

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.1.07>

УДК 621.313.30

А. ВОЛЬДЕК, А. ИВАНОВ, В. ПРУСС-ЖУКОВСКИЙ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ НА ПОВЕРХНОСТИ ЯКОРЯ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА ПРИ ХОЛОСТОМ ХОДЕ БЕЗ УЧЕТА ЗУБЧАТОСТИ

Общие положения и постановка задачи

Дальнейшее развитие электромашиностроения ставит задачи все более строгого и точного расчета магнитных полей и связанных с ними параметров контуров машин постоянного тока. Вследствие явнополюсности машины и сложной конфигурации зазора математическое описание закона распределения индукции в зазоре встречает значительные трудности. Численные решения задачи о распределении поля возможны с помощью ЭВМ или моделирования. Однако при этом теряются общность результатов и возможность получения функциональных зависимостей параметров контуров от угла поворота ротора. Поэтому необходимо изыскивать пути нахождения аналитических выражений. Знание зависимостей параметров само- и взаимоиндуктивностей от угла поворота позволит в строгой форме использовать уравнения для анализа электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока [1].

Аналитическое решение задачи о магнитном поле в машине постоянного тока без учета зубчатости может быть получено методом конформных отображений. Однако этот метод приводит в общем случае к весьма сложным выражениям, затрудняющим дальнейшее использование результатов. Чтобы получить решения в более простой форме, часто принимаются допущения, которые не вполне оправданы.

При анализе таких явлений, как пульсации напряжения между соседними коллекторными пластинами в машинах с многоходовыми обмотками, магнитные шумы, добавочные потери, неравномерность вращения при ползучих скоростях и др., необходимо знать гармонический состав поля в зазоре. Выражения, получаемые методом конформных отображений, требуют при этом дополнительного гармонического анализа.

В настоящей работе производится расчет магнитного поля на активной поверхности якоря машины постоянного тока при питании только обмотки возбуждения без учета зубчатости и насыщения, основанный на решении уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала методом, разработанным Г. А. Гринбергом [2], который дает решение непосредственно в виде ряда Фурье. Учет зубчатости может быть произведен далее методом гармонических проводимостей [3, 4]. В случае питания других обмоток (якоря, добавочных полюсов, компенсационной)

задача может быть решена этим же методом. При совместном питании всех обмоток в силу допущения 3 (см. ниже) может быть применен метод наложения.

Основные допущения

1. Рассматривается спрямленная машина с гладким якорем.
2. Поле принимается плоско-параллельным в осевом направлении.
3. Магнитная проводимость стали полагается бесконечно большой.
4. Зазор между полюсами и якорем считается равномерным. Учет неравномерности зазора может быть произведен дополнительно аналогично [5].
5. Второй зазор между сердечником добавочного полюса и ярмом отсутствует.

6. Ввиду симметрии можно ограничиться рассмотрением половины полюсного деления машины. Тем самым рассматривается область, показанная на рис. 1, где b_1 — половина ширины башмака главного полюса, а b_2 — половина ширины башмака добавочного полюса.

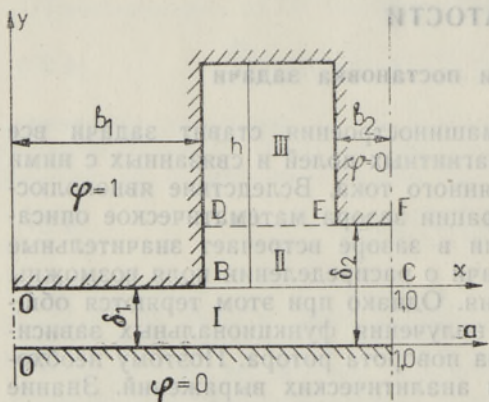


Рис. 1. Рассматриваемая область зазора и полюсного окна машины.

7. Глубину междуполюсного пространства без заметной погрешности можно считать бесконечной. В работе [6] получен вывод о том, что радиальная высота полюса при встречающихся на практике геометрических соотношениях практически не влияет на распределение индукции на поверхности якоря. При решении задачи можно для общности сначала записать решение для случая конечной глубины междуполюсного пространства, а затем устремить ее к бесконечности.

Для большей общности решения целесообразно перейти к относительным размерам, принимая за базисную величину половину полюсного деления $\tau/2$:

$$b_1^* = \frac{2b_1}{\tau}, \quad b_2^* = \frac{2b_2}{\tau}, \quad \delta_1^* = \frac{2\delta_1}{\tau},$$

$$\delta_2^* = \frac{2\delta_2}{\tau}, \quad x^* = \frac{2x}{\tau}, \quad y^* = \frac{2y}{\tau},$$

а также к относительному магнитному потенциалу $\varphi^* = \varphi/\varphi_0$, где φ_0 — потенциал главного полюса. В дальнейшем для упрощения записи знак * опускается.

При определении поля на поверхности якоря можно считать, что вся поверхность главного полюса находится под потенциалом $\varphi = 1$.

Решение задачи

Магнитные потенциалы выделенных на рис. 1 прямоугольных областей I, II и III будем обозначать через

$$\varphi_I(x, y) = U(x, y) = U,$$

$$\varphi_{II}(x, y) = V(x, y) = V,$$

$$\varphi_{III}(x, y) = W(x, y) = W.$$

В каждой из этих областей U , V и W должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

На границах области I ($0 \leq x \leq 1$, $-\delta_1 \leq y \leq 0$) действительны условия:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (2a)$$

$$U|_{x=1} = 0; \quad (2б)$$

$$U|_{y=-\delta_1} = 0; \quad (2в)$$

$$U|_{y=0} = 1, \quad 0 \leq x \leq b_1; \quad (2г)$$

$$U|_{y=0} = f(x), \quad b_1 \leq x \leq 1. \quad (2д)$$

Здесь $f(x)$ — неизвестная пока функция. Согласно Г. А. Гринбергу [2], решение уравнения (1) в случае граничных условий (2a) и (2б) ищется в виде ряда Фурье

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где

$$U_k = 2 \int_0^1 U(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx. \quad (4)$$

Умножая (1) на $2 \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx$ и интегрируя результат в пределах от $x=0$ до $x=1$, получаем

$$2 \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx + 2 \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = 0.$$

Первый интеграл после двукратного интегрирования по частям с учетом (2a), (2б) и (4) дает

$$2 \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = 2 \left[\frac{\partial U}{\partial x} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \Big|_0^1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2k-1}{2} \pi U \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2} \Big|_0^1 - \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 \int_0^1 U \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx \right] =$$

$$= - \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 U_k.$$

Для второго интеграла, имея в виду взаимную независимость x и y , получаем

$$2 \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = \frac{d^2 U_k}{dy^2}.$$

Таким образом, для определения U_k получается уравнение

$$\frac{d^2 U_k}{dy^2} - \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^2 U_k = 0, \quad (5)$$

общее решение которого имеет вид

$$U_k = A_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2}. \quad (6)$$

Для определения постоянных A_k и B_k необходимо использовать граничные условия (2в) и (2д), которые сначала преобразуем в соответствии с (4):

$$U_{k/y=-\delta_1} = 2 \int_0^1 U(x, -\delta_1) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = 0, \quad (7)$$

$$U_{k/y=0} = 2 \int_0^1 U(x, 0) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} dx = U_{k0}. \quad (8)$$

Поскольку $f(x)$ пока неизвестна, то U_{k0} — также неизвестные коэффициенты разложения в ряд Фурье потенциальной функции на линии OC (рис. 1), т. е. при $y = 0$.

Подставляя (7) и (8) в (6), находим:

$$A_k = U_{k0} \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi y}{2}; \quad B_k = U_{k0}. \quad (9)$$

После подстановки (9) и (6) в (3) получаем выражение для потенциала в области I

$$U = \sum_{h=1}^{\infty} U_{h0} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi(\delta_1+y)}{2}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}. \quad (10)$$

Область II удобно рассматривать в системе координат (x_2, y_2) , где

$$x_2 = x - b_1, \quad y_2 = y. \quad (11)$$

При этом $0 \leq x_2 \leq 1 - b_1$, $0 \leq y_2 \leq \delta_2 - \delta_1$.

Скалярный магнитный потенциал $V(x_2, y_2)$ должен удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям:

$$V|_{x_2=0} = 1; \quad (12a)$$

$$V|_{x_2=1-b_1} = 0; \quad (12б)$$

$$V|_{y_2=0} = f(x_2); \quad (12в)$$

$$V|_{y_2=\delta_2-\delta_1} = \psi(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq 1 - b_1 - b_2; \quad (12г)$$

$$V|_{y_2=\delta_2-\delta_1} = 0, \quad 1 - b_1 - b_2 \leq x_2 \leq 1 - b_1. \quad (12д)$$

Здесь $f(x_2)$ представляет $f(x)$ из (2д), выраженную в новых координатах

тах, а $\psi(x_2)$ — новая неизвестная пока функция. Решение (1) в случае граничных условий (12а) и (12б) по Г. А. Гринбергу ищется в виде ряда

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin \frac{n\pi x_2}{1-b_1} \quad (n=1, 2, 3 \dots), \quad (13)$$

где

$$V_n = \frac{2}{1-b_1} \int_0^{1-b_1} V(x_2, y_2) \sin \frac{n\pi x_2}{1-b_1} dx_2. \quad (14)$$

Продолжив решение, аналогичное произведенному для области I, получим для потенциала в области II

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(V_{n\delta} - \frac{2}{n\pi} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi y_2}{1-b_1}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} - \left(V_{n0} - \frac{2}{n\pi} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi(y_2 - \delta_2 + \delta_1)}{1-b_1}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} + \frac{2}{n\pi} \right] \sin \frac{n\pi x_2}{1-b_1}. \quad (15)$$

Здесь V_{n0} и $V_{n\delta}$ — неизвестные пока коэффициенты разложения в ряд Фурье потенциальной функции $V(x_2, y_2)$ на линиях BC и DF соответственно (рис. 1), т. е. при $y_2 = 0$ и $y_2 = \delta_2 - \delta_1$.

Поле в области III рассмотрим в системе координат (x_3, y_3) , где

$$x_3 = x - b_1, \quad y_3 = y - \delta_2 + \delta_1, \quad (16)$$

причем $0 \leq x_3 \leq 1 - b_1 - b_2$, $0 \leq y_3 \leq h - \delta_2 + \delta_1$.

Потенциальная функция $W(x_3, y_3)$ должна удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям:

$$W|_{x_3=0} = 1; \quad (17a)$$

$$W|_{x_3=1-b_1-b_2} = 0; \quad (17б)$$

$$W|_{y_3=0} = \psi(x_3); \quad (17в)$$

$$W|_{y_3=h-\delta_2+\delta_1} = 0. \quad (17г)$$

Здесь $\psi(x_3)$ представляет $\psi(x_2)$ из (12г), выраженную в новых координатах.

Решение (1) при граничных условиях (17а) и (17б) имеет вид

$$W = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{m\pi x_3}{1-b_1-b_2} \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (18)$$

где

$$W_m = \frac{2}{1-b_1-b_2} \int_0^{1-b_1-b_2} W(x_3, y_3) \sin \frac{m\pi x_3}{1-b_1-b_2} dx_3. \quad (19)$$

Решение задачи приводит к выражению

$$W_m = \left[\frac{2}{m\pi} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{m\pi(h-\delta_2+\delta_1)}{1-b_1-b_2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(W_{m\delta} - \frac{2}{m\pi} \right) \operatorname{cth} \frac{m\pi(h - \delta_2 + \delta_1)}{1 - b_1 - b_2} \Big] \operatorname{sh} \frac{m\pi y_3}{1 - b_1 - b_2} + \\
 & + \left(W_{m\delta} - \frac{2}{m\pi} \right) \operatorname{ch} \frac{m\pi y_3}{1 - b_1 - b_2} + \frac{2}{m\pi}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Подставляя (20) в (18) и полагая $h \rightarrow \infty$, получаем потенциальную функцию в области III:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(W_{m\delta} - \frac{2}{m\pi} \right) \left(\operatorname{ch} \frac{m\pi y_3}{1 - b_1 - b_2} - \operatorname{sh} \frac{m\pi y_3}{1 - b_1 - b_2} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{m\pi} \right] \sin \frac{m\pi x_3}{1 - b_1 - b_2}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

В (10), (15) и (21) входят неизвестные U_{k0} , V_{n0} , $V_{n\delta}$ и $W_{m\delta}$, которые являются коэффициентами разложения в ряды Фурье потенциалов на границах между областями I, II и III. Для их определения используем условия непрерывности потенциальной функции и ее первой производной на границах раздела областей:

$$U|_{y=0} = V|_{y=0}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial V}{\partial y}|_{y=0},$$

$$V|_{y=\delta_2-\delta_1} = W|_{y=\delta_2-\delta_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}|_{y=\delta_2-\delta_1} = \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=\delta_2-\delta_1}.$$

Подставляя сюда выражения (10), (15) и (21), приведенные к основной системе координат, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{k0} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0} \sin \frac{n\pi(x-b_1)}{1-b_1}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2} \pi U_{k0} \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} = \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{1-b_1} \left[\left(V_{n\delta} - \frac{2}{n\pi} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\delta_2-\delta_1)}{1-b_1}} - \right. \\
 & \left. - \left(V_{n0} - \frac{2}{n\pi} \right) \operatorname{cth} \frac{n\pi(\delta_2-\delta_1)}{1-b_1} \right] \sin \frac{n\pi(x-b_1)}{1-b_1}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_{n\delta} \sin \frac{n\pi(x-b_1)}{1-b_1} = \sum_{m=1}^{\infty} W_{m\delta} \sin \frac{m\pi(x-b_1)}{1-b_1-b_2}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{1-b_1} \left[\left(V_{n\delta} - \frac{2}{n\pi} \right) \operatorname{cth} \frac{n\pi(\delta_2-\delta_1)}{1-b_1} - \right. \\
 & \left. - \left(V_{n0} - \frac{2}{n\pi} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\delta_2-\delta_1)}{1-b_1}} \right] \sin \frac{n\pi(x-b_1)}{1-b_1} =
 \end{aligned}$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{1-b_1-b_2} \left(W_{m0} - \frac{2}{m\pi} \right) \sin \frac{m\pi(x-b_1)}{1-b_1-b_2}. \quad (25)$$

Умножим обе части (22) на $2 \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} dx$ и проинтегрируем по x в пределах от b_1 до 1. При этом для левой части получим

$$\begin{aligned} & 2 \int_{b_1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} U_{k0} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} dx = \\ & = 2 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} U_{k0} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} dx - \\ & - 2 \int_0^{b_1} U(x, 0) \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} dx. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл в правой части при $k \neq i$ обращается в нуль, а при $k = i$ равен U_{i0} . Второй интеграл с учетом (2г) равен

$$\frac{4}{(2i-1)\pi} \sin \frac{(2i-1)\pi b_1}{2}.$$

Для правой части (22) получим

$$2 \int_{b_1}^1 \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0} \sin \frac{n\pi(x-b_1)}{1-b_1} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0} A_{n,i},$$

где

$$A_{n,i} = \int_{b_1}^1 \sin \frac{n\pi(x-b_1)}{1-b_1} \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{n\pi}{1-b_1} \cos \frac{(2i-1)\pi b_1}{2}, & \frac{n}{1-b_1} \neq \frac{2i-1}{2}; \\ \left(\frac{n\pi}{1-b_1} \right)^2 - \left(\frac{2i-1}{2} \pi \right)^2 \cos \frac{(2i-1)\pi b_1}{2}, & \frac{n}{1-b_1} = \frac{2i-1}{2}; \\ (-1)^{n+i} \frac{1-b_1}{2}, & \frac{n}{1-b_1} = \frac{2i-1}{2}. \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, уравнение (22) принимает вид

$$U_{i0} = \frac{4}{(2i-1)\pi} \sin \frac{(2i-1)\pi b_1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0} A_{n,i}.$$

Равенства (23) и (24) умножим на $\frac{2}{1-b_1} \sin \frac{j\pi(x-b_1)}{1-b_1} dx$ и проинтегрируем (23) в пределах от $x = b_1$ до $x = 1$, а (24) в пределах от $x = b_1$ до $x = 1 - b_2$. Равенство (25) умножим на $\frac{2}{1-b_1-b_2} \sin \frac{l\pi(x-b_1)}{1-b_1-b_2} dx$ и также проинтегрируем в пределах от $x = b_1$ до $x = 1 - b_2$. В результате получим следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} U_{i0} &= \frac{4}{(2i-1)\pi} \sin \frac{(2i-1)\pi b_1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} V_{n0} A_{n,i}, \\ V_{j0} &= \frac{2}{j\pi} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{j\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} \right] + V_{j\delta} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{j\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} - \\ &- \frac{2}{j\pi} \operatorname{th} \frac{j\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2} \pi \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2} U_{k0} A_{j,k}, \\ V_{j\delta} &= \frac{2}{1-b_1} \sum_{m=1}^{\infty} W_{m\delta} C_{m,j}, \\ W_{l\delta} &= \frac{2}{l\pi} + \frac{2}{l\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{1-b_1} \left[\left(V_{n0} - \frac{2}{n\pi} \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} - \right. \\ &\left. - \left(V_{n\delta} - \frac{2}{n\pi} \right) \operatorname{cth} \frac{n\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1} \right] C_{l,n}, \end{aligned} \right. \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} C_{m,j} &= \int_{b_1}^{1-b_2} \sin \frac{j\pi(x-b_1)}{1-b_1} \sin \frac{m\pi(x-b_1)}{1-b_1-b_2} dx = \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{m-1} \frac{m\pi}{1-b_1-b_2} \sin \frac{j\pi(1-b_1-b_2)}{1-b_1}}{\left(\frac{m\pi}{1-b_1-b_2} \right)^2 - \left(\frac{j\pi}{1-b_1} \right)^2}, & \frac{m}{1-b_1-b_2} \neq \frac{j}{1-b_1}; \\ \frac{1-b_1-b_2}{2}, & \frac{m}{1-b_1-b_2} = \frac{j}{1-b_1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку выражения (15) и (21) представляют потенциальную функцию лишь внутри областей II и III (рис. 1), а не на их вертикальных границах (так как синусы, по которым происходит разложение, обращаются на них в нуль), коэффициенты этих рядов убывают не быстрее, чем $1/n$ или $1/m$ соответственно [2]. Так как эти коэффициенты при $y=0$ и $y=\delta_2-\delta_1$ обращаются в V_{n0} , $V_{n\delta}$ и $W_{m\delta}$, то из этого следует, что и последние убывают не быстрее, чем $1/n$ или $1/m$. При этом ряды в первом и третьем уравнениях системы (27) сходятся медленно и для достижения удовлетворительной точности необходимо решать систему из очень большого числа уравнений. Чтобы избежать этого, выразим V_{n0} , $V_{n\delta}$ и $W_{m\delta}$ через новые переменные

$$v_{n0} = V_{n0} - \frac{2}{n\pi}, \quad (29a)$$

$$v_{n\delta} = V_{n\delta} - \frac{2}{n\pi}, \quad (29б)$$

$$\omega_{m\delta} = W_{m\delta} - \frac{2}{m\pi}, \quad (29в)$$

которые будут убывать уже не медленнее, чем $1/n^2$ или $1/m^2$ [2].

После подстановки (29) в (27) в первом и третьем уравнениях системы появляются новые члены в виде рядов, суммы которых могут быть выражены в замкнутом виде [7]:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} A_{n,i} = \frac{2}{1-b_1} \frac{4}{(2i-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2i-1)\pi b_1}{2} - \frac{4}{(2i-1)\pi} \sin \frac{(2i-1)\pi b_1}{2},$$

$$\frac{2}{1-b_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m\pi} C_{m,j} = \frac{2}{j\pi} \frac{2}{j^2 \pi^2} \frac{1-b_1}{1-b_1-b_2} \sin \frac{j\pi(1-b_1-b_2)}{1-b_1}.$$

Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов получаем следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} U_{i0} &= \frac{2}{1-b_1} \frac{4}{(2i-1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2i-1)\pi b_1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_{n0} A_{n,i}, \\ v_{j0} &= v_{j\delta} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{j\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} - \frac{2}{j\pi} \operatorname{th} \frac{j\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2} \pi \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi \delta_1}{2} U_{k0} A_{j,k}, \\ v_{j\delta} &= -\frac{2}{j^2 \pi^2} \frac{1-b_1}{1-b_1-b_2} \sin \frac{j\pi(1-b_1-b_2)}{1-b_1} + \frac{2}{1-b_1} \sum_{m=1}^{\infty} \omega_{m\delta} C_{m,j}, \\ \omega_{l\delta} &= \frac{2}{l\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{1-b_1} \left[v_{n0} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1}} - v_{n\delta} \operatorname{cth} \frac{n\pi(\delta_2 - \delta_1)}{1-b_1} \right] C_{l,n}. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Полагая здесь поочередно i, j и $l = 1, 2, 3, \dots$, получим бесконечную систему уравнений. Практически необходимое число уравнений зависит от степени сходимости рядов, а также от желаемой точности и устанавливается в ходе решения.

Магнитная проводимость на поверхности якоря

На поверхности якоря магнитная индукция имеет только составляющую по оси y

$$B = B_y = -\mu_0 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\delta_1}$$

и, согласно (10), с точностью до знака

$$B = \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{k0} \frac{(2k-1)\pi}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi \delta_1}{2}} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}. \quad (31)$$

Магнитная индукция в любой точке на поверхности якоря определяется выражением

$$B(x) = \Lambda(x)F(x) = \frac{\mu_0}{\delta_1} \lambda(x)F(x), \quad (32)$$

где $\Lambda(x)$ — удельная магнитная проводимость воздушного зазора; $\lambda(x)$ — относительная удельная магнитная проводимость воздушного зазора; $F(x)$ — н. с., действующая вдоль зазора и равная в данном случае единице.

Согласно (31) и (32) получим

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2}. \quad (33)$$

Здесь

$$\lambda_k = U_{k0} \frac{(2k-1)\pi \delta_1}{2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi \delta_1}{2}} \quad (34)$$

представляют собой амплитуды гармоник относительной удельной проводимости зазора.

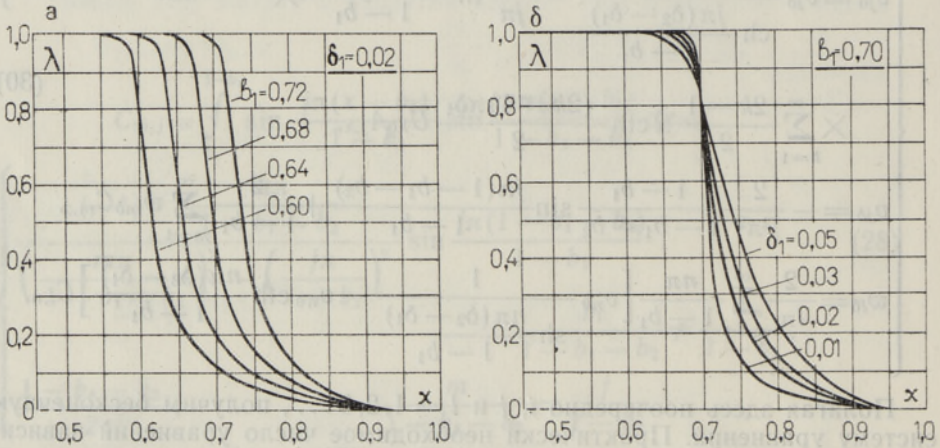


Рис. 2. Относительная удельная магнитная проводимость воздушного зазора на поверхности якоря.

Решение системы (30) было произведено с помощью ЭЦВМ «БЭСМ-4». Для осуществления практических расчетов необходимо задаться числом членов N в числовых рядах, входящих в уравнения системы (30). Программа была составлена таким образом, что N можно было менять ступенями по 16. Проведенные исследования показали, что при $\delta_1 = 0,02$ и $N = 64$ максимальная погрешность при определении λ_k не превышает $0,05\%$ от значения проводимости под серединой главного полюса. При определении $\lambda(x)$ максимальная погрешность возникает при $x = b_1$; при учете в (33) всех 64 определяемых из системы (30) членов она не превышает 1% , а при учете лишь первых 30 членов — 3% от той же величины. В области же малых значений λ (вблизи коммутационной зоны и в ее пределах) она не превышает $0,05$ и $0,5\%$ соответственно. Точность расчетов возрастает с увеличением зазора δ_1 и уменьшается с его уменьшением. Это объясняется тем, что при больших зазорах коэффициенты λ_k с увеличением k убывают быстрее. В связи

с этим все дальнейшие расчеты проводились при $N = 64$, а для $\delta_1 = 0,01$ при $N = 96$. Интегральные кривые проводимости $\lambda(x)$ для ряда значений b_1 и δ_1 при $b_2 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,06$ приведены на рис. 2, а, б. Здесь расположение оси x соответствует рис. 1. Для оценки влияния параметров добавочного полюса на поле главного полюса были проведены расчеты для $b_2 = 0,07$, $b_2 = 0,13$ и $\delta_2 = 0,025$, $\delta_2 = 0,1$, которые приближаются к крайним из используемых на практике. При этом полагалось $b_1 = 0,70$ и $\delta_1 = 0,02$. Расчеты показали, что увеличение b_2 и уменьшение δ_2 приводит к уменьшению проводимости в зоне малых значений λ . Сравнение указанных вариантов с вариантом при $b_2 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,06$, который условно принимался за средний, показало, что изменение вели-

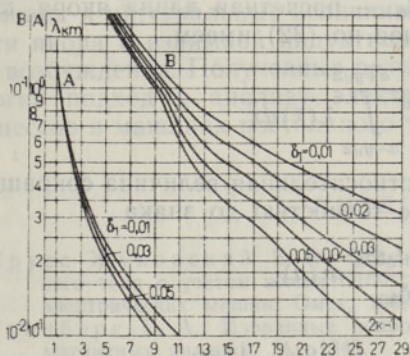


Рис. 3. Зависимость λ_{km} от порядка гармоники при разных величинах зазора δ_1 .

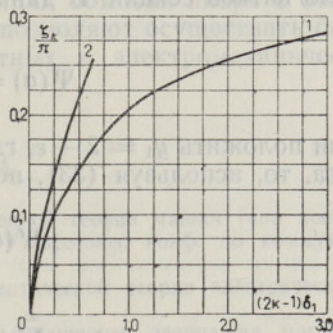


Рис. 4. Зависимость ξ_k от порядка гармоники и величины зазора: 1 — для всех k , кроме $k = 5, 6, 7$; 2 — для $k = 5, 6, 7$.

чин b_2 и δ_2 в указанных пределах приводит к отклонениям от среднего, максимальная величина которых не превосходит $\pm 2\%$ от проводимости под серединой главного полюса.

Величины амплитуд гармоник проводимости при изменении b_2 и δ_2 меняются также незначительно, поэтому, например, при расчете пульсаций напряжений между соседними коллекторными пластинами, добавочных потерь, пульсационных моментов и т. д., можно исходить из амплитуд гармоник, соответствующих среднему варианту. Их величины в зависимости от b_1 и δ_1 могут быть определены из выражения

$$\lambda_k = \lambda_{km} \sin \left[\frac{(2k-1)\pi b_1}{2} + \xi_k \right]. \quad (35)$$

Здесь λ_{km} в зависимости от k и δ_1 определяются из рис. 3, а при $k \geq 15$ могут быть найдены по приближенному выражению

$$\lambda_{km} = \frac{4\delta_1}{\text{sh} \frac{(2k-1)\pi\delta_1}{2}} \frac{1+3\delta_1^{0,55}}{(2k-1)^{1,85\delta_1^{0,36}}}. \quad (36)$$

При этом ξ_k в зависимости от k и δ_1 можно получить из рис. 4. Погрешность расчетов по (35) при изменении δ_1 в пределах $0,01 \div 0,05$ не превышает $(3 \div 7)\%$ от λ_{km} , где нижний предел соответствует зазору $\delta_1 = 0,01$. При больших величинах δ_1 погрешность возрастает.

Взаимная индуктивность секции обмотки якоря с обмоткой возбуждения

Координату оси секции обмотки якоря обозначим через a и будем отсчитывать ее от середины главного полюса, как показано на рис. 1. Тогда для потокосцепления секции в зависимости от ее положения относительно магнитной системы можно записать

$$\Psi(a) = l_{\delta} \omega_k \int_{a-y_1/2}^{a+y_1/2} B(x) dx, \quad (37)$$

где y_1 — шаг секции в долях $\tau/2$, l_{δ} — расчетная длина якоря, ω_k — число витков секции. В данном случае по (32) имеем

$$\Psi(a) = \frac{\mu_0 l_{\delta} \omega_k}{\delta_1} \int_{a-y_1/2}^{a+y_1/2} \lambda(x) dx. \quad (38)$$

Если положить $y_1 = 2 - \varepsilon$, где ε — относительная величина сокращения шага, то, используя (33), получим с точностью до знака

$$\Psi(a) = \frac{2\mu_0 l_{\delta} \omega_k}{\delta_1} m(a), \quad (39)$$

где

$$m(a) = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} m_h \cos \frac{(2k-1)\pi a}{2}, \quad (40)$$

$$m_h = \frac{2}{(2k-1)\pi} \lambda_h \cos \frac{(2k-1)\pi \varepsilon/2}{2}. \quad (41)$$

Здесь $m(a)$ — относительная удельная величина взаимной индуктивности между обмоткой возбуждения и секцией обмотки якоря. Ее

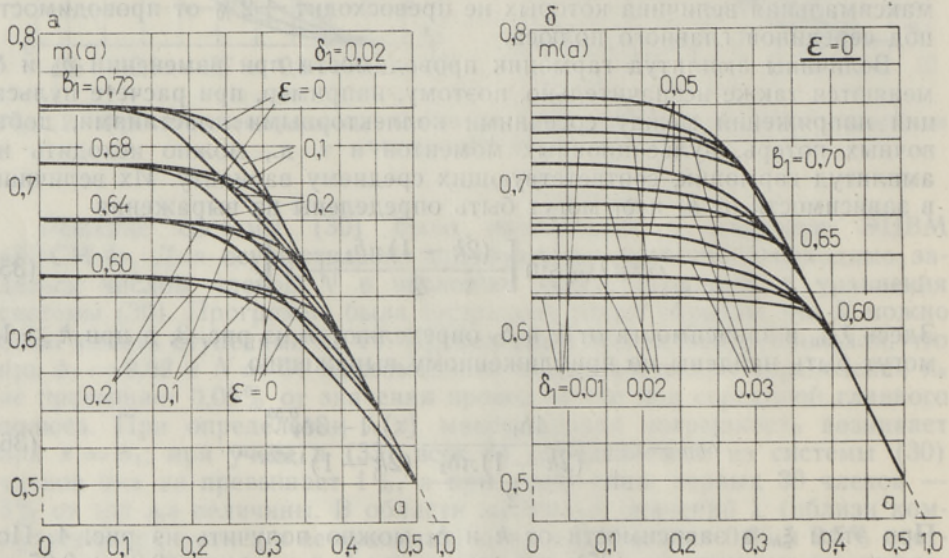


Рис. 5. Относительная удельная взаимная индуктивность секции обмотки якоря с обмоткой возбуждения.

зависимость от a для ряда значений параметров b_1 и δ_1 при $b_2 = 0,1$ и $\delta_2 = 0,06$ приведена на рис. 5, а, б.

При $\varepsilon = a = 0$

$$m_0 = \alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2}{(2k-1)\pi} \lambda_k, \quad (42)$$

где α_i — коэффициент расчетной полюсной дуги.

Заключение

Таким образом, методом Г. А. Гринберга рассчитаны амплитуды гармоник и интегральные величины магнитной проводимости на поверхности якоря и взаимной индуктивности секции обмотки якоря с обмоткой возбуждения. Полученные результаты позволяют осуществить более строгий подход к анализу электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прусс-Жуковский В. В., Основы обобщенной теории машин типа постоянного тока с учетом коммутации, Матер. IV Всесоюз. конф. по коммутации электрических машин, Омск, 1969.
2. Гринберг Г. А., Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М., 1948.
3. Вольдек А. И., Влияние неравномерности воздушного зазора на магнитное поле асинхронной машины, Электричество, № 12 (1951).
4. Вольдек А. И., Солдатенкова Н. А., К расчету магнитного поля в воздушном зазоре электрических машин с помощью метода гармонических проводимостей, Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 301, 1969.
5. Вольдек А. И., Исследование магнитного поля в воздушном зазоре явнополюсных синхронных машин методом гармонических проводимостей, Электричество, № 7 (1966).
6. Сяка З. К., Влияние радиальной высоты полюса на картину магнитного поля в воздушном зазоре, Тр. Ин-та энергетики АН Латв. ССР, 16 (Бесконтактные электрические машины, 3), Рига, 1963.
7. Заездный А. М., Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи, М., 1972.

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
7/VIII 1974

A. VOLDEK, A. IVANOV, V. PRUSS-ZUKOVSKI

ALALISVOOLUMASINA ANKRUPINNA MAGNETVÄLI TÜHIJOOKSUL, ARVESTAMATA HAMBULISUST

On arvutatud alalisvoolumasina ankrü aktiivpinna magnetväli tühijooksul, arvestamata hambulisust ja küllastust. Arvutus põhineb Laplace'i võrrandi lahendusel skalaarse magnetpotentsiaali kohta G. A. Grinbergi meetodil. Saadud avaldiste alusel on arvutatud harmooniliste amplituudid ja ankrupinna magnetilise juhtivuse integraalkõverad, samuti ankrumähise sektiooni ja ergutusmähise vahelised vastastikused induktiivsused. On hinnatud lisapooluse parameetrite mõju peapooluse magnetväljale. Saadud tulemused võimaldavad rangemalt analüüsida elektromagnetilisi ja elektromeaanilisi protsesse alalisvoolumasinaates.

A. VOLDEK, A. IVANOV, V. PRUSS-ZHUKOVSKI

THE MAGNETIC FIELD ON THE ARMATURE SURFACE OF THE DIRECT CURRENT MACHINE AT IDLE RUNNING, NEGLECTING THE SLOTS

The paper deals with the calculation of the magnetic field on the active armature surface of the direct current machine at idle running, neglecting the slots and the saturation, based on the Laplace equation solution for the scalar magnetic potential using the G. A. Grinberg method. According to the equations obtained, the amplitudes of the harmonics and the integral curves of the magnetic conductivity on the armature surface and mutual inductivities of the armature winding sections with the exciting winding are calculated. Estimation of the commutating pole parameters influence upon the main pole field is given.

The results enable to analyze with greater precision the electromagnetic and electro-mechanical processes in the direct current machines.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.

Полученные результаты позволяют осуществлять более точный анализ электромагнитных и электромеханических процессов в машинах постоянного тока.