

В. РЕДИ, Л. ТУВИКЕНЕ

О ВЗАИМОСВЯЗИ АПОДИЗАЦИИ И РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Ослабление побочных максимумов (аподизация) в диффракционной картине, полученной для точечного источника света с помощью оптического прибора, исследовалось многими авторами (см., напр., [1, 2] и др.). В меньшей степени изучалось аналитически сужение центрального максимума, т. е. повышение разрешающей способности в обычном смысле. Взаимосвязь между обеими этими характеристиками остается до сих пор почти неизученной (не считая попыток в [1-3]).

В данной работе мы применим для выяснения взаимосвязи между названными характеристиками свойства амплитудно-фазовых фильтров.

Известно [2], что если круглое входное отверстие (с радиусом $a = 1$) оптического прибора закрыто n -компонентным амплитудным фильтром, то распределение амплитуды $u(v)$ в фокальной диффракционной картине точечного источника света выражается формулой

$$u(v) = (c_1 - c_2)a_1 \frac{J_1(a_1 v)}{v} + (c_2 - c_3)a_2 \frac{J_1(a_2 v)}{v} + \dots + (c_{n-1} - c_n)a_{n-1} \frac{J_1(a_{n-1} v)}{v} + c_n \frac{J_1(v)}{v}, \quad (1)$$

где $v = k\alpha$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ — длина волны; α — расстояние точки в фокальной диффракционной картине от ее центра; $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_{n-1}, c_n, c_{n+1} = 0$ — амплитудные коэффициенты пропускания компонентов фильтра; $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_{n-1}, a_n = a = 1$ — радиусы концентрических окружностей, разделяющих компоненты фильтра; J_1 — функция Бесселя первого порядка.

Распределение интенсивности в диффракционной картине дается формулой

$$I(v) = u(v)u^*(v). \quad (2)$$

Потребуем, чтобы в зонах диффракционной картины $v = v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ свет гасился полностью, т. е. чтобы

$$\begin{aligned} u(v_1) &= 0 \\ u(v_2) &= 0 \\ &\vdots \\ u(v_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Эти равенства образуют систему трансцендентных уравнений для тех значений величин (c_i, a_i) , при которых поставленное условие выполняется.

Напомним, что при отсутствии фильтра распределение интенсивности в диффракционной картине имеет вид $I_0 = \frac{J_1^2(v)}{v^2}$, откуда следует, что первый минимум находится при $v = 3,82$, а побочные максимумы при $v_I = 5,14$; $v_{II} = 8,42$. Следовательно, если положим в (3) $0 < v_1, v_2, \dots, v_{n-1} < 3,82$, то будем иметь сужение центрального максимума, а если возьмем $v_1 = v_I, v_2 = v_{II}$, то получим аподизацию.

Приведем далее относительные характеристики фильтров:

1) зональные дисперсионные коэффициенты D_{2-4}^r, D_{5-9}^r и др., определяемые формулой

$$D_{v'-v}^r = \frac{\int_{v'}^{v''} I(v) v dv / \int_0^\infty I(v) v dv}{\int_{v'}^{v''} I_0(v) v dv / \int_0^\infty I_0(v) v dv}; \quad (4)$$

2) полный энергетический коэффициент пропускания τ согласно формуле

$$\tau = \frac{\int_0^\infty I(v) v dv}{\int_0^\infty I_0(v) v dv} = \sum_i c_i^2 (a_i^2 - a_{i-1}^2); \quad (5)$$

3) интенсивность в фокусе $\frac{I(0)}{I_0(0)}$.

В случае двухкомпонентного фильтра система (3) сводится к одному уравнению. Если вместо амплитуды приравняем нулю интенсивность, то получим

$$I(c, a, v_i) = c^2 \left[(1-c)^2 a^2 \frac{J_1^2(av)}{v^2} + 2c(1-c)a \frac{J_1(v)J_1(av)}{v^2} + c^2 \frac{J_1^2(v)}{v^2} \right] \Big|_{v=v_i} = 0, \quad (6)$$

где $c = \frac{c_2}{c_1}$, $a = a_1$.

Графический метод решения уравнения (6) позволяет легко найти фильтры с оптимальными параметрами (c, a) , дающими в диффракционной картине нулевую интенсивность в различных зонах $v = v_i$. На рис. 1 показаны линии нулевой интенсивности (ЛНИ) $I(c, a, v_i) = 0$ на плоскости (c, a) . ЛНИ при $v_i = 6; 7$ и 8 пересекаются в точке $c = 0,31$; $a_1 = 0,55$. В области $5 \leq v \leq 9$ диффракционной картины с помощью такого двухкомпонентного амплитудного фильтра достигается значительная аподизация. На рис. 2 показана сетка линий постоянной дисперсии $D_{v'-v}^r = \text{const}$, позволяющая оценить величину аподизации. Мы видим, что фильтр $c = 0,31$, $a_1 = 0,55$ дает сильную аподизацию $D_{5-9}^r \approx 0,03$; но вместе с тем $D_{2-4}^r = 1,7$. Согласно рис. 3 находим еще

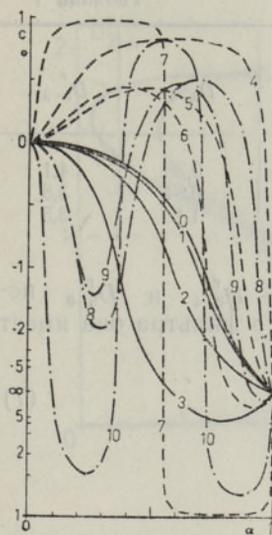


Рис. 1.

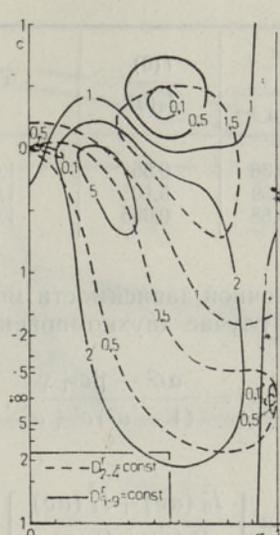


Рис. 2.

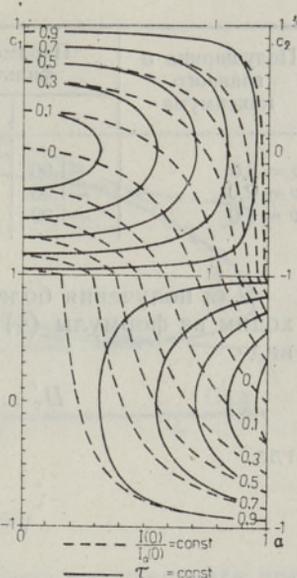


Рис. 3.

$\tau = 0,37$ и $\frac{I(0)}{I_0(0)} = 0,28$. Аналогичными свойствами обладает амплитуд-

ный фильтр с параметрами $c = 0,42$; $a = 0,55$. Характерно, что ЛНИ при $v_i = 5; 6; 7; 8; 9; 10$, т. е. в области побочных максимумов, пересекаются друг с другом, а ЛНИ при $v_i = 0; 1; 2; 3$, т. е. в области центрального максимума, — не пересекаются (см. рис. 1). Поэтому невозможно с помощью двухкомпонентных фильтров получить в области центрального максимума более одной зоны нулевой интенсивности. Все ЛНИ в области центрального максимума достигаются при $c < 0$. Такой фильтр называется амплитудно-фазовым. Компонент с $c < 0$ в таком фильтре изменяет не только амплитуду, но и фазу света на π . Из рис. 1 также видно, что ЛНИ при $v_i < 3,8$ пересекаются с ЛНИ в области побочных максимумов $5 \leq v_i \leq 9$. Это означает, что амплитудно-фазовый фильтр, например, с параметрами $c = -0,81$; $a = 0,55$ дает нулевую интенсивность как в области побочных максимумов, так и в области главного максимума. Это, однако, еще не означает, что одновременно подавляются побочные максимумы и сужается главный максимум. Здесь мы имеем всего лишь кажущуюся аподизацию, так как $D_{5-9}^r > 1$, т. е. в области конечной ширины аподизации не происходит, наоборот, интенсивность увеличивается. Но главный максимум сужен и $D_{2-4}^r < 1$.

Полученные результаты, дополненные данными табл. 1, выражают характерные черты взаимосвязи между сужением центрального максимума и аподизацией.

Из табл. 1 следует, например, что при сужении центрального максимума в 1,3 раза коэффициент дисперсии D_{2-4}^r уменьшается примерно в 3 раза, но D_{5-9}^r одновременно увеличивается примерно в 4 раза. Если же центральный максимум сужен в 2 раза, то D_{2-4}^r уменьшается примерно в 1,2 раза, а D_{5-9}^r увеличивается в 3,8 раза.

Таблица 1

Полуширина d главного максимума	Параметры фильтра		$\frac{I(0)}{I_0(0)}$	τ	D_{2-4}^r	D_{5-9}^r
	c	a				
$v = 3,0$	-1,00	0,36	0,56	1,0	0,38	4,1
$v = 2,0$	-1,00	0,59	0,10	1,0	0,84	3,8
$v = 1,0$	-1,00	0,68	0,005	1,0	1,1	3,5

Для получения более точной зависимости между D_{2-4}^r и D_{5-9}^r ис- ходим из формулы (4). В случае двухкомпонентного фильтра она имеет вид

$$D_{v'-v''}^r(c, a) = \frac{ac^2 - \beta c + \gamma}{(1 - a^2)c^2 + a^2}, \quad (7)$$

где

$$\gamma = -a^2 \left[\frac{J_0^2(av) + J_1^2(av)}{J_0^2(v) + J_1^2(v)} \right] v'', \quad (8)$$

$$\beta = 2\gamma + \left\{ \frac{4}{v[J_0^2(v) + J_1^2(v)]} \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1} J_{i+1}(av) J_i(v) \right\} v'',$$

$$a = 1 + \beta - \gamma.$$

Согласно формуле (7) напомним выражения дисперсионных коэффи- циентов для зон 2—4 и 5—9, обозначив их через D_1 и D_2 :

$$D_{2-4}^r(c, a) = D_1; \quad D_{5-9}^r(c, a) = D_2. \quad (9)$$

Исключая из этих равенств c , получим формулу, связывающую D_1 и D_2 , в виде уравнения эллипса:

$$a_{11}D_2^2 + 2a_{12}D_1D_2 + a_{22}D_1^2 + 2a_{13}D_2 + 2a_{23}D_1 + a_{33} = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\alpha_1 s - \gamma_1 z)^2 + \beta_1^2 s z, \\ a_{12} &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2 - 1) s z - \alpha_1 \alpha_2 s - \gamma_1 \gamma_2 z, \\ a_{22} &= (\alpha_2 s - \gamma_2 z)^2 + \beta_2^2 s z, \end{aligned} \quad (11)$$

$$a_{13} = (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) (\alpha_1 s - \gamma_1 z) + \frac{\beta_1 \beta_2}{2} (\alpha_1 s + \gamma_1 z) - \frac{\beta_1^2}{2} (\alpha_2 s + \gamma_2 z),$$

$$a_{23} = (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) (\gamma_2 z - \alpha_2 s) + \frac{\beta_1 \beta_2}{2} (\alpha_2 s + \gamma_2 z) - \frac{\beta_2^2}{2} (\alpha_1 s + \gamma_1 z),$$

$$a_{33} = (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2)^2 - \beta_1 \beta_2 (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) + \alpha_2 \beta_1^2 \gamma_2 + \alpha_1 \beta_2^2 \gamma_1$$

$$(s = a^2; \quad z = 1 - a^2).$$

На рис. 4 приведены эллипсы для некоторых значений a . Совокуп- ность всех возможных эллипсов определена в четырех областях:

- 1) $D_{2-4}^r < 1$ и $D_{5-9}^r > 1$; 2) $D_{2-4}^r > 1$ и $D_{5-9}^r < 1$;
- 3) $D_{2-4}^r < 1$ и $D_{5-9}^r < 1$; 4) $D_{2-4}^r > 1$ и $D_{5-9}^r > 1$.

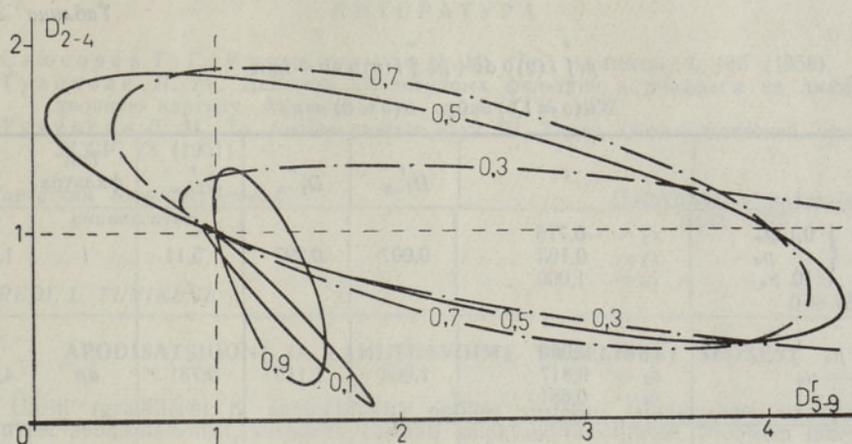


Рис. 4.

Точкам каждого эллипса соответствуют значения коэффициента пропускания c . Зависимость между D_{2-4}^r и D_{5-9}^r , соответствующую случаям 1 и 2, назовем нормальной, а зависимость, соответствующую случаям 3 и 4, — аномальной. Нормальная и аномальная зависимости изображаются на рис. 4 соответствующими дугами эллипсов. Если расширить зону побочных максимумов и вместо 5—9 взять 5— ∞ (или 3— ∞), то зависимость между D_{2-4}^r и $D_{5-\infty}^r$ может стать нормальной. Для доказательства последнего утверждения обобщим метод нулевых зон интенсивности (формулы (3) и (6)). Вместо условия (3) потребуем минимума интегральной интенсивности дифракционной картины от v' до v'' :

$$\int_{v'}^{v''} I(v) v dv = \min \quad (12)$$

$$\text{при } u(v=v_0) = u_0. \quad (13)$$

Сформулируем условие минимума вместо (12) в более общей форме:

$$p_l \cdot \int_{v_0'}^{v_0''} I(v) v dv + p_a \cdot \int_{v'}^{v''} I(v) v dv = \min, \quad (14)$$

где первый интеграл означает интегральную интенсивность дифракционной картины в области центрального максимума от v_0' до v_0'' , а второй — в области побочных максимумов от v' до v'' ; p_l и p_a — некоторые численные множители.

В табл. 2 приведены для различных значений p_l и p_a (и различных форм условия (13)) значения коэффициентов пропускания c_i трехкомпонентного фильтра, минимизирующие выражение (14). Там же приведены значения других характеристик. Значения радиусов компонент приняты равными $a_1 = 0,577$; $a_2 = 0,816$; $a_3 = 1,000$, а пределы интегралов положены $v_0' = 1$; $v_0'' = 2$; $v' = 3$; $v'' = \infty$.

Из табл. 2 видно, что при дополнительном условии в виде $u(v = 1,5) = 0$ полуширина d центрального максимума не зависит от отношения $\frac{p_l}{p_a}$ (в пределах от 0,1 до 10). Без этого условия получа-

Таблица 2

$$p_l \int_1^2 I(v) v dv + p_a \int_3^\infty I(v) v dv = \min$$

$$u(v=1,5) = 0; \quad u(v=0) = u_0$$

	c_i	D_{1-2}^r	D_{2-3}^r	$D_{3-\infty}^r$	Тип фильтра	d
$p_l = \begin{cases} 0,1 & p_a \\ & p_a \\ & 10 & p_a \end{cases}$ $u(1,5) = 0$	$c_1 = -0,775$ $c_2 = 0,163$ $c_3 = 1,000$	0,007	0,297	5,11	l	1,50
$p_l = p_a$ $u(0) = u_0$	$c_1 = 1,000$ $c_2 = 0,817$ $c_3 = 0,681$	1,063	1,119	0,731	ap	4,13
$p_l = 10 p_a$ $u(0) = u_0$	$c_1 = 0,230$ $c_2 = 0,632$ $c_3 = 1,000$	0,654	0,721	2,332	l	3,16
$p_l = 100 p_a$ $u(0) = u_0$	$c_1 = -0,576$ $c_2 = 0,251$ $c_3 = 1,000$	0,030	0,153	5,157	l	1,97
$p_l \gg p_a$ $u(0) = u_0$	$c_1 = 0,389$ $c_2 = 0,240$ $c_3 = -1,000$	0,029	0,136	5,253	l	1,64
$p_l \ll p_a$ $u(0) = u_0$	$c_1 = 1,000$ $c_2 = 0,745$ $c_3 = 0,544$	1,061	1,279	0,671	ap	4,31

l — фильтр, сужающий центральный максимум,
 ap — аподизирующий фильтр,
 d — полуширина центрального максимума.

ются: 1) при $\frac{p_l}{p_a} = 0; 1$ — аподизирующие фильтры, у которых

$D_{3-\infty}^r < 1$ ($D_{1-2}^r > 1$; $D_{2-3}^r > 1$) и $d > 3,8$; 2) при $\frac{p_l}{p_a} = 10; 100; \infty$ —

фильтры, сужающие центральный максимум, у которых $D_{1-2}^r < 1$;

$D_{2-3}^r < 1$ ($D_{3-\infty}^r > 1$) и $d < 3,8$.

Таким образом, мы показали, что взаимосвязь между D_{1-2}^r (также D_{2-3}^r) и $D_{3-\infty}^r$ является нормальной. Влияние амплитудного фильтра на дифракционную картину круглого отверстия может быть двух типов: 1) либо происходит аподизация с одновременным уширением центрального максимума, 2) либо происходит сужение центрального максимума с одновременным возрастанием побочного максимума.

