

Л. СОСНИ

## К СИНТЕЗУ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ

Усовершенствован разработанный в [1] метод синтеза интерференционных покрытий. В качестве примера произведен синтез интерференционного покрытия, энергетический коэффициент пропускания которого обратно пропорционален волновому числу.

### Новое представление характеристики неоднородного диэлектрического слоя

Если исследуемый неоднородный диэлектрический слой находится в интервале оптического пути света  $[2x_0, 2x]$ , то его амплитудная характеристика  $a \equiv r/t$ , где  $r$  и  $t$  — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания, выражается формулой

$$a(k) = \int_{x_0}^x da_1(x_1, k) + \int_{x_0}^x da_1(x_1, k) \int_{x_0}^{x_1} da_1^*(x_2, k) \int_{x_0}^{x_2} da_1(x_3, k) + \dots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{x_0}^x da_1(x_1, k) \int_{x_0}^{x_1} da_1^*(x_2, k) \int_{x_0}^{x_2} da_1(x_3, k) \dots \int_{x_0}^{x_{2m-1}} da_1^*(x_{2m}, k) \int_{x_0}^{x_{2m}} da_1(x_{2m+1}, k)$$
(1)

(см. [2]). Здесь

$$a_1(x, k) = \int_{x_0}^x \frac{dn}{d\xi} \frac{1}{2n} e^{+ikh\xi} d\xi,$$
(2)

$n(x)$  — показатель преломления,  $k$  — волновое число, переменные  $x, x_1, x_2, \dots, \xi$  означают удвоенный оптический путь света и  $a^*$  комплексно-сопряженно к  $a$ . Не нарушая общности, перейдем к бесконечным пределам интегрирования и найдем Фурье-образ  $\tilde{a}(x)$  характеристики  $a(k)$

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{ikhx} dk = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikh(x_1-x)} dk dx_1 + \right.$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x_2) \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x_3) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikh(x_3-x_2+x_1-x)} dk dx_3 dx_2 dx_1 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x_2) \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x_3) \int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_4) \int_{-\infty}^{x_4} \varphi(x_5) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x_5 - x_4 + x_3 - x_2 + x_1 - x)} \dots \\ \dots dk dx_5 \dots dx_1,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{dn}{dx} \frac{1}{2n(x)}. \quad (3)$$

Окончательно

$$\tilde{a}(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty \varphi(x_1) \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x_2) \varphi(x_2 - x_1 + x) dx_2 dx_1 + \quad (4)$$

$$+ \int_x^\infty \varphi(x_1) \int_{x_1-x}^{x_1} \varphi(x_2) \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x_3) \int_{-\infty}^{x_3} \varphi(x_4) \varphi(x_4 - x_3 + x_2 - x_1 + x) dx_4 \dots dx_1.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$a(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{a}(x) e^{+ikx} dx. \quad (5)$$

Полагая

$$a(k) = P(k) + iQ(k) \quad (6)$$

и учитывая, что  $\tilde{a}(x)$ , согласно формуле (4), вещественно, получим

$$\tilde{a}(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty P(k) \cos kx dk + \int_0^\infty Q(k) \sin kx dk \right], \quad (7)$$

причем  $P(k)$  должна быть четной функцией, а  $Q(k)$  — нечетной.

### Метод синтеза интерференционных светофильтров

Пусть требуется синтезировать светофильтр с заданными энергетическими коэффициентами  $R(k)$  и  $T(k)$ , причем  $R + T = 1$ . Задача синтеза включает два этапа — нахождение показателя преломления  $n(x)$  неоднородного слоя, имеющего заданные характеристики, и переход от неоднородного слоя к дискретно-слоистой системе.

Первый этап осуществляется с помощью найденных в предыдущем разделе формул следующим образом. Заданным коэффициентам  $R$  и  $T$  соответствует характеристика  $a = r/t$ , вещественная и мнимая части  $P(k)$  и  $Q(k)$  которой (см. формулу (6)) должны удовлетворять соотношению

$$P^2(k) + Q^2(k) = \frac{R(k)}{T(k)} \equiv A(k). \quad (8)$$

Кроме того,  $P(k)$  должна быть четной функцией, а  $Q(k)$  — нечетной функцией волнового числа; в остальном  $P(k)$  и  $Q(k)$  произвольны. Выбрав  $P(k)$  и  $Q(k)$ , вычисляем по формуле (7) Фурье-образ  $\tilde{a}(x)$ . Наконец следует найти величину  $\varphi(x)$ . Для этого имеем формулу (4). Точное



определение  $\varphi(x)$  по этой формуле затруднительно; поэтому воспользуемся методом последовательных приближений. В первом приближении, ограничиваясь первым членом разложения (4), имеем

$$\varphi(x) = \frac{n'}{2n} = \tilde{a}(x), \quad (9)$$

откуда, согласно формуле (3),

$$n_1(x) = n_0 e^{2 \int_0^x \tilde{a}(\xi) d\xi} \quad (10)$$

(индекс у  $n_1$  указывает порядок приближения).

На втором этапе непрерывный показатель преломления  $n_1(x)$  заменяется дискретной зависимостью от координаты  $x$ . Так как  $|a(k)|$  сходится, то при больших  $|x|$   $\tilde{a}(x)$  мало отличается от нуля. Поэтому можно всегда найти такое значение  $B$ , что при  $|x| > B$ ,  $n_1(x)$  практически постоянен. В остальной области изменения  $n_1(x)$  аппроксимируется ступенчатой кривой, наиболее точно имитирующей ход непрерывной кривой. В результате получаем многослойную систему, имеющую приближенно требуемую характеристику  $R/T$ . Тем самым синтез в наименьшем приближении закончен.

Перейдем к высшим приближениям. Так как в действительности должно быть

$$\frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty P(k) \cos kx dk + \int_0^\infty Q(k) \sin kx dk \right] = \varphi(x) + \varepsilon(x), \quad (7')$$

где  $\varepsilon(x)$  — оставшаяся часть ряда (4), то  $n_1(x)$  реализует некоторую характеристику  $a_1(k)$  такую, что  $|a_1(k)|^2 = A_1(k)$  отличается от заданного отношения  $R/T$ . Ей соответствуют отличные от принятых вначале функций  $P_1(k)$  и  $Q_1(k)$ . Пусть

$$\begin{aligned} P(k) &= P_1(k) + \beta_1(k), \\ Q(k) &= Q_1(k) + \delta_1(k). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассматривая  $\beta_1(k)$  и  $\delta_1(k)$  как возмущения, для второго приближения находим

$$\varepsilon_1(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty \beta_1(k) \cos kx dk + \int_0^\infty \delta_1(k) \sin kx dk \right] \quad (12)$$

и

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \varepsilon_1(x), \quad (13)$$

откуда

$$n_2(x) = n_1(x) e^{2 \int_0^x \varepsilon_1(\xi) d\xi}. \quad (14)$$

Если полученные при помощи  $n_2(x)$  характеристики  $P_2(k)$  и  $Q_2(k)$  все еще отличаются от  $P(k)$  и  $Q(k)$ , то находится таким же образом поправка  $\varepsilon_2(x)$  для  $\varphi_2(x)$  и т. д. Общие формулы таковы:

$$\varepsilon_m(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty \beta_m(k) \cos kx dk + \int_0^\infty \delta_m(k) \sin kx dk \right] \quad (15)$$

и

$$\varphi_m(x) = \tilde{a}(x) + \sum_{l=1}^m \varepsilon_l(x). \quad (16)$$

Нахождение последующих приближений можно сделать всегда схо-



дящимся процессом. Введем такую положительную постоянную  $\gamma$ , что

$$\begin{aligned} |\gamma P_1(k)| &\leq |P(k)|, \\ |\gamma Q_1(k)| &\leq |Q(k)|, \end{aligned} \quad (17)$$

т. е. вместо  $\tilde{a}(x)$  используем

$$\tilde{a}'(x) = \gamma \tilde{a}(x). \quad (18)$$

Как можно показать интегрированием членов ряда (1) по частям, в тех точках, где  $a_1(k) = 0$ , все члены этого ряда равны нулю. В других точках можно такую  $\gamma$  всегда найти. А поправку  $\varepsilon_1'(x)$  для  $\varphi_1'(x) \approx \tilde{a}'(x)$  определим из функций

$$\begin{aligned} \beta'_1(k) &= P(k) - \gamma P_1(k), \\ \delta'_1(k) &= Q(k) - \gamma Q_1(k), \end{aligned} \quad (19)$$

которые везде абсолютно меньше  $|P(k)|$  и  $|Q(k)|$ . То же можно показать и для любого высокого приближения, так что

$$\begin{aligned} |\beta'_{m+1}(k)| &\leq |\beta'_m(k)|, \\ |\delta'_{m+1}(k)| &\leq |\delta'_m(k)|. \end{aligned} \quad (20)$$

Это означает сходимость метода.

В связи с этим сделаем одно практическое замечание. Как показывает опыт практических расчетов, имеют место неравенства  $|P_1(k)| \geq |P(k)|$  и  $|Q_1(k)| \geq |Q(k)|$ . Поэтому целесообразно ввести первую поправку заранее и принять в качестве исходных функций

$$\begin{aligned} P_0(k) &\approx 0,75P(k), \\ Q_0(k) &\approx 0,75Q(k), \end{aligned} \quad (21)$$

где коэффициент 0,75 установлен эмпирически.

Обратимся вновь ко второму этапу синтеза и обсудим возникающие при этом ошибки. Одна из них состоит в предположении, что  $\varphi(x) = 0$  при больших  $|x|$ , другая связана с заменой непрерывной кривой  $n(x)$  ступенчатой кривой. Уменьшение этих ошибок при последующих приближениях достигается тем, что вычисление характеристик  $P_1(k)$  и  $Q_1(k)$  производится не для неоднородного слоя с  $n_1(x)$ , а для соответствующей дискретной системы, т. е. после выполнения аппроксимации. Тогда  $\beta_1(k)$  и  $\delta_1(k)$  будут содержать наряду с ошибкой приближения (9) уже ошибку, связанную с аппроксимацией. Таким образом, последние будут учтены в поправке  $\varepsilon_1(x)$ .

Косинус- и синус-преобразования Фурье могут реализовать любые сходящиеся образы. Но при синтезе мы используем конечные интервалы интегрирования, что при переходе к дискретным системам дает конечные тригонометрические ряды, где отсутствуют высокие гармоники. Это не позволяет реализовать характеристику точно. Поэтому целесообразно попытаться сначала реализовать всю характеристику с помощью одной из функций  $P(k)$  и  $Q(k)$  и затем находить все поправки только для этой функции до тех пор, пока дальнейшие приближения не перестанут улучшать характеристику. Тем самым возможности одного из преобразований исчерпываются. А так как  $P(k)$  и  $Q(k)$  в первом приближении независимы, то дальнейшее улучшение характеристики возможно с помощью другой из функций  $P(k)$  и  $Q(k)$ .



### Проблема ограничивающих сред

Слои интерференционных покрытий могут иметь самые разнообразные показатели преломления. Иначе обстоит дело с ограничивающими средами. Одной из них является почти всегда воздух или вакуум. Если показатель преломления подложки мы можем выбирать в достаточно широком интервале (напр., от 1,45 до 1,65) произвольно, то показатель преломления воздуха фиксирован ( $n_0 = 1,00$ ). Наша процедура синтеза не гарантирует, однако, получения показателя преломления одной из ограничивающих сред, равного единице. Не гарантирует она также разумного значения показателя преломления другой среды.

Эти затруднения можно преодолеть. Общий метод обеспечения необходимых значений показателей преломления ограничивающих сред состоит в следующем.

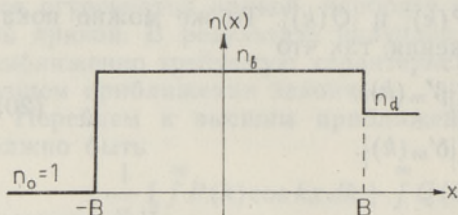


Рис. 1.

Найдя в первом приближении  $n_1(x)$ , построим однослойную систему (назовем ее «несущей» системой) с некоторым, пока не определенным показателем преломления  $n_b$  (см. рис. 1), причем показатель преломления одной из ограничивающих сред полагаем равным  $n_0 = 1$ . Толщину  $2B$  этой однослойной системы выбираем так, чтобы при  $x < -B$  и  $x > B$  можно было считать  $n_1(x)$  постоянным.

Величину  $n_1(x)$  нормируем так, чтобы  $n_1(-B) = 1$ . Затем «модулируем» эту однослойную систему с помощью  $n_1(x)$ , т. е. берем в качестве новой системы пленку с показателем преломления

$$n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < -B; \\ n_1(x)n_b, & \text{если } -B \leq x \leq B; \\ n(B)n_d, & \text{если } x > B. \end{cases} \quad (22)$$

Отсюда определяем и значения  $n_b$  и  $n_d$ . Именно,  $n_b$  выбираем так, чтобы произведение  $n_1(x)n_b$  дало нам реальные значения показателей преломления (с учетом возможного уменьшения в последующих приближениях), а  $n_d$  так, чтобы произведение  $n(B)n_d = n_a$  находилось в интервале значений показателей преломления, используемых для подложек.

Произведя аппроксимацию, найдем  $P_1(k)$  и  $Q_1(k)$  полученной системы. Они, конечно, будут отличаться от тех соответствующих характеристик, которые мы получили бы от  $n_1(x)$  без наложения на однослойную систему. Однако эти различия невелики. Притом у нас есть возможность варьировать толщину «несущего» слоя, чтобы получить характеристику, наиболее близкую к заданной. Для этого целесообразно выбирать толщину «несущего» слоя несколько большей, чем требуется условием приближенного постоянства  $n_1(x)$  вне этого слоя.

Дальнейший синтез не отличается от описанного выше.

### Пример

В качестве примера приведем синтез фильтра, коэффициент пропускания которого обратно пропорционален волновому числу, т. е.  $T \sim 1/k$ . Так как интенсивность света пропорциональна волновому числу и числу



фотонов, то энергетическое распределение проходящего света пропорционально спектральному распределению числа фотонов в падающем свете.

Потребуем, чтобы заданная характеристика реализовалась в некотором интервале  $[k_0, 2k_0]$ , вне этого интервала ход пропускания безразличен. Перейдем к безразмерным переменным

$$k/k_0 = u, \quad (23)$$

$$\xi = k_0 x$$

и положим  $T(k_0) = 1$ . Тогда

$$T = 1/u \quad (24)$$

и, соответственно,

$$R = 1 - 1/u, \quad (25)$$

$$A = u - 1.$$

Для первого приближения возьмем

$$\begin{cases} P(u) = \sqrt{u-1} & \text{при } 1,0 \leq u \leq 2,15; \\ P(u) = 0 & \text{при } u < 1,0; u > 2,15; \end{cases} \quad (26)$$

и

$$Q(k) = 0. \quad (26')$$

Используя условие (21), из (7), (9) и (10) получим

$$n_1(\xi) = \exp \left[ 0,477 \int_1^{2,15} \sqrt{u-1} \frac{\sin \xi u}{u} du \right].$$

График функции  $n_1(\xi)$  в области  $\xi > 0$  показан на рис. 2, тогда как  $n_1(-\xi) = \frac{1}{n_1(\xi)}$ . На этом же рисунке показана и аппроксимация ступенчатой линией, причем  $n(\xi)$  берется постоянным и при  $|\xi| > 5,28$ . Параметры «несущего» слоя выбираются так:  $n_b = 1,738$ ,  $n_d = 1,560$  и толщина  $2B = 10,56$ , т. е. толщина слоя принимается равной толщине системы, полученной при аппроксимации.

Данные «модулированной» системы приведены в табл. 1, а характеристики в первом приближении изображены на рис. 3. Как видно, спектральная характеристика в обоих вариантах отличается в первом приближении от заданной (кривая 1) значительно.

Прежде чем перейти к вычислению второго приближения, целесообразно уменьшить толщины слоев

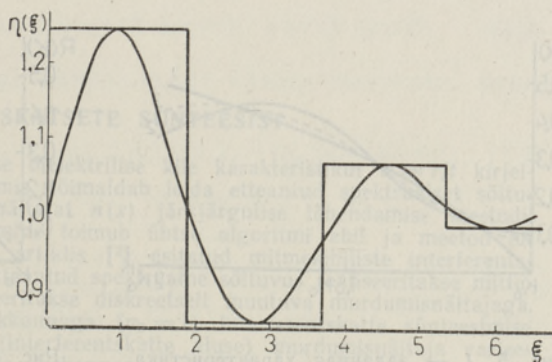


Рис. 2.

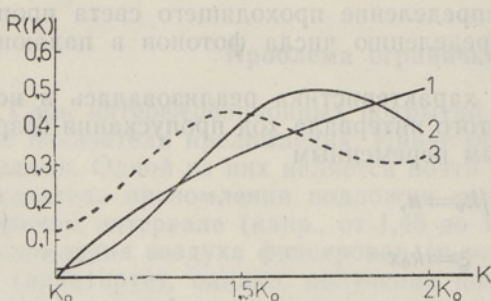


Рис. 3. 1 — заданная характеристика, 2 — характеристика без «несущего» слоя, 3 — характеристика при «несущем» слое.

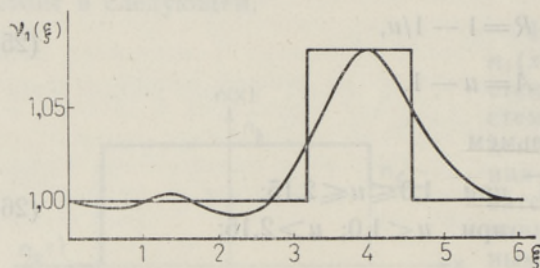


Рис. 4.

примерно в 1,15 раза, что означает замену  $n_1(\xi)$  на  $n_1'(\xi) = n_1(\xi/1,15)$ .

Этой процедурой мы «сдвигаем» характеристику в сторону больших значений  $k$ . Результат оправдывает этот прием. «Сдвинутая» характеристика (кривая 2) на рис. 5 отличается от заданной уже незначительно. Так как у нас есть надежда закончить синтез в следующем приближении, то варьируем  $Q(k)$ . Результаты численного интегрирования показаны на рис. 4, где приведены значения

$$v_1(\xi) = e^{2 \int_0^{\xi} \epsilon_1(\xi) d\xi}$$

при  $\xi > 0$  (при  $\xi < 0$  значения те же).

В данном случае наиболее разумно аппроксимировать показатель преломления дискретными слоями во втором приближении при тех же толщинах слоев, что и в первом приближении.

Данные второго приближения приведены в табл. 1, а спектральная характеристика показана на рис. 5 (кривая 3). Совпадение получается уже довольно хорошим, но все еще недостаточным, так как фильтр синтезируемого типа пригоден практически только при отличном совпадении. Таким образом, мы должны найти еще одну поправку. Найдем ее для  $P(k)$ .

Не останавливаясь здесь на технических подробностях, заметим только, что и в этом случае поправку  $v_2(x)$  можно аппроксимировать в тех же точках, где аппроксимировали  $n_2(x)$ . В результате получается система, параметры которой даны в табл. 1. Спектральная характери-

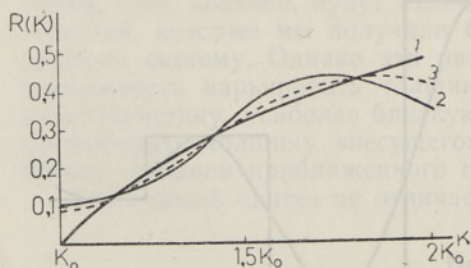


Рис. 5. 1 — заданная характеристика, 2 — «сдвинутая» характеристика, 3 — второе приближение.

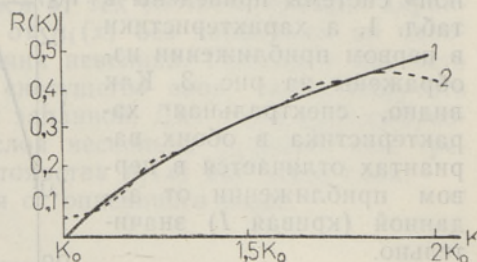


Рис. 6. 1 — заданная характеристика, 2 — третье приближение.



Таблица 1

Но- мер слоя	«Модулиро- ванная» система		Второе приближение		Третье приближение	
	$n$	$\xi$	$n$	$\xi$	$n$	$\xi$
	1,000	—	1,000	—	1,000	—
1	1,604	1,63	1,51	1,42	1,48	1,42
2	2,002	1,74	2,00	1,51	2,08	1,51
3	1,380	1,91	1,38	1,66	1,40	1,66
4	2,132	1,91	2,13	1,66	2,15	1,66
5	1,470	1,74	1,47	1,51	1,54	1,51
6	1,853	1,63	1,73	1,42	1,74	1,42
	1,520	—	1,52	—	1,54	—

Таблица 2

Номер слоя	$n$	Оптическая толщина в четвертях длины волны
	1,00	—
1	1,48	1,258
2	2,08	1,338
3	1,40	1,471
4	2,15	1,471
5	1,54	1,338
6	1,74	1,258
	1,54	—

стика совпадает с заданной в третьем приближении в интервале  $[1,1k_0, 1,85k_0]$  с ошибкой, не превышающей 1% (см. рис. 6).

Таким образом, синтез закончен. Пленка имеет шесть слоев. В табл. 2 приведены показатели преломления и толщины всех шести слоев. Так как заданные свойства хорошо реализуются в интервале  $[1,1k_0, 1,9k_0]$ , выражаем оптические толщины слоев в четвертях длины волны в середине этого интервала, выраженного в длинах волн. В случае видимого света принимаем при частоте  $1,9k_0$  длину волны  $\lambda_{\min} = 400 \text{ нм}$ ; тогда частота  $1,1k_0$  будет соответствовать длине волны  $\lambda_{\max} = 691 \text{ нм}$ . Оптические толщины слоев выражаем, следовательно, в четвертях длины волны зеленой линии  $\text{Hg } \lambda_1 = 546 \text{ нм}$  ( $k = 1,392k_0$ ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сосси Л., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 229 (1974).
2. Сосси Л., Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 17, 41 (1966).

Тартуский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
4/VI 1976

L. SOSSI

## INTERFERENTSKATSETE SÜNTEESIST

Artiklis esitatakse mittehomogeense dielektrilise kile karakteristikut  $a = r/t$  kirjeldava valemiga (1) uus kujul (4)–(5), mis võimaldab leida etteantud spektraalset sõltuvust  $a = a(k)$  rahuldavat murdumisnäitajat  $n(x)$  järkjärgulise lähendamise meetodil (9)–(14), kusjuures iga lähendi leidmine toimub ühtse algoritmi abil ja meetod on koonduv. Seda tulemust rakendatakse artiklis [2] esitatud mitmekihiliste interferentsfiitrite sünteesi meetodi täiustamisel; etteantud spektraalne sõltuvus realiseeritakse mittehomogeense kile abil, mida aproksimeeritakse diskreetselt muutuva murdumisnäitajaga.

On leitud ka fikseeritud lähtekeskonnaga ( $n_0 = 1$ ) interferentskatte sünteesimise võimalus, kusjuures teise keskkonna (interferentskatte aluse) murdumisnäitaja varieerub kitsas, etteantud väärtuse lähedases piirkonnas.

Tulemuste illustreerimiseks on sünteesitud filter, mille läbilaskvus on etteantud vahemikus pöördvärdeline lainearvuga:  $T \sim 1/k$ .



L. SOSSI

## ON THE DESIGN OF INTERFERENCE COATINGS

A new form (4)–(5) for the formula describing the characteristic of inhomogeneous dielectric film  $a = r/t$  is derived. This form makes it possible to find the double optical path  $x$  dependence of the refractive index  $n(x)$  on preassigned wave number dependence of  $a(k)$  by the use of successive approximations (9)–(14). All approximations are found in the same way and they are convergent. These results are used for the improvement of the method for the design of interference coating described in [2], where preassigned spectral dependence is realized by inhomogeneous dielectric film which is approximately replaced by a discrete stepped curve.

Also a possibility is found of designing interference coating with a fixed initial medium ( $n_0 = 1$ ); at that, the value of the refractive index of the foundation of the coating is close to the preassigned value.

Results are illustrated by an example where an interference coating with a transmittance function  $T \sim 1/k$  is designed.

Transmittance T, %	Refractive index n	Thickness d, Å
100	1.00	0
99.9	1.01	1
99.8	1.02	2
99.7	1.03	3
99.6	1.04	4
99.5	1.05	5
99.4	1.06	6
99.3	1.07	7
99.2	1.08	8
99.1	1.09	9
99.0	1.10	10