

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.1.11>

УДК 621.43.011 : 533 + 621.5 : 533

А. ЭПШТЕИН

## О ВОЗМОЖНОСТИ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ СТРУИ В ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ВИХРЕВОЙ ПАРЫ

Несмотря на большое практическое значение проблемы развития турбулентной струи в сносящем потоке, ее теоретические исследования сводились до сих пор к созданию методов расчета траектории и интегральных характеристик (средних или максимальных значений скорости и температуры) такой струи [1-5]. Что касается расчета распределений основных параметров внутри струи, то известна лишь одна попытка такого рода, относящаяся к плоско-параллельному течению [6]. Решение проблемы тормозит чрезвычайная сложность данного течения, обусловленная, во-первых, его существенной трехмерностью (для пространственной струи) и криволинейностью, что затрудняет соответствующие расчеты даже с помощью современных ЭЦВМ, и, во-вторых, эффектами взаимодействия внешнего потока со струей, что затрудняет формулировку соответствующих граничных условий. Некоторые соображения по этому вопросу были высказаны нами в [5, 7].

В настоящей работе сделана попытка исследования возможностей теоретического подхода к решению данной задачи путем анализа и оценки порядка величины отдельных членов основных дифференциальных уравнений, описывающих процесс развития струи в поперечном потоке.

Рассмотрим систему уравнений неразрывности (1), движения (в проекциях на координатные оси) (2) — (4) и переноса тепла (5) для слабо-неизотермической струи несжимаемой жидкости в ортогональной криволинейной системе координат  $\xi, \eta, \zeta$  (эти и все остальные уравнения приведены в таблице). Члены, учитывающие молекулярный перенос импульса и тепла в (1) — (5) опущены, так как они предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с соответствующими турбулентными членами.

Рассмотрим, например, струю, вытекающую вертикально в горизонтальный сносящий поток. По характеру развития такая струя может быть условно разделена на следующие три зоны: 1) почти вертикального движения, 2) наибольшей кривизны, 3) почти горизонтального движения (рисунок).

Зона 1 фактически соответствует режиму смешения, в котором механизм вовлечения в струю тот же, что и в обычных струйных течениях (назван в [5] режимом эжекции). Практически эта зона существует лишь в струях с достаточно большим отношением скоростей  $v_0/w$ .

В зоне 2 механизм вовлечения претерпевает существенные изменения. На этом участке у пространственной струи развивается в тыловой



ее части вторичное течение в виде пары симметричных противоположно вращающихся вихрей. Однако, как явствует из опытных данных [8], распределения основных параметров внутри струи в этой зоне еще носят типично струйный характер, несмотря на заметное влияние вторичного

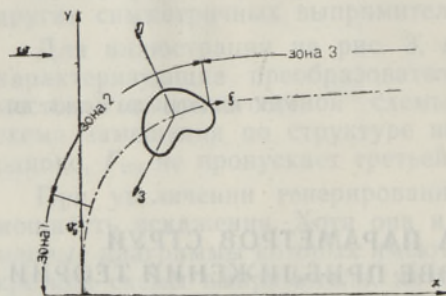


Схема струи в поперечном потоке

течения, выражающегося в сильной деформации первоначально осесимметричной струи. С другой стороны, скорость расширения струи здесь существенно увеличивается по сравнению с затопленной струей, причем в функции от отношения  $v_0/\omega$ , а за струей образуется след, аналогичный тому, который возникает при обтекании потоком твердого тела. Линии максимальной скорости и максимальной температуры на этом участке практически совпадают друг с другом.

В зоне 3 скорость расширения струи в функции от вертикальной координаты линии максимальной температуры еще более увеличивается; линии максимальной температуры и максимальной скорости расходятся, причем последняя становится практически недоступной для экспериментального определения из-за резкого выравнивания поля скорости. Различие между собственно струей и следом также практически исчезает. Распределение температуры в этой зоне отличается от типичных распределений струйного типа, но обнаруживает явную тенденцию к автомодельности [8].

Проанализируем уравнения (1)–(5) отдельно для каждой из трех зон. Для этого приведем указанные уравнения к безразмерному виду путем отнесения входящих в них переменных к некоторым характерным масштабным величинам. Масштабы выбираются такими, чтобы все безразмерные параметры оказались величинами одного порядка малости; порядок отдельных членов уравнений будет определяться тогда множителями, представляющими собой комбинации из масштабных величин. Вышеуказанное требование обеспечивается, в основном, если в качестве масштабов принимать во всех случаях следующие характеристики:

для  $\xi - l$ ,  
 „  $\eta, \zeta - b$ ,  
 „  $u_\xi - v$ ,  
 „  $u_\eta, u_\zeta - \omega_\eta$ ,

для  $T - T_c$ ,  
 „  $\partial p / \partial \xi - p_\xi / l$ ,  
 „  $\partial p / \partial \eta, \partial p / \partial \zeta - p_\eta / b$ ,  
 „  $u'_\xi, u'_\eta, u'_\zeta - v'$ .

Тогда приведенные к безразмерному виду уравнения (1)–(5) после группировки определенным образом масштабных величин принимают вид (6)–(10).

### Зона почти вертикального движения

В этой зоне можно принять  $l \approx y$ ,  $\omega_\eta \approx \omega$ . Следовательно, здесь  $m_2 = y/b$ ,  $m_3 = \omega/v_0$ .

Для оценки величины отдельных членов, входящих в уравнения (6)–(10), необходимо выяснить, как изменяются масштабные величины. В [5] показано, что на рассматриваемом участке траектория струи, ее средняя скорость и ширина описываются для изотермической или слабонеизотермической струи зависимостями (11)–(13).





1	2	3	4
$\frac{r}{r+\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + u_{\xi} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} =$ $= -\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{r}{r+\eta} \frac{\partial u_{\xi} u'_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\xi}}{\partial \eta}$	$+ m_7 \left[ \frac{\partial u'_{\xi} u'_{\eta}}{\partial \xi} + \left( \frac{m_2}{1+m_1 \eta_*} \right) \frac{\partial u'_{\xi} u'_{\eta}}{\partial \xi_*} \right]$		$\frac{m_2(1+m_3 \Delta u_{\xi_*})}{m_3(1+m_1 \eta_*)} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \xi_*} + u_{\eta_*} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \eta_*} + u_{\xi_*} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \xi_*} =$
$= -\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{r}{r+\eta} \frac{\partial u_{\xi} u'_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\xi}}{\partial \eta}$	$\left( \frac{1}{1+m_1 \eta_*} \right) m_3 u_{\xi_*} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \xi_*} +$		$= -\frac{m_5}{m_3^2} \frac{\partial p_*}{\partial \xi_*} + \frac{m_2}{m_3^2} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \xi_*} + \frac{m_7}{m_3^2} \left[ \frac{\partial u'_{\eta_*} u'_{\xi_*}}{\partial \eta_*} + \right.$
$\frac{r}{r+\eta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + u_{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} =$	$+ \frac{m_2}{m_2} \left( u_{\eta_*} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \eta_*} + u_{\xi_*} \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \xi_*} \right) =$	(9)	$+ \left( \frac{m_2}{1+m_1 \eta_*} \right) \frac{\partial u'_{\xi_*} u'_{\xi_*}}{\partial \xi_*} \left. \right]$
$= \frac{r}{r+\eta} \frac{\partial u_{\xi} T'}{\partial \xi} + \frac{\partial u'_{\eta} T'}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\xi} T'}{\partial \xi}$	$= -m_5 \frac{\partial p_*}{\partial \xi_*} + m_6 \frac{\partial u_{\xi_*}}{\partial \xi_*} +$		$\frac{\partial T_*}{\partial \xi_*} + u_{\eta_*} \frac{\partial T_*}{\partial \eta_*} + u_{\xi_*} \frac{\partial T_*}{\partial \xi_*} =$
	$+ m_7 \left[ \frac{\partial u'_{\eta_*} u'_{\xi_*}}{\partial \eta_*} + \left( \frac{m_2}{1+m_1 \eta_*} \right) \frac{\partial u'_{\xi_*} u'_{\xi_*}}{\partial \xi_*} \right]$		$= \frac{m_8}{m_3^2} \left[ \left( \frac{m_2}{1+m_1 \eta_*} \right) \frac{\partial u'_{\xi_*} T'}{\partial \xi_*} + \frac{\partial u'_{\eta_*} T'}{\partial \eta_*} + \right.$
	$\left( \frac{1}{1+m_1 \eta_*} \right) u_{\xi_*} \frac{\partial T_*}{\partial \xi_*} +$	(10)	$+ \frac{\partial u'_{\xi_*} T'}{\partial \xi_*} \left. \right]$
	$+ \frac{m_3}{m_2} \left( u_{\eta_*} \frac{\partial T_*}{\partial \eta_*} + u_{\xi_*} \frac{\partial T_*}{\partial \xi_*} \right) =$		
	$= m_8 \left[ \left( \frac{m_2}{1+m_1 \eta_*} \right) \frac{\partial u'_{\xi_*} T'}{\partial \xi_*} + \frac{\partial u'_{\eta_*} T'}{\partial \eta_*} + \frac{\partial u'_{\xi_*} T'}{\partial \xi_*} \right]$		

1	2	3	4
<p><b>Масштабные коэффициенты</b></p> $m_1 = b/r, m_2 = b/l, m_3 = w/v,$ $m_4 = p_0/Qu^2, m_5 = p_0/Qu^2, m_6 = v^2/v^2,$ $m_7 = R_0 v^2/v^2, m_8 = R_T v^2/v^2 T_0$	$\frac{x}{D_0} = \kappa \left( \frac{v_0}{w} \right) \left[ \operatorname{ch} \kappa \left( \frac{w}{v_0} \right) \left( \frac{y}{D_0} \right) - 1 \right] \quad (11)$ $\frac{v}{v_0} = \frac{w/v_0}{\operatorname{th} \kappa \left( \frac{w}{v_0} \right) \left( \frac{y}{D_0} \right)} \quad (12)$	<p><b>Основные соотношения между характеристными параметрами</b></p> $\frac{x}{D_0} = \frac{1}{k} \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \left( \frac{y}{D_0} \right)^3 + \operatorname{ctg} \alpha'_0 \left( \frac{y}{D_0} \right) \quad (21)$ $\frac{v}{v_0} = \frac{\pi}{4c} \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \left( \frac{y}{D_0} \right)^2 \left\{ 1 + \left[ \frac{3}{k} \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \left( \frac{y}{D_0} \right)^2 + \operatorname{ctg} \alpha'_0 \right]^2 \right\}^n \quad (22)$ $\operatorname{ctg} \alpha'_0 = -\frac{3}{k} \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \left( \frac{y}{D_0} \right)^2 \quad (23)$ $\frac{r}{D_0} = \frac{y_0}{D_0} = e^{1-0,325 \left( \frac{v_0}{w} \right)^{1/2}} \quad (24)$ $\frac{r}{D_0} = \frac{k \left\{ 1 + \left[ \frac{3}{k} \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \left( \frac{y}{D_0} \right)^2 + \operatorname{ctg} \alpha'_0 \right]^2 \right\}^{3/2}}{6 \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \frac{y}{D_0}} \quad (26)$ $\sin \alpha = \left\{ 1 + \left[ \frac{3}{k} \left( \frac{w}{v_0} \right)^2 \left( \frac{y}{D_0} \right)^2 + \operatorname{ctg} \alpha'_0 \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (27)$	$\frac{y}{D_0} = k^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{1/3} \quad (21a)$ $\frac{w}{w_0} = \frac{1}{3} k^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{-2/3} \quad (35)$ $\frac{b}{D_0} = ck^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{1/3} \quad (13a)$ $\frac{r}{D_0} = \frac{9}{2} k^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{5/3} \quad (36)$
<p><b>Формулы дифференциальной геометрии</b></p> $ r  = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{(d^2y/dx^2)} = \frac{[1 + (dx/dy)^2]^{3/2}}{(d^2x/dy^2)} \quad (14)$ $\sin \alpha = \frac{1}{[1 + (dx/dy)^2]^{1/2}} \quad (25)$			



Основные дифференциальные уравнения в упрощенном виде

$$\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \zeta} = 0 \quad (16)$$

$$u_{\xi} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \zeta} =$$

$$= \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} u'_{\xi}}{\partial \zeta} \quad (17)$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{u}_{\eta}{}^{1,2}}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} T u'_{\eta}}{\partial \zeta} \quad (18)$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{u}_{\zeta}{}^{1,2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\tau}}{\partial \eta} \quad (19)$$

$$u_{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial T}{\partial \zeta} =$$

$$= \frac{\partial u'_{\eta} T'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} T'}{\partial \zeta} \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \zeta} = 0 \quad (16)$$

$$u_{\xi} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \zeta} =$$

$$= \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} u'_{\xi}}{\partial \zeta} \quad (17)$$

$$-\frac{u_{\xi}^2}{r} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{u}_{\eta}{}^{1,2}}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} u'_{\eta}}{\partial \zeta} \quad (18)$$

$$0 = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{u}_{\zeta}{}^{1,2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\tau}}{\partial \eta} \quad (19)$$

$$u_{\xi} \frac{\partial T}{\partial \xi} + u_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial T}{\partial \zeta} =$$

$$= \frac{\partial u'_{\eta} T'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} T'}{\partial \zeta} \quad (20)$$

$$\frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \zeta} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Delta u_{\xi}}{\partial (\xi/w)} + u_{\eta} \frac{\partial \Delta u_{\xi}}{\partial \eta} +$$

$$+ u_{\tau} \frac{\partial \Delta u_{\xi}}{\partial \zeta} = \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} u'_{\xi}}{\partial \zeta} \quad (38)$$

$$\frac{\partial u_{\eta}}{\partial (\xi/w)} + u_{\eta} \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \zeta} =$$

$$= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{u}_{\eta}{}^{1,2}}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} u'_{\eta}}{\partial \zeta} \quad (39)$$

$$\frac{\partial u_{\tau}}{\partial (\xi/w)} + u_{\eta} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \zeta} =$$

$$= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{u}_{\zeta}{}^{1,2}}{\partial \zeta} + \frac{\partial u'_{\eta} u'_{\tau}}{\partial \eta} \quad (40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial (\xi/w)} + u_{\eta} \frac{\partial T}{\partial \eta} + u_{\tau} \frac{\partial T}{\partial \zeta} =$$

$$= \frac{\partial u'_{\eta} T'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'_{\tau} T'}{\partial \zeta}, \quad (41)$$

где  $p_1 = p + \frac{\eta}{w^2}$

С помощью известной формулы дифференциальной геометрии (14) получим, учитывая (11) и то, что в данном случае  $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \ll 1$ , зависимость (15).

Согласно сделанной в [5] оценке, максимальное значение  $\kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  в рассматриваемой зоне есть величина порядка  $10^{-1}$ .

Поэтому, разложив функции  $\operatorname{ch} \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  и  $\operatorname{th} \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  в бесконечные степенные ряды, можно ограничиться лишь первыми членами разложения, имеющими порядок не менее  $10^{-1}$ . Тогда  $\operatorname{ch} \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right) \approx 1$ ,

$\operatorname{th} \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right) \approx \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  и формулы (12) и (15) упрощаются.

С учетом (12), (13) и (15) соответствующие коэффициенты при безразмерных членах уравнений (6) — (10) равны:

$$\begin{aligned} m_1 &= c \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right), & m_3/m_2 &= \frac{\kappa}{c}\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right), \\ m_2 &= c, \\ m_3 &= \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right), & m_1 m_3/m_2 &= \kappa^2\left(\frac{w}{v_0}\right)^2\left(\frac{y}{D_0}\right)^2, \\ m_1/m_2 &= \kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right), & m_3^2/m_2 &= \frac{\kappa^2}{c}\left(\frac{w}{v_0}\right)^2\left(\frac{y}{D_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что коэффициент расширения струи  $c$  в этой зоне также есть величина порядка  $10^{-1}$  ( $c = 0,2-0,3$ ), легко видеть, что в уравнениях (6) — (10) наивысший порядок малости  $10^{-2}$  имеют члены с коэффициентами  $m$  и  $m_1 m_3/m_2$ ; порядок малости  $10^{-1}$  имеют члены с коэффициентами  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $m_3^2/m_2$  и  $m_1/m_2$  и, наконец, порядок малости 1 — члены с коэффициентом  $m_3/m_2$ .

Оценку величины остальных членов, включая турбулентные, можно провести в соответствии с приведенными в [9] соображениями. Такая оценка показывает, что коэффициенты  $m_4 - m_8$ , а следовательно, и соответствующие члены в (6) — (10) должны иметь порядок 1, а члены с коэффициентами  $m_2 m_4$  и  $m_2 m_6$  — порядок  $10^{-1}$ .

Если сохранить в (6) — (10) только члены, имеющие порядок 1, получим обычные уравнения свободного пограничного слоя (16) — (20) в их размерной форме.

Таким образом, развитие струи в этой зоне должно быть идентично развитию свободной затопленной струи, если не учитывать некоторое возможное влияние отброшенных членов порядка малости  $10^{-1}$ .

### Зона наибольшего искривления

С этой зоны практически начинается развитие струи в поперечном потоке при умеренных величинах отношения  $v_0/w$ . Действительно, максимальное значение  $\kappa\left(\frac{w}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  в зоне почти вертикального движения есть величина порядка  $10^{-1}$ , как указывалось выше. Учитывая, что



коэффициент  $\kappa$  имеет также порядок  $10^{-1}$ , становится очевидным, что зона почти вертикального движения может иметь заметную протяженность ( $y/D_0$  порядка 10 и более), если только  $v_0/\omega$  есть величина порядка 10 и выше.

Траектория струи и изменение продольной скорости в зоне наибольшей кривизны могут быть описаны зависимостями (21) и (22) [5].

Для ширины струи остается справедливой зависимость (13), хотя коэффициент  $c$  имеет здесь несколько большие значения ( $c = 0,3 - 0,6$ ) [8]. Коэффициенты  $k$  и  $n$  в формулах (21) — (23) равны в среднем соответственно 3,5 и 0,36. Очевидно, что при  $\omega/v_0 \leq 0,25$  можно практически считать  $\text{ctg } \alpha'_0 = 0$ .

Порядок масштаба  $l$  будем оценивать с помощью грубо приближенной зависимости  $l \approx \frac{y - y_0}{\sin \alpha} + \frac{y_0}{\sin \alpha_0}$ . Кроме того,  $\omega_\eta = \omega \sin \alpha$ , где  $\sin \alpha$  определяется по известной формуле дифференциальной геометрии (25).

С учетом (21), (25) и (13) получим зависимости (26) и (27). Величина  $\left(\frac{\omega}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  в данной зоне меняется к ее концу от  $\left(\frac{\omega}{v_0}\right)\left(\frac{y}{D_0}\right)$  до максимального значения, равного, на основании опытных данных [8], примерно 1,75.

Полученная на основании сказанного выше оценка величины масштабных коэффициентов дает вблизи конца данного участка при  $\omega/v_0 > 0,25$  следующие результаты:

$$m_1 = O(10^{-1}), \quad m_2 = O(10^{-1}), \quad m_3 = O(10^{-1}),$$

$$m_1/m_2 = O(1), \quad m_1 m_3/m_2 = O(10^{-1}), \quad m_3/m_2 = O(1).$$

$$m_3^2/m_2 = O(10^{-1}),$$

При  $\omega/v_0 > 0,25$  следует учитывать влияние  $\omega/v_0$  через  $y_0$  и  $\text{ctg } \alpha'_0$ . Однако порядки масштабных коэффициентов меняются медленно и еще при  $\omega/v_0 = 0,5$  остаются почти прежними.

Необходимо оценить порядки масштабных коэффициентов и вблизи точки максимальной кривизны, координата которой  $y_{r,\min}$  определяется из условия  $dr/dy = 0$ . Соответствующие оценки дают при  $\omega/v_0 \leq 0,25$  (с точностью до  $5 \cdot 10^{-1}$ ) следующие значения:

$$m_1 = O(5 \cdot 10^{-1}), \quad m_2 = O(5 \cdot 10^{-1}), \quad m_3 = O(5 \cdot 10^{-1}),$$

$$m_1/m_2 = O(1), \quad m_1 m_3/m_2 = O(5 \cdot 10^{-1}), \quad m_3/m_2 = O(1).$$

$$m_3^2/m_2 = O(5 \cdot 10^{-1}),$$

При  $\omega/v_0 > 0,25$  порядки масштабных коэффициентов  $m_1 - m_3$  возрастают. Что касается остальных масштабных коэффициентов  $m_4 - m_8$ , то их порядок 1 остается прежним, а порядок множителей  $m_2 m_4$  и  $m_2 m_6$  зависит, естественно, от порядка  $m_2$ . Из приведенного выше анализа следует, что если в уравнениях (6) — (10) опустить все члены, которые по крайней мере на целый порядок меньше членов, имеющих наибольший порядок 1, то при не слишком малых отношениях  $v_0/\omega$  и не вблизи места, где радиус кривизны оси струи минимален, можно получить уравнения криволинейного пограничного слоя, у которого  $r \gg 1$ : (16), (17), (19), (20) и (28).

Однако вблизи места, где  $r = r_{\min}$ , порядок наименьших членов в (6) — (10) составляет  $5 \cdot 10^{-1}$  и пренебречь ими уже нельзя. Поэтому здесь процесс развития струи описывается полной системой уравнений



(1) — (5). Следовательно, возможность использования уравнений криволинейного пограничного слоя по всей зоне 2 остается, по меньшей мере, проблематичной.

### Зона почти горизонтального движения

При анализе исходных дифференциальных уравнений (1) — (5) для этой зоны целесообразно разделить абсолютную скорость на переносную и относительную, т. е.

$$u_{\xi} = \omega_{\xi} + \Delta u_{\xi}. \quad (29)$$

Поскольку в данной зоне можно считать  $\omega_{\xi} \approx \omega = \text{const}$ , то

$$\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} \approx \frac{\partial \Delta u_{\xi}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} \approx \frac{\partial \Delta u_{\xi}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \zeta} \approx \frac{\partial \Delta u_{\xi}}{\partial \zeta}.$$

Скорость  $\Delta u_{\xi}$  должна быть, по крайней мере, одного порядка малости с  $u_{\eta}$  и  $u_{\zeta}$ ; поэтому в качестве масштаба для нее берем  $\omega_{\eta}$ .

С учетом сказанного, уравнения (1) — (5) в безразмерной форме принимают вид (30) — (34).

Траектория струи в этой зоне также описывается уравнением (21) (при  $\text{ctg } \alpha'_0 = 0$ ), которое здесь удобно представить в виде (21а). Ширина струи по-прежнему подчиняется зависимости (13) или, с учетом (21а), зависимости (13а), но коэффициент  $c$ , как это явствует из опытных данных [8], имеет значения в пределах 0,5—1,5. Учитывая далее,

что в рассматриваемой зоне можно принять  $l \approx x$ ,  $\omega_{\eta} \approx \omega \left( \frac{dy}{dx} \right)$  и  $\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \ll 1$ , получаем с помощью (21а) и (14) зависимости (35) и (36).

Таким образом, масштабные коэффициенты в уравнениях (30) — (34) равны:

$$m_1 = \frac{2}{9} ck^{2/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{4/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{-4/3}, \quad m_1/m_3 = \frac{2}{3} ck^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{-2/3},$$

$$m_2 = ck^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{-2/3}, \quad m_2/m_3 = 3c,$$

$$m_3 = \frac{1}{3} k^{1/3} \left( \frac{v_0}{w} \right)^{2/3} \left( \frac{x}{D_0} \right)^{-2/3}, \quad m_1/m_3^2 = 2c.$$

Следовательно, при  $x \rightarrow \infty$

$$m_1 \rightarrow 0, \quad m_2 \rightarrow 0, \quad m_3 \rightarrow 0,$$

$$m_1/m_3 \rightarrow 0, \quad m_2/m_3 = 3c = C_1, \quad m_1/m_3^2 = 2c = C_2.$$

Чтобы в уравнениях (30) — (34) сохранялись наибольшие по своей величине члены, учитывающие градиенты статического давления и турбулентных напряжений, необходимы следующие соотношения между остальными масштабными коэффициентами:

$$m_4/m_3^2 = C_3, \quad m_5/m_3^2 = C_4, \quad m_6/m_3^2 = C_5,$$

$$m_7/m_3^2 = C_6, \quad m_8/m_3^2 = C_7,$$

т. е.  $m_4 \sim m_5 \sim m_6 \sim m_7 \sim m_8 \sim m_3^2 \sim x^{-2/3}$ .



Таким образом, на достаточно большом удалении от источника (теоретически при  $x \rightarrow \infty$ ) процесс развития струи в зоне 3 описывается системой дифференциальных уравнений (37) — (41).

Если принять определенную гипотезу о связи турбулентных напряжений с осредненными параметрами течения и добавить к уравнениям (37) — (41) соответствующие граничные условия, то придем в сущности к задаче о турбулентной вихревой паре, как она сформулирована в [10], с той лишь разницей, что вместо градиентов действительного статического давления  $p$  в (37) — (41) входят градиенты условного давления  $p_1$ . Это различие связано с влиянием центробежных сил, которое в обычной вихревой паре отсутствует. Поскольку  $p_1 = p_1(\eta)$ , то  $\partial p_1 / \partial \xi = \partial p / \partial \xi$ , т. е. влияние центробежных сил сказывается только на распределении статического давления в направлении  $\eta$ .

Некоторые результаты численного решения задачи о турбулентной вихревой паре приведены в [11], причем можно отметить хорошее качественное совпадение расчетных распределений температуры с определенными экспериментально в струе в поперечном потоке [8]. Это обстоятельство подтверждает сделанный выше вывод о том, что закономерности развития струи на участке почти горизонтального движения практически всецело определяются закономерностями сформировавшейся в струе вихревой пары.

Обращает на себя внимание и тот факт, что распределения  $T$  и  $\Delta u_\xi$  описываются совершенно идентичными по форме уравнениями (38) и (41). Значит, соответствующие распределения должны иметь сходный характер, так как граничные условия для них одинаковы.

### Обозначения

$\xi, \eta, \zeta$ — оси ортогональной криволинейной системы координат (рисунок);	$v'$ — характерная пульсационная составляющая скорости струи в данном поперечном сечении;
$x, y$ — оси декартовой системы координат (рисунок);	$T, T_c$ — температура струи относительно окружающей среды, текущая и средняя в данном поперечном сечении;
$r$ — радиус кривизны оси струи;	$T'$ — пульсационная составляющая температуры струи;
$l$ — длина оси струи вдоль направления $\xi$ ;	$p$ — статическое давление в струе относительно окружающей среды;
$b$ — ширина струи в данном поперечном сечении;	$p_\xi, p_\eta$ — разность статических давлений между характерными сечениями и точками в струе по направлениям соответственно $\xi$ и $\eta$ ;
$D_0$ — начальный диаметр струи;	$\rho$ — плотность;
$u_\xi, u_\eta, u_\zeta$ — составляющие скорости струи по направлениям соответственно $\xi, \eta, \zeta$ ;	$\alpha$ — угол наклона касательной к оси струи по отношению к направлению $x$ ;
$v_0, v$ — начальная и средняя в данном поперечном сечении скорости струи;	$c, \kappa$ — коэффициенты, характеризующие скорость расширения струи и скорость струйной эжекции;
$\omega$ — скорость поперечного потока;	
$\omega_\xi, \omega_\eta$ — составляющие скорости поперечного потока в направлениях соответственно $\xi$ и $\eta$ ;	
$u'_\xi, u'_\eta, u'_\zeta$ — пульсационные составляющие скорости струи по направлениям соответственно $\xi, \eta, \zeta$ ;	



$R_r, R_t$  — коэффициенты корреляции; Индексом \* обозначены безразмерные величины.  
 $m_1 - m_8$  — масштабные коэффициенты;  
 $C_1 - C_7$  — постоянные. Остальные обозначения даны в тексте.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, М., 1960.
2. Вахламов С. В., ИФЖ, 7, 112 (1964).
3. Шандоров Г. С., Изв. ВУЗов, Сер. авиац. техн., № 2, 100 (1966).
4. Акатнов Н. И., Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 12 (1969).
5. Гендриксон В., Злобин В., Лаатс М., Фришман Ф., Эпштейн А., Процессы переноса в турбулентных течениях со сдвигом, Таллин, 1973.
6. Гиршович Т. А., Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, 151 (1966).
7. Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 323 (1971).
8. Гендриксон В., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 304 (1973).
9. Хинце Г., Турбулентность, М., 1963.
10. Капланский Ф., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 386 (1973).
11. Капланский Ф., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 53 (1974).

Институт термофизики  
и электрофизики

Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
13/VI 1974

A. EPSTEIN

# POIKVOOLUSES LEVIVA JOA ARVUTAMISE VÕIMALIKKUSEST PIIRIKIHI JA PÖÖRISPAARI TEOORIAATE ALUSEL

Vaadeldakse põikvooluses levivat turbulentset juga kirjeldavate diferentsiaalvõrrandite lihtsustamise võimalust üksikute võrrandites sisalduvate liikmete suuruse hindamise teel. Selleks jaotatakse horisontaalsesse voolusesse vertikaalselt puhutav juga kolme tsooni: 1) ligilähedaselt vertikaalse liikumise tsoon, 2) suurima kõverusega liikumise tsoon, 3) ligilähedaselt horisontaalse liikumise tsoon. Näidatakse, et joa levikut 1. tsoonis kirjeldavad talvised vaba piirikihi võrrandid, 2. tsoonis aga ei piisa kirjeldamiseks isegi kõverjoonelise piirikihi võrranditest. 3. tsoonis voolavat juga on võimalik kirjeldada pöörispaari leviku seaduspärasuste abil.

A. EPSTEIN

# ON THE POSSIBILITY OF CALCULATION OF A JET IN THE CROSS STREAM ON THE BASIS OF THE BOUNDARY LAYER AND VORTEX PAIR THEORIES

A possibility of simplification of the differential equations describing the development of a turbulent jet in the cross stream by estimation of the magnitudes of various items in these equations is considered. A jet issuing at right angle into the horizontal flow is supposed to be composed of three regions: 1. the region of nearly vertical motion, 2. the region of maximum curvature, 3. the region of nearly horizontal motion. As shown, the development of the jet in region 1 can be described by usual free boundary layer equations, while in region 2 even the equations of curve-linear boundary layer are not sufficient. In region 3 the flow is submitted to the regularities of a vortex pair.