EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÕIDE FUUSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25 ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 1

УДК 535.8 В. РЕДИ, Л. ТУВИКЕНЕ

О ВЗАИМОСВЯЗИ АПОДИЗАЦИИ И РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Ослабление побочных максимумов (аподизация) в диффракционной картине, полученной для точечного источника света с помощью оптического прибора, исследовалось многими авторами (см., напр., [1, 2] и др.). В меньшей степени изучалось аналитически сужение центрального максимума, т. е. повышение разрешающей способности в обычном смысле. Взаимосвязь между обеими этими характеристиками остается до сих пор почти неизученной (не считая попыток в [1-3]).

В данной работе мы применим для выяснения взаимосвязи между названными характеристиками свойства амплитудно-фазовых фильтров.

Известно [²], что если круглое входное отверстие (с радиусом a = 1) оптического прибора закрыто п-компонентным амплитудным фильтром, то распределение амплитуды u(v) в фокальной диффракционной картине точечного источника света выражается формулой

$$u(v) = (c_1 - c_2)a_1 \frac{J_1(a_1v)}{v} + (c_2 - c_3)a_2 \frac{J_1(a_2v)}{v} + \dots + (c_{n-1} - c_n)a_{n-1} \frac{J_1(a_{n-1}v)}{v} + c_n \frac{J_1(v)}{v},$$
(1)

где $v = k\alpha; k = \frac{2\pi}{\lambda}; \lambda$ — длина волны; α — расстояние точки в фо-

кальной диффракционной картине от ее центра; c1, c2, ..., ci, ..., cn-1, c_n, c_{n+1} = 0 — амплитудные коэффициенты пропускания компонентов фильтра; $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_{n-1}, a_n = a = 1$ — радиусы концентрических окружностей, разделяющих компоненты фильтра; J1 — функция Бесселя первого порядка.

Распределение интенсивности в диффракционной картине дается формулой

$$I(v) = u(v)u^{*}(v).$$
(2)

Потребуем, чтобы в зонах диффракционной картины $v = v_1, v_2, \ldots,$ *v*_{n−1} свет гасился полностью, т. е. чтобы

$u(v_1) \\ u(v_2)$	=0 = 0			(3)
arninga	BORBING			
194. 8				
$u(v_{n-1})$) = 0.			

Эти равенства образуют систему трансцендентных уравнений для тех значений величин (*c_i*, *a_i*), при которых поставленное vсловие выполняется.

Напомним, что при отсутствии фильтра распределение интенсивности в диффракционной картине имеет вид $I_0 = \frac{J_1^2(v)}{v^2}$, откуда следует, что первый минимум находится при v = 3,82, а побочные максимумы при $v_I = 5,14$; $v_{II} = 8,42$. Следовательно, если положим в (3) $0 < v_1$, $v_2, \ldots, v_{n-1} < 3,82$, то будем иметь сужение центрального максимума, а если возьмем $v_1 = v_I$, $v_2 = v_{II}$, то получим аподизацию.

Приведем далее относительные характеристики фильтров:

1) зональные дисперсионные коэффициенты D_{2-4}^r , D_{5-9}^r и др., определяемые формулой

$$D_{v'-v''}^{r} = \frac{\int_{v'}^{v''} I(v) v \, dv / \int_{0}^{\infty} I(v) v \, dv}{\int_{v'}^{v''} I_{0}(v) v \, dv / \int_{0}^{\infty} I_{0}(v) v \, dv};$$
(4)

 полный энергетический коэффициент пропускания т согласно формуле

$$\tau = \frac{\int_{0}^{\infty} I(v) v \, dv}{\int_{0}^{\infty} I_{0}(v) v \, dv} = \sum_{i} c_{i}^{2} (a_{i}^{2} - a_{i-1}^{2});$$
(5)

3) интенсивность в фокусе $\frac{I(0)}{I_0(0)}$

В случае двухкомпонентного фильтра система (3) сводится к одному уравнению. Если вместо амплитуды приравняем нулю интенсивность, то получим

$$I(c, a, v_i) = c_1^2 \left[(1-c)^2 a^2 \frac{J_1^2(av)}{v^2} + 2c(1-c)a \frac{J_1(v)J_1(av)}{v^2} + c^2 \frac{J_1^2(v)}{v^2} \right] \Big|_{v=v_t} = 0, \quad (6)$$

где $c = \frac{c_2}{c_1}$, $a = a_1$.

Графический метод решения уравнения (6) позволяет легко найти фильтры с оптимальными параметрами (c, a), дающими в диффракционной картине нулевую интенсивность в различных зонах $v = v_i$. На рис. 1 показаны линии нулевой интенсивности (ЛНИ) $I(c, a, v_i) = 0$ на плоскости (c, a). ЛНИ при $v_i = 6$; 7 и 8 пересекаются в точке c = 0,31; $a_1 = 0,55$. В области $5 \le v \le 9$ диффракционной картины с помощью такого двухкомпонентного амплитудного фильтра достигается значительная аподизация. На рис. 2 показана сетка линий постоянной дисперсии $D_{v'-v''}^r = \text{const}$, позволяющая оценить величину аподизации. Мы видим, что фильтр c = 0,31, $a_1 = 0,55$ дает сильную аподизацию $D_{5-9} \approx$ $\approx 0,03$; но вместе с тем $D_{2-4}^r = 1,7$. Согласно рис. 3 находим еще

40

О взаимосвязи аподизации и...



 $\tau = 0,37$ и $\frac{I(0)}{I_0(0)} = 0,28$. Аналогичными свойствами обладает амплитуд-

ный фильтр с параметрами c = 0,42; a = 0,55. Характерно, что ЛНИ при $v_i = 5$; 6; 7; 8; 9; 10, т. е. в области побочных максимумов, пересекаются друг с другом, а ЛНИ при $v_i = 0$; 1; 2; 3, т. е. в области центрального максимума, — не пересекаются (см. рис. 1). Поэтому невозможно с помощью двухкомпонентных фильтров получить в области центрального максимума более одной зоны нулевой интенсивности. Все ЛНИ в области центрального максимумов, амплитудно-фазовым. Компонент с c < 0 в таком фильтр изменяет не только амплитуду, но и фазу света на π . Из рис. 1 также видно, что ЛНИ при $v_i < 3,8$ пересекаются с ЛНИ в области побочных максимумов $5 \leq v_i \leq 9$. Это означает, что амплитудно-фазовый фильтр, например, с параметрами c = -0,81; a = 0,55 дает нулевую интенсивность как в области побочных максимума. Это, однако, еще не означает, что одновременно подавляются побочные максимумы и сужается главный максимум. Здесь

мы имеем всего лишь кажущуюся аподизацию, так как $D_{5-9}^r > 1$, т. е. в области конечной ширины аподизации не происходит, наоборот, интенсивность увеличивается. Но главный максимум сужен и $D_{2-4}^r < 1$.

Полученные результаты, дополненные данными табл. 1, выражают характерные черты взаимосвязи между сужением центрального максимума и аподизацией.

Из табл. 1 следует, например, что при сужении центрального максимума в 1,3 раза коэффициент дисперсии D_{2-4}^r уменьшается примерно в 3 раза, но D_{5-9}^r одновременно увеличивается примерно в 4 раза. Если же центральный максимум сужен в 2 раза, то D_{2-4}^r уменьшается примерно в 1,2 раза, а D_{5-9}^r увеличивается в 3,8 раза.

41

В. Реди, Л. Тувикене

. 3m manon	tina cola		ACTENV TRA		Таблица 1		
Полуширина d главного	Параметры фильтра		<u>I(0)</u>	τ	Dr.	Dr a	
максимума	c	a	<i>I</i> ₀ (0)	S Pacipp	D2-4	25-9	
v = 3.0 v = 2.0 r = 1.0	-1,00 -1,00	0,36 0,59	0,56 0,10 0.005	1,0 1,0	0,38 0,84	4,1 3,8	
v = 1,0	-1,00	0,08	0,005	1,0	1,1	3,0	

Для получения более точной зависимости между D_{2-4}^r и D_{5-9}^r исходим из формулы (4). В случае двухкомпонентного фильтра она имеет вид

$$D_{v'-v''}^{r}(c,a) = \frac{ac^2 - \beta c + \gamma}{(1-a^2)c^2 + a^2},$$
(7)

(8)

где

$$= -a^{2} \left[\frac{J_{0}^{2}(av) + J_{1}^{2}(av)}{J_{0}^{2}(v) + J_{1}^{2}(v)} \right]_{v'}^{v''},$$

Y

$$\beta = 2\gamma + \left\{ \frac{4}{v [J_0^2(v) + J_1^2(v)]} \sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1} J_{i+1}(av) J_i(v) \right\}_{v'}^{v''}$$

$$\alpha = 1 + \beta - \gamma.$$

Согласно формуле (7) напишем выражения дисперсионных коэффициентов для зон 2—4 и 5—9, обозначив их через D_1 и D_2 :

$$D_{2-4}^{r}(c,a) = D_{1}; \quad D_{5-9}^{r}(c,a) = D_{2}.$$
 (9)

Исключая из этих равенств *c*, получим формулу, связывающую *D*₁ и *D*₂, в виде уравнения эллипса:

$$a_{11}D_2^2 + 2a_{12}D_1D_2 + a_{22}D_1^2 + 2a_{13}D_2 + 2a_{23}D_1 + a_{33} = 0,$$
(10)

где

$$a_{11} = (a_1 s - \gamma_1 z)^2 + \beta_1^2 sz,$$

$$a_{12} = (a_1 + a_2 + \gamma_1 + \gamma_2 - 1) sz - a_1 a_2 s - \gamma_1 \gamma_2 z,$$

$$a_{22} = (a_2 s - \gamma_2 z)^2 + \beta_2^2 sz,$$

(11)

$$a_{13} = (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) (\alpha_1 s - \gamma_1 z) + \frac{\beta_1 \beta_2}{2} (\alpha_1 s + \gamma_1 z) - \frac{\beta_1^2}{2} (\alpha_2 s + \gamma_2 z),$$

$$a_{23} = (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) (\gamma_2 z - \alpha_2 s) + \frac{\beta_1 \beta_2}{2} (\alpha_2 s + \gamma_2 z) - \frac{\beta_2^2}{2} (\alpha_1 s + \gamma_1 z),$$

$$a_{33} = (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2)^2 - \beta_1 \beta_2 (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) + \alpha_2 \beta_1^2 \gamma_2 + \alpha_1 \beta_2^2 \gamma_1$$

$$(s = \alpha^2; z = 1 - \alpha^2)$$

На рис. 4 приведены эллипсы для некоторых значений а. Совокупность всех возможных эллипсов определена в четырех областях:

1) $D_{2-4}^{r} < 1$ и $D_{5-9}^{r} > 1$; 2) $D_{2-4}^{r} > 1$ и $D_{5-9}^{r} < 1$; 3) $D_{2-4}^{r} < 1$ и $D_{5-9}^{r} < 1$; 4) $D_{2-4}^{r} > 1$ и $D_{5-9}^{r} > 1$.





Точкам каждого эллипса соответствуют значения коэффициента пропускания с. Зависимость между D_{2-4}^r и D_{5-9}^r , соответствующую случаям 1 и 2, назовем нормальной, а зависимость, соответствующую случаям 3 и 4, — аномальной. Нормальная и аномальная зависимости изображаются на рис. 4 соответствующими дугами эллипсов. Если расширить зону побочных максимумов и вместо 5—9 взять 5— ∞ (или 3— ∞), то зависимость между D_{2-4}^r и $D_{5-\infty}^r$ может стать нормальной. Для доказательства последнего утверждения обобщим метод нулевых зон интенсивности (формулы (3) и (6)). Вместо условия (3) потребуем минимума интегральной интенсивности диффракционной картины от v' до v'':

$$\int_{-\infty}^{v^{*}} I(v) v \, \mathrm{d}v = \min \tag{12}$$

при
$$u(v=v_0)=u_0.$$
 (13)

Сформулируем условие минимума вместо (12) в более общей форме:

$$p_{l} \cdot \int_{v_{0}'}^{v_{0}''} I(v) v \, \mathrm{d}v + p_{a} \cdot \int_{v'}^{v''} I(v) v \, \mathrm{d}v = \min,$$
(14)

где первый интеграл означает интегральную интенсивность диффракционной картины в области центрального максимума от v_0' до v_0'' , а второй — в области побочных максимумов от v' до v''; p_l и p_a — некоторые численные множители.

В табл. 2 приведены для различных значений p_l и p_a (и различных форм условия (13)) значения коэффициентов пропускания c_i трехкомпонентного фильтра, минимизирующие выражение (14). Там же приведены значения других характеристик. Значения радиусов компонент приняты равными $a_1 = 0.577$; $a_2 = 0.816$; $a_3 = 1,000$, а пределы интегралов положены $v_0' = 1$; $v_0'' = 2$; v' = 3; $v'' = \infty$.

Из табл. 2 видно, что при дополнительном условии в виде u(v = 1,5) = 0 полуширина d центрального максимума не зависит от отношения $\frac{p_l}{p_a}$ (в пределах от 0,1 до 10). Без этого условия получа-

43

Таблица 2

$u(v=1,5) = 0; u(v=0) = u_0$							
	Ci	D_{1-2}^{r}	D_{2-3}^{r}	$D_{3-\infty}^r$	Тип фильтра	d	
$p_{l} = \begin{cases} 0,1 \ p_{a} \\ p_{a} \\ 10 \ p_{a} \\ u(1,5) = 0 \end{cases}$	$\begin{array}{c} c_1 = -0,775\\ c_2 = 0,163\\ c_3 = 1,000 \end{array}$	0,007	0,297	5,11	l	1,50	
$p_l = p_a$ $u(0) = u_0$	$\begin{array}{rcl} c_1 = & 1.000 \\ c_2 = & 0.817 \\ c_3 = & 0.681 \end{array}$	1,063	1,119	0,731	ар	4,13	
$p_l = 10 p_a$ $u(0) = u_0$	$\begin{vmatrix} c_1 = & 0,230 \\ c_2 = & 0,632 \\ c_3 = & 1,000 \end{vmatrix}$	0,654	0,721	2,332	t	3,16	
$p_l = 100 p_a$ $u(0) = u_0$	$\begin{vmatrix} c_1 = -0,576 \\ c_2 = 0,251 \\ c_3 = 1,000 \end{vmatrix}$	0,030	0,153	5,137	I	1,97	
$p_l \gg p_a$ $u(0) = u_0$	$c_1 = 0,389 c_2 = 0,240 c_3 = -1,000$	0,029	0,136	5,253	1	1,64	
$p_l \ll p_a$ $u(0) = u_0$	$\begin{array}{rrrr} c_1 = & 1,000 \\ c_2 = & 0,745 \\ c_3 = & 0,544 \end{array}$	1,061	1,279	0,671	ар	4,31	

1 — фильтр, сужающий центральный максимум, ар — аподизирующий фильтр,

d — полуширина центрального максимума.

ются: 1) при $\frac{p_l}{p_a} = 0; 1 - аподизирующие фильтры, у которых$ $D_{3-\infty}^r < 1$ ($D_{1-2}^r > 1$; $D_{2-3}^r > 1$) и d > 3,8; 2) при $\frac{p_l}{p_a} = 10$; 100; ∞ —

фильтры, сужающие центральный максимум, у которых $D_{1-2}^r < 1;$

$$D_{2-3}^r < 1$$
 ($D_{3-\infty}^r > 1$) и $d < 3,8$.

Таким образом, мы показали, что взаимосвязь между D_{1-2}^r (также D_{2-3}^{\prime}) и $D_{3-\infty}^{\prime}$ является нормальной. Влияние амплитудного фильтра на диффракционную картину круглого отверстия может быть двух типов: 1) либо происходит аподизация с одновременным уширением центрального максимума, 2) либо происходит сужение центрального максимума с одновременным возрастанием побочного максимума.

ЛИТЕРАТУРА

- Слюсарев Г. Г., Куликовская Н. И., Опт. и спектр., 4, 486 (1958).
 Тувикене Л. М., Действие амплитудных фильтров и диафрагм на диффракционную картину, Автореф. канд. дисс., ТГУ, 1962.
 Тувикене Л. М., Тр. секции точных наук VI, Тарту, О-во естествоисп. при АН ЭССР, 73 (1971).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 28/IV 1975

V. REDI, L. TUVIKENE

APODISATSIOONI JA LAHUTUSVÕIME VAHELISEST SEOSEST

Uuriti (graafiliselt ja analüütiliselt) optilise süsteemi lahutusvõime suurenemise sõltuvust apodisatsioonist, kusjuures kasutati amplituud-faasifiltreid. Probleem lahendati optilise kujutise tsonaalse energia minimeerimise meetodil.

V. REDI, L. TUVIKENE

ON THE INTERRELATIONSHIP BETWEEN APODISATION AND RESOLUTION

and the manufacture of the second of the second of the

The paper deals with the problem of magnifying the resolution of an optical system, depending on apodisation. The dependence has been studied graphically and analytically, applying phase-amplitude filters. The problem has also been solved as a minimum task.