EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.1.02

УДК 519.271/272

Елена РООС

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим предельное поведение случайной величины $\int\limits_0^t g(\xi(s))\,ds$ при $t\to\infty$, где $\xi(t)$ — решение уравнения вида

$$d\xi(t)=a(t,\xi(t))\,dt+\sigma(t,\xi(t))\,dw(t), \tag{1}$$

$a(t,x)$, $\sigma(t,x)$ — случайные функции, измеримые относительно σ-алгебры $F_t\subset F$, F — семейство σ-алгебр, заданных на вероятностном пространстве (Ω, F, P), $F_{t1}\subset F_{t2}$.

Если выполняются условия теоремы, сформулированной в [1], и если функция $g(x)$ такова, что при некотором $\alpha\geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\int\limits_0^{\gamma|x|}[f'(v)\sigma^2(v)]^{-1}g(v)\,dv}{|f(\gamma|x|)|^{\alpha}}=\begin{cases}\beta_1, & \gamma>0\\ \beta_2, & \gamma<0\end{cases}, \tag{2}$$

где

$$f(x)=\int\limits_0^x \exp\left\{-2\int\limits_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\}du, \tag{3}$$

и, кроме того, для $g(x)$ имеет место

$$|g(x)|\leqslant C(|f(x)|^{\beta}+1), \qquad \beta\leqslant\alpha, \tag{4}$$

то распределение случайной величины

$$t^{-\frac{\alpha+1}{2}}\int\limits_0^t g(\xi(s))\,ds \tag{5}$$

при $t\to\infty$ сходится к распределению случайной величины

$$2\left[\frac{1}{\alpha+1}\bar{\sigma}_1(\eta(1))\,|\eta(1)|^{\alpha+1}\operatorname{sign}\eta(1)-\int\limits_0^1\bar{\sigma}_1(\eta(s))\,|\eta(s)|^{\alpha}\,d\eta(s)\right], \tag{6}$$

где

$$\bar{\sigma}_1(x)=\begin{cases}\beta_1, & x>0\\ \beta_2, & x<0\end{cases}, \tag{7}$$

и процесс $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\eta(t)=\int_0^t \bar{\sigma}(\eta(s))\,dw_1(s), \tag{8}$$

$w_1(s)$ — некоторый винеровский процесс, а

$$\bar{\sigma}(x)=\begin{cases}\sqrt{\sigma_1}, & x>0\\ \sqrt{\sigma_2}, & x<0\end{cases},$$

$\sigma_i\,(i=1,2)$ определяются, как в [1].

Действительно, по формуле Ито, применяя преобразования, аналогичные проведенным в [1, 2], имеем

$$\int_0^t g(\xi(s))\,ds=\Phi(\xi(t))-\int_0^t \Phi'(\xi(s))\,\sigma(\xi(s))\,dw(s)+$$

$$+\int_0^t \Phi'(\xi(s))\,[a(s,\xi(s))-a(\xi(s))]\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(\xi(s))\,[\sigma^2(s,\xi(s))-\sigma^2(\xi(s))]\,ds+$$

$$+\int_0^t \Phi'(\xi(s))\,[\sigma(s,\xi(s))-\sigma(\xi(s))]\,dw(s).$$

Считая $\sigma(x)>0$, $0\leqslant t\leqslant 1$, оценим величины:

$$I_1(tT)=\frac{1}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{tT} \Phi'(\xi(s))\,\frac{[a(s,\xi(s))-a(\xi(s))]}{\sigma(\xi(s))}\,\sigma(\xi(s))\,ds,$$

$$I_2(tT)=\frac{1}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{tT} \Phi'(\xi(s))\left[\frac{\sigma(s,\xi(s))}{\sigma(\xi(s))}-1\right]\sigma(\xi(s))\,dw(s),$$

$$I_3(tT)=\frac{1}{2T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^{tT} \Phi''(\xi(s))\left[\frac{\sigma^2(s,\xi(s))}{\sigma^2(\xi(s))}-1\right]\sigma^2(\xi(s))\,ds.$$

Функция $\Phi(x)$ введена таким образом, что

$$\Phi'(x)\,a(x)+\frac{1}{2}\Phi''(x)\,\sigma^2(x)=g(x),$$

откуда

$$\Phi(x)=2\int_0^x f'(u)\int_0^u \frac{g(v)}{f'(v)\,\sigma^2(v)}\,dv\,du,$$

где $f(x)$ задана соотношением (3).

Тогда

$$\Phi'(x)=f'(x)q(x), \quad \text{где} \quad q(x)=\int\limits_0^x \frac{g(v)}{f'(v)\sigma^2(v)}dv,$$

$$\Phi''(x)=f''(x)q(x)+\frac{g(x)}{\sigma^2(x)},$$

$$\Phi''(x)\sigma^2(x)=f''(x)\sigma^2(x)q(x)+g(x), \tag{9}$$

причем в силу условия 1) теоремы [1] величина $f'(x)\sigma(x)$ органичена, т. е.

$$|f'(x)\sigma(x)|\leqslant C. \tag{10}$$

Положим, далее, для $0\leqslant t\leqslant 1$:

$$\zeta_T(t)=\frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}, \quad w_T(t)=\frac{w(tT)}{\sqrt{T}},$$

$$\alpha_T(t)=\frac{1}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int\limits_0^{tT} g(\xi(s))ds.$$

Итак, в введенных обозначениях имеем

$$|I_1(tT)|\leqslant C\sqrt{T}\int\limits_0^t |\zeta_T(s)|^\alpha\cdot\left|\frac{a(sT,\xi(sT))-a(\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}\right|ds=\beta_T(t).$$

Далее,

$$P\{|\beta_T(t)|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|\zeta_T(s)|>N\}+$$

$$+P\left\{C\sqrt{T}\int\limits_0^t |\zeta_T(s)|^\alpha\chi_{|\zeta_T(s)|\leqslant N}\left|\frac{a(sT,\xi(sT))-a(\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}\right|ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{11}$$

Устремив $T\to\infty$, $N\to\infty$, получим, что сумма в правой части (11) стремится к 0, что непосредственно следует из условий 1) и 2) теоремы [1]. Следовательно, $I_1(tT)\to 0$ по вероятности при $T\to\infty$.

При оценке величины $I_2(tT)$ приходится воспользоваться свойствами мартингалов:

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|I_2(tT)|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_T(s)|>N\}+$$

$$+P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}C\sqrt{T}\int\limits_0^t \Phi'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))\chi_{|\zeta_T(s)|\leqslant N}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{\sigma(sT,\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}-1\right]dw(s)>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_T(s)|>N\}+\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 M\left\{\int\limits_0^1 \Phi'(\xi(sT))\chi_{|\zeta_T(s)|\leqslant N}\times\right.$$

$$\left.\times\sigma(\xi(sT))\left[\frac{\sigma(sT,\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}-1\right]ds\right\}^2\leqslant P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_T(s)|>N\}+$$

$$+C_1 M\left(\int\limits_0^1\left|\frac{\sigma(sT,\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}-1\right|ds\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_T(s)|>N\}+C_1\int\limits_0^1 M\left|\frac{\sigma(sT,\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}-1\right|^2 ds\xrightarrow{P}0,$$

$$T\to\infty,\ N\to\infty.$$

(при оценке учитывались соотношения (9) и тот факт, что

$$q(x)\sim|f(x)|^{\alpha}).$$

Итак, и для $I_2(tT)$ имеет место: $I_2(tT)\to 0$ по вероятности при $T\to\infty$.

Оценка величины $I_3(tT)$ выглядит следующим образом:

$$I_3(tT)=\frac{1}{2T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int\limits_0^{tT} f''(\xi(s))\,q(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\left[\frac{\sigma^2(s,\xi(s))}{\sigma^2(\xi(s))}-1\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int\limits_0^{tT} g(\xi(s))\left[\frac{\sigma^2(s,\xi(s))}{\sigma^2(\xi(s))}-1\right]ds=E_1(tT)+E_2(tT).$$

Так как

$$|q(x)|\leqslant C(|f(x)|^{\alpha}+1),\qquad f''(x)=-\frac{2a(x)}{\sigma^2(x)}f'(x),$$

то для $E_1(tT)$ имеем

$$E_1(tT)=\frac{\sqrt{T}}{2T^{\alpha/2}}\int\limits_0^t f'(\xi(sT))\,\sigma(\xi(sT))\frac{a(\xi(sT))}{\sigma(\xi(sT))}q(\xi(sT))\times$$

$$\times\left[\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-1\right]ds\backsim C\sqrt{T}\int\limits_0^t\frac{q(\xi(sT))}{T^{\alpha/2}}\left[\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-1\right]ds$$

и тогда

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|E_1(tT)|>\varepsilon\}\leqslant P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\frac{q(\xi(sT))}{T^{\alpha/2}}\right|>N\right\}+$$

$$+P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}C\sqrt{T}\int\limits_0^t\left|\frac{q(\xi(sT))}{T^{\alpha/2}}\right|\chi_{|\zeta_T(s)|\leqslant N}\left|\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1\right|ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\backsim P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}|\zeta_T(s)|>N\}+$$

$$+P\left\{C\sqrt{T}\int\limits_0^t|\zeta_T(s)|^{\alpha}\chi_{|\zeta_T(s)|\leqslant N}\left|\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-1\right|ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.\qquad(12)$$

Устремив $T\to\infty$, $N\to\infty$, получим, что сумма в правой части (12) стремится к 0 в силу условий 1) и 2) теоремы [1].

Поскольку

$$E_2(tT)=\frac{\sqrt{T}}{2T^{\alpha/2}}\int\limits_0^t g(\xi(sT))\left[\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-1\right]ds,$$

то можно утверждать, что

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|E_2(tT)|>\varepsilon\}\leqslant P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\frac{g(\xi(sT))}{T^{\alpha/2}}\right|>N\right\}+$$

$$+P\left\{C\sqrt{T}\int\limits_0^t\frac{g(\xi(sT))}{T^{\alpha/2}}\chi_{|\zeta_T(s)|\leqslant N}\left|\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-1\right|ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Функция $g(x)$ непрерывна всюду, за исключением, может быть, конечного числа разрывов 1-го рода в каждой конечной области. В силу соотношения (4):

$$\frac{|g(\xi(tT))|}{T^{\alpha/2}}\leqslant C\left[|\zeta_T(t)|^\beta+\frac{1}{T^{\alpha/2}}\right],\quad \beta\leqslant\alpha,$$

$$|g(\xi(tT))\chi_{|\zeta_T(t)|\leqslant N}|\leqslant C_N.$$

Тогда

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|E_2(tT)|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\zeta_T(s)|>N\}+$$

$$+P\left\{C\sqrt{T}C_N\int\limits_0^t\left|\frac{\sigma^2(sT,\xi(sT))}{\sigma^2(\xi(sT))}-1\right|ds>\frac{\varepsilon}{2}\right\}. \tag{13}$$

Устремив здесь, как и ранее, $T\to\infty$, $N\to\infty$, получим снова, что сумма в правой части (13) стремится к 0 в силу тех же условий теоремы [1].

Из вышеизложенного следует:

$$\alpha_T(t)=\frac{1}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int\limits_0^{tT}g(\xi(s))\,ds=\frac{\Phi(\xi(tT))}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}-\frac{T}{T^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int\limits_0^{tT}\Phi'(\xi(s))\times$$

$$\times\sigma(\xi(s))\,dw(s)+o(1), \tag{14}$$

где $o(1)$ — величина, стремящаяся к 0 при $T\to\infty$.

Из доказательства теоремы [1] следует, что для любой последовательности $T'_n\to\infty$ существует подпоследовательность $T_n\to\infty$ и процессы $\eta_{T_n}(t)$, $\overline{w}_{T_n}(t)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\eta_{T_n}(t)=\int\limits_0^t f'(\varphi(\eta_{T_n}(s)\sqrt{T_n}))\,\sigma(\varphi(\eta_{T_n}(s)\sqrt{T_n}))\,d\overline{w}_{T_n}(s)+o(1),$$

здесь $\varphi(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

Конечномерные распределения процесса $(\eta_{T_n}(t),\ \overline{w}_{T_n}(t))$ совпадают с конечномерными распределениями процесса $(\zeta_{T_n}(t),\ w_{T_n}(t))$ и $\eta_{T_n}(t)\to\eta(t)$ по вероятности при $T_n\to\infty$, где процесс $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению (8).

Поскольку конечномерные распределения процессов $((\zeta_{T_n}(t), w_{T_n}(t))$ и $(\eta_{T_n}(t), \overline{w}_{T_n}(t))$ совпадают и соотношение (14) выполняется, то распределение случайной величины $\alpha_{T_n}(t)$ совпадает с распределением

$$T_n^{-\frac{\alpha+1}{2}} \Phi(\tilde{\eta}_{T_n}(t)) - T_n^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t \Phi'(\tilde{\eta}_{T_n}(s)) \sigma(\tilde{\eta}_{T_n}(s)) d\overline{w}_{T_n}(s) + o(1),$$

где
$$\tilde{\eta}_{T_n}(t) = \varphi(\eta_{T_n}(t) \sqrt{T_n}).$$

Далее доказательство сводится к случаю, рассмотренному в [3].

Замечание 1. В работе [1] допущена некорректность в формулировке теоремы, а именно: условие 2) должно иметь вид

$$\frac{1}{t} M \left(\int_0^t \sup_x \left| \frac{a(s,x) - a(x)}{\sigma(x)} \right| ds \right)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

$$M \sup_x \left| \frac{\sigma(t,x)}{\sigma(x)} - 1 \right|^2 \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty \quad \text{так, что}$$

$$\frac{1}{t} M \left(\int_0^t \sup_x \left| \frac{\sigma^2(s,x)}{\sigma^2(x)} - 1 \right| ds \right)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Замечание 2. Класс рассматриваемых функционалов можно расширить. В самом деле, если для функционалов вида

$$\int_0^t g(s, \xi(s)) ds,$$

где $g(s,x)$ — некоторая случайная функция, измеримая относительно семейства σ-алгебр F_t, $F_{t1} \subset F_{t2}$, $F_t \subset F$, имеет место утверждение, что для каждой функции $g(s,x)$ существует такая неслучайная функция $g(x)$, что выполняется неравенство

$$|g(s,x) - g(x)| \leqslant K(s),$$

и

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\int_0^{\gamma|x|} [f'(v)\sigma^2(v)]^{-1} g^2(v) dv}{\Psi(f(\gamma|x|))} = \begin{cases} \beta_1, & \gamma > 0 \\ \beta_2, & \gamma < 0 \end{cases},$$

где $\Psi(z)$ — регулярно меняющаяся функция порядка $\alpha \geqslant 0$, а

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^t K(s) ds = 0, \tag{15}$$

то распределение случайной величины

$$\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}} \int_0^t g(s, \xi(s)) ds$$

совпадает с распределением случайной величины

$$\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^t g(\xi(s))\,ds$$

и при $t\to\infty$ сходится к распределению случайной величины (6).

Доказательство этого утверждения не представляет трудностей:

$$\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^t g(s,\xi(s))\,ds=$$

$$=\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^t g(\xi(s))\,ds+\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^t [g(s,\xi(s))-g(\xi(s))]\,ds,$$

$$\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^t |g(s,\xi(s))-g(\xi(s))|\,ds\leqslant\frac{1}{t^{\frac{\alpha+1}{2}}}\int_0^t K(s)\,ds\to 0,\quad t\to\infty,$$

в силу (15).

Автор благодарит Г. Л. Кулинича за ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роос Е., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 353 (1974).
2. Роос Е., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 347 (1972).
3. Кулинич Г. Л., В сб.: Теория вероятн. и матем. статистика, вып. 8, Киев, 1973.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 13/V 1975

Jelena ROOS

STOHHASTILISE DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDITEST SÕLTUVATE INTEGRAALSET TÜÜPI FUNKTSIONAALIDE PIIRKÄIGUST

Artiklis vaadeldakse integraalset tüüpi funktsionaale $\int_0^t g(\xi(s))\,ds$, $\int_0^t g(s,\xi(s))\,ds$, kus $\xi(t)$ on stohhastilise diferentsiaalvõrrandi $d\xi(t)=a(t,\xi(t))dt+\sigma(t,\xi(t))dw(t)$ lahend ja $g(x)$ on mõni funktsioon; on uuritud nende funktsionaalide piirjaotuse käitumist.

Yelena ROOS

ON THE LIMIT BEHAVIOUR OF THE INTEGRAL TYPE FUNCTIONALS FROM THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

In the present paper the class of limit distributions for the functionals $\int_0^t g(\xi(s))\,ds$, $\int_0^t g(s,\xi(s))\,ds$ is described when $t\to\infty$. The process $\xi(t)$ is the solution of the stochastic differential equation $d\xi(t)=a(t,\xi(t))dt+\sigma(t,\xi(t))dw(t)$ and $g(x)$ is some function.