarrow{\pm m} u &\Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{\mp m} v \Rightarrow (u_h, v_h) \rightarrow (u, v)\} \end{aligned}$$

и соответствующие им понятия сильной и слабой  $\pm m$ -компактности (см. [2]). Аналогично [2] можно доказать следующий результат.

Лемма. При  $m \geq 0$  справедливы утверждения:

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{m+1} \leq \text{const} &\Rightarrow (u_h) \text{ } m\text{-компактна}; \\ \|u_h\|_m \leq \text{const} &\Rightarrow (u_h) \text{ слабо } m\text{-компактна}; \\ u_h \xrightarrow{m+1} u &\Rightarrow u_h \xrightarrow{m} u. \end{aligned}$$

### 3. Аппроксимация оператора

Рассмотрим аппроксимацию оператора  $A$

$$A_h u_h = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h), \quad (3.1)$$

где

$$D_h^\alpha = \partial^{\alpha - \gamma_\alpha} \bar{\partial}^{\gamma_\alpha}, \quad \bar{D}_h^\alpha = \bar{\partial}^{\alpha - \gamma_\alpha} \partial^{\gamma_\alpha}, \quad 0 \leq \gamma_\alpha \leq \alpha$$

и  $\bar{\partial}^{\gamma_\alpha} u_h$  — разность назад порядка  $\gamma$ .

Если выполнены условия, сделанные в пп. 1 и 2, то справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Имеют место сходимости*

$$A_h \rightarrow A \Leftrightarrow \{u_h \xrightarrow{m} u \Rightarrow A_h u_h \xrightarrow{-m} Au\},$$

$$A_h \dashrightarrow A \Leftrightarrow \{u_h \dashrightarrow^m u \Rightarrow A_h u_h \dashrightarrow^{-m} Au\}.$$

Доказательство. Из  $u_h \xrightarrow{m} u$  имеем

$$D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h) \xrightarrow{-m} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u) \quad \text{при } |\alpha| \leq m, \quad |\beta| \leq m, \quad (3.2)$$

откуда, в свою очередь, получаем  $A_h u_h \xrightarrow{-m} Au$ , чем и доказывается сходимость  $A_h \rightarrow A$ . Сходимость (3.2) следует из неравенств

$$\begin{aligned} & \|D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h) - p_h D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)\|_{-m} \leq \\ & \leq \|D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h - p_h (a_{\alpha\beta} D^\beta u))\|_{-m} + \\ & + \|D_h^\alpha p_h (a_{\alpha\beta} D^\beta u) - p_h D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)\|_{-m} \leq \\ & \leq M \|\bar{D}_h^\beta u_h - p_h D^\beta u\|_0 + \|q_h a_{\alpha\beta} p_h \omega - p_h (a_{\alpha\beta} \omega)\|_0 + \\ & + \|D_h^\alpha p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \quad |\alpha| \leq m, \quad |\beta| \leq m, \end{aligned}$$

где использованы обозначения  $\omega = D^\beta u \in H^0(\Omega)$ ,  $v = a_{\alpha\beta} \omega \in H^0(\Omega)$ . Сходимость  $A_h \dashrightarrow A$  вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} u_h \dashrightarrow^m u & \Leftrightarrow \{v_h \dashrightarrow^{-m} v \Rightarrow (u_h, v_h) \rightarrow (u, v)\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \{D_h^\beta (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\alpha \omega_h) \dashrightarrow^{-m} D^\beta (a_{\alpha\beta} D^\alpha \omega) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (D_h^\alpha (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h), \omega_h) \rightarrow (D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u), \omega)\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \{\omega_h \dashrightarrow^m \omega \Rightarrow (A_h u_h, \omega_h) \rightarrow (Au, \omega)\} \Leftrightarrow A_h u_h \dashrightarrow^{-m} Au. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Для  $A_h$  имеет место неравенство коэрцитивности*

$$\|A_h u_h\|_{-m} \geq \kappa \|u_h\|_m - \chi_1 \|u_h\|_{m-1}, \quad \forall u_h \in H_0^m(\Omega_h),$$

где  $\kappa$  определяется неравенством (1.2).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из неравенств

$$\begin{aligned} & \|A_h u_h\|_{-m} \|u_h\|_m \geq (-1)^m (A_h u_h, u_h) = \\ & = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{m-|\alpha|} (q_h a_{\alpha\beta} \bar{D}_h^\beta u_h, \bar{D}_h^\alpha u_h) \geq \kappa \|u_h\|_m - \chi_1 \|u_h\|_{m-1}. \end{aligned}$$

Из теорем 1 и 2 и леммы вытекает (см. [2]) следующий основной результат.

Теорема 3. *Последовательность операторов  $(A_h)$  сходится регулярно к оператору  $A$ .*

Теоремы 1—3 справедливы для разностного оператора (3.1) при любом выборе  $\gamma_\alpha$ . Класс разностных операторов, для которых верны утверждения этих теорем, можно расширить. Пусть  $A_{h1}, A_{h2}, \dots, A_{hk}$  — разностные операторы вида (3.1). Тогда, очевидно, утверждения теорем 1—3 имеют место и для разностного оператора

$$A_h = \sum_{v=1}^k c_v A_{hv}, \quad \text{если } c_v \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{v=1}^k c_v = 1.$$

#### 4. Сходимость разностных методов в проблеме собственных значений

Построим в уравнении (1.3) разностные операторы  $A_h$  и  $B_h$  способом, описанным в конце п. 3. Тогда при любом комплексном  $\mu$  для  $C_h = A_h - \mu B_h$  верно утверждение теоремы 3, т. е. последовательность  $(C_h)$  сходится регулярно к оператору  $C = A - \mu B$ . Следовательно (см. [2]), при  $h \rightarrow 0$  собственные числа уравнения (1.3) сходятся и собственные и корневые функции этого уравнения  $m$ -сходятся, соответственно, к собственным числам и собственным и корневым функциям уравнения (1.1). Более точную формулировку сходимости разностного метода (1.3) можно найти в [2]. Там же доказаны оценки скорости сходимости метода (1.3). Изложим некоторые из них.

Пусть  $\mu_0$  есть единственное собственное число уравнения (1.1) в круге  $|\mu - \mu_0| \leq \delta$  и ему соответствует корневое подпространство  $W$ . Обозначим через  $W_h$  линейную оболочку корневых подпространств уравнения (1.3), соответствующих собственным числам  $\mu_h$ , лежащим в круге  $|\mu - \mu_0| \leq \delta$ , а через  $\mu_{0h}$  арифметическую среднюю этих собственных чисел (с учетом корневых кратностей). Тогда при достаточно малом  $|h|$   $\dim W_h = \dim W$  и справедливы оценки

$$|\mu_{0h} - \mu_0| \leq M\varepsilon,$$

$$\Theta(W, W_h) = \max_{u_h \in W_h, \|u_h\|_m \leq 1} \min_{u \in W} \|u_h - p_h u\|_m,$$

$$\max_{u \in W, \|u\|_m \leq 1} \min_{u_h \in W_h} \|u_h - p_h u\|_m \leq M\varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \max_{u \in W, \|u\|_m \leq 1} (\|A_h p_h u - p_h A u\|_{-m} + \|B_h p_h u - p_h B u\|_{-m}).$$

Для оценки погрешности аппроксимации  $\varepsilon$  воспользуемся дополнительными предположениями. Обозначим через  $\Omega_h^*$  множество тех узлов из  $\Omega_h$ , в которых  $C_h u_h$  содержит значения  $u_h$  только в узлах, принадлежащих  $\Omega_h$ . Пусть  $\Gamma_h^* = \Omega_h \setminus \Omega_h^*$  и

$$\|u_h\|_s^* = \left( \sum_{\Omega_h^*} |u_h|^2 h_1 \dots h_n + \sum_{\Gamma_h^*} |h|^{-2s} |u_h|^2 h_1 \dots h_n \right)^{1/2}.$$

**Теорема 4.** Пусть

1°  $W \subset H^{2m+1}(\Omega)$  и  $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$  имеют в  $\Omega$  измеримые ограниченные производные до порядка  $m+1$ ;

2° граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  кусочно-гладкая;

3° существуют постоянные  $h_0 > 0$  и  $\chi_0 > 0$  такие, что при  $|h| < h_0$  через каждый  $x_i \in \Gamma_h^*$  проходит такая прямая сетки, на которой находятся  $m+1$  последовательных узлов вне  $\Omega_h^*$ , отстоящих от  $x_i$  не более чем на  $\chi_0 |h|$ .

Тогда  $\varepsilon = O(|h|^{1/2})$ .

**Доказательство.** Так же, как и в доказательстве теоремы 1, оценим

$$\|A_h p_h u - p_h A u\|_{-m} \leq \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} [M \|D_h p_h u - p_h D^\beta u\|_0 + \|q_h a_{\alpha\beta} p_h \omega - p_h (a_{\alpha\beta} \omega)\|_0 + \|D_h p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m}],$$

где  $\omega = D^\beta u$  и  $v = a_{\alpha\beta} \omega$ .

Оценивая аналогично [11], получим при  $|\beta| \leq m$ ,  $u \in H^{m+1}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$  и  $\omega \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\bar{D}_h^\beta p_h u - p_h D^\beta u\|_0 &\leq \|\bar{D}_h^\beta (p_h u - q_h u)\|_0 + \\ &+ \|\bar{D}_h^\beta q_h u - p_h D^\beta u\|_0 \leq M_1 |h|^{1/2} \|u\|_{m+1}, \\ \|q_h a_{\alpha\beta} p_h \omega - p_h (a_{\alpha\beta} \omega)\|_0 &\leq M_2 |h|^{1/2} \|\omega\|_1. \end{aligned}$$

В [7] доказано, что  $\|u_h\|_m^* \leq M \|u_h\|_m$ , из чего вытекает  $\|u_h\|_{-m} \leq M \|u_h\|_{-m}^*$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \|D_h^\alpha p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m} &\leq M \|D_h^\alpha p_h v - p_h D^\alpha v\|_{-m}^* \leq \\ &\leq M_3 |h|^{1/2} \|v\|_{m+1} \quad \text{при } v \in H^{m+1}(\Omega), \quad |\alpha| \leq m. \end{aligned}$$

Оценив с помощью этих неравенств и  $\|B_h p_h u - p_h B u\|_{-m}$ , получим утверждение теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., 1971.
2. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов, Тарту, 1976.
3. Вайникко Г. М., Карма О. О., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 14, 1393 (1974).
4. Ладыженская О. А., Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953.
5. Саульев В. К., В сб.: Вычислительная математика, 1, М., 1957, с. 81.
6. Лебедев В. И., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 4, 649 (1964).
7. Томье В., Contributions to differential equations, 3, 301 (1964).
8. Лапин А. В., Ляшко А. Д., Изв. вузов, Математика, № 10, 37 (1970).
9. Лапин А. В., В сб.: Исследования по прикладной математике, 1, Казань, 1973, с. 90.
10. Гудович Н. Н., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 13, 658 (1973).
11. Вайникко Г. М., Тамме Э. Э., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 16, 652 (1976).

Тартуский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
24/III 1976

E. TAMME

#### DIRICHLET' ÜLESANDE DIFERENTSAPROKSIMATSIOONIDE REGULAARSEST KOONDUMISEST

Tõestatakse ühe elliptilist tüüpi  $2m$  järku diferentsiaaloperaatori klassi diferents-aproksimatsioonide regulaarne koondumine, millest [2] põhjal järeldub vastavate diferentsmeetodite koondumine omaväärtusülesande lahendamisel. Näidatakse, et omaväärtuste ja juurfunktsioonide lähendid koonduvad kiirusega  $O(|h|^{1/2})$ .

E. TAMME

#### ÜBER DIE REGULÄRE KONVERGENZ DER DIFFERENZENAPPROXIMATIONEN DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS

Es wird die reguläre Konvergenz einer Klasse der Differenzenapproximationen des elliptischen Differentialoperators  $2m$ -ter Ordnung bewiesen. Aus der regulären Konvergenz folgt (s. [2]) die Konvergenz der entsprechenden Differenzenverfahren für die Lösung der Eigenwertaufgabe. Es wird gezeigt, daß die Näherungen der Eigenwerte und Hauptfunktionen mit der Geschwindigkeit  $O(|h|^{1/2})$  konvergieren.