EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.1.03

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН, М. ЛЕВИНА

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ

Согласно [1] крадратурная формула с остатком $R[f]$ называется наилучшей на множестве H функций f, если параметры этой формулы (веса и узлы) выбраны так, что величина

$$\sup_{f\in H}|R[f]|$$

достигает наименьшего значения.

Пусть значения $M>0$, $1<p\leqslant\infty$, целое положительное r — заданы. Тогда $W^{(r)}L_p$ означает множество функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютнонепрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию

$$\left[\int_0^1 |f^{(r)}(t)|^p\,dt\right]^{1/p}\leqslant M.$$

Введем обозначения:

$$I_r=\{0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\},\quad I(\nu)=\{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_\nu\},$$

где $I(\nu)\subset I_r$ и значения $i_1<i_2<\ldots<i_\nu$ заданы.

Через $W^{(r)}_{0I(\nu)}L_p$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_p$ и удовлетворяют условию

$$f^{(i_j)}(0)=0\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu).$$

На этом множестве построим наилучшие формулы вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\varrho}A_{ij}f^{(j)}(x_i)+R_n[f]\tag{1}$$

для значений $\varrho=r-1$ и $\varrho=r-2$.
Рассмотрим сначала случай $\varrho=r-1$.
Пусть

$$f(x)\in W^{(r)}_{0I(\nu)}L_p,\qquad V=I_r\setminus I(\nu).$$

Тогда

$$f(x)=\sum_{l\in V}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}x^l+\int_0^1 f^{(r)}(t)\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}E(x-t)\,dt,$$

$$E(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\\ 1, & u>0.\end{cases}$$

Так как при любом значении N и $l \in V$ функция $Nx^l \in \overset{(r)}{W}_{0I(\nu)}L_p$, то согласно [2] наилучшую на множестве $\overset{(r)}{W}_{0I(\nu)}L_p$ формулу (1) можно искать среди тех формул (1), для которых

$$R_n[x^l]=0 \qquad (l \in V). \tag{2}$$

Итак, пусть для формул (1) выполнено условие (2). Тогда легко получить

$$\sup_{f \in \overset{(r)}{W}_{0I(\nu)}L_p} |R_n[f]| = \frac{M}{r!} U^{1/q},$$

где

$$U=\int_0^1 |K(t)|^q\, dt, \tag{3}$$

$$K(t)=(t-1)^r-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1} A_{ij}\frac{(-1)^r r!\,(x_i-t)^{r-1-j}}{(r-1-j)!}E(x_i-t), \tag{4}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Следовательно, задача сводится к отысканию наименьшего значения (3) при условиях (2), которые можно записать в виде

$$\frac{1}{l+1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1} A_{ij}(x^l)^{(j)}\Big|_{x=x_i} \qquad (l \in V). \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $K(t)$. Пусть $\pi_m(t)$ означает многочлен, с которым $K(t)$ совпадает на отрезке $[x_m, x_{m+1})$ $(m=0, 1, \ldots, n)$, $x_0=0$, $x_{n+1}=1$.

Тогда

$$\pi_0(t)=(t-1)^r-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1} A_{ij}\frac{(-1)^r r!\,(x_i-t)^{r-1-j}}{(r-1-j)!} \tag{6}$$

и поэтому

$$\pi_0^{(r-1-l)}(0)=\frac{(-1)^{l+1}r!}{l!}\left[\frac{1}{l+1}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1} A_{ij}(x^l)^{(j)}\Big|_{x=x_i}\right],$$

откуда видно, что условия (5) равносильны условиям

$$K^{(r-1-l)}(0)=\pi_0^{(r-1-l)}(0)=0 \qquad (l \in V). \tag{7}$$

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{r-\nu}$ элементы множества V,

$$A=\{r-1-v_1,\ r-1-v_2,\ \ldots,\ r-1-v_{r-\nu}\}, \qquad B=I_r \setminus A.$$

Тогда легко заметить, что функция (6), удовлетворяющая условиям (7), имеет вид

$$x^r+\sum_{i \in B}\alpha_i x^i. \tag{8}$$

Таким образом, задача сводится к нахождению наименьшего значения (3) при условии, что

$$K(t)=\begin{cases} t^r+\sum\limits_{i \in B}\alpha_i t^i, & t \in [0, x_1), \\ \pi_m(t), & t \in [x_m, x_{m+1}) \\ & (m=1, 2, \ldots, n-1), \\ (t-1)^r, & t \in [x_n, 1]. \end{cases}$$

Пусть $S_{r,q,B}(x)$ — многочлен вида (8), наименее уклоняющийся от нуля в метрике L_q на отрезке $[0,1]$ по весу 1, а $R_{r,q}(x)$ — многочлен степени r со старшим членом x^r, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,1]$ по весу 1 в метрике L_q.

Рассмотрим функцию

$$Q(t)=\begin{cases} S_{r,q,B}\left(\dfrac{t}{x_1}\right)x_1^r, & t\in[0,\,x_1),\\ R_{r,q}\left(\dfrac{t-a_i}{h_i}\right)h_i^r, & t\in[x_i,x_{i+1})\\ & (i=1,\,2,\,\ldots,\,n-1),\\ (t-1)^r, & t\in[x_n,\,1],\end{cases}$$

где $a_i=0{,}5(x_{i+1}+x_i)$, $h_i=0{,}5(x_{i+1}-x_i)$.

По определению функции $Q(t)$ имеем

$$\int\limits_0^1|K(t)|^q\,dt\geqslant\int\limits_0^1|Q(t)|^q\,dt. \tag{9}$$

С помощью равенств [3, 4]

$$\int\limits_{-1}^1|R_{r,q}(z)|^q\,dz=\frac{2[R_{r,q}(1)]^q}{rq+1},$$

$$\int\limits_0^1|S_{r,q,B}(z)|^q\,dz=\frac{|S_{r,q,B}(1)|^q}{rq+1}$$

находим

$$\int\limits_0^1|Q(t)|^q\,dt=\int\limits_0^{x_1}\left|x_1^rS_{r,q,B}\left(\frac{t}{x_1}\right)\right|^q dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\left|h_i^rR_{r,q}\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right)\right|^q dt+\int\limits_{x_n}^1|(t-1)^r|^q\,dt=$$

$$=\frac{x_1^{rq+1}|S_{r,q,B}(1)|^q}{rq+1}+\frac{2[R_{r,q}(1)]^q}{rq+1}\sum_{m=1}^{n-1}h_m^{rq+1}+\frac{(1-x_n)^{rq+1}}{rq+1}. \tag{10}$$

Воспользовавшись методом [5] (с. 222—224), получим, что величина (10) принимает наименьшее значение при узлах

$$x_1=\sqrt[r]{R_{r,q}(1)/|S_{r,q,B}(1)|}\,h,\qquad x_k=x_1+2(k-1)h\qquad(k=2,\,3,\,\ldots,\,n), \tag{11}$$

где

$$h=\frac{\sqrt[r]{|S_{r,q,B}(1)|}}{2(n-1)\sqrt[r]{|S_{r,q,B}(1)|}+\sqrt[r]{R_{r,q}(1)}\,\left(\sqrt[r]{|S_{r,q,B}(1)|}+1\right)}.$$

Пусть $Q^*(t)$ означает функцию $Q(t)$ при узлах (11). Тогда из (9) и (10) следует

$$\int\limits_0^1|K(t)|^q\,dt\geqslant\int\limits_0^1|Q^*(t)|^q\,dt=\frac{[R_{r,q}(1)]^q}{rq+1}h^{rq}, \tag{12}$$

откуда видно, что при $K(t) \equiv Q^*(t)$ величина (3) принимает наименьшее значение.

Пусть в формуле (1) узлы совпадают со значениями (11). Для определения весов формулы воспользуемся методом С. М. Никольского [1].

В итоге получим, что функция $K(t)$ совпадает с функцией $Q^*(t)$ при следующих значениях весов

$$\left.\begin{aligned} A_{nj} &= \left[\frac{1}{(j+1)!} R_{r,q}^{(j+1)/r}(1) + \frac{(-1)^j}{r!} R_{r,q}^{(r-1-j)}(1)\right] h^{j+1}, \\ A_{mj} &= \frac{(-1)^j}{r!}\left[R_{r,q}^{(r-1-j)}(1) - R_{r,q}^{(r-1-j)}(-1)\right] h^{j+1} \\ &\qquad (m=2, 3, \ldots, n-1), \\ A_{1j} &= \frac{(-1)^j}{r!}\left[x_1^{j+1} S_{r,q,B}^{(r-1-j)}(1) - R_{r,q}^{(r-1-j)}(-1) h^{j+1}\right] \\ &\qquad (j=0, 1, \ldots, r-1). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Итак, при узлах (11) и весах (13) неравенство (12) превращается в равенство. При этом по (12) получаем для формулы (1) со значениями (11) и (13) оценку ошибки в виде

$$\sup_{f \in W_{0I(\nu)}^{(r)} L_p} |R_n[f]| = \frac{R_{r,q}(1)}{(rq+1)^{1/q}} h^r. \tag{14}$$

Таким образом, доказана для случая $\varrho = r - 1$

Теорема 1. *Формула* (1) *с узлами* (11) *и весами* (13) *является наилучшей среди формул* (1) *на множестве* $W_{0I(\nu)}^{(r)} L_p$. *Для этой формулы справедлива оценка* (14).

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть* r *— четное,* $S_{r,q,B}(1) > 0$. *Тогда формула, полученная по теореме* 1, *является наилучшей на множестве* $W_{0I(\nu)}^{(r)} L_p$ *и среди формул* (1) *при* $\varrho = r - 2$*.

Замечание 1. С помощью теоремы из [6] и доказанных выше теорем легко выписываются наилучшие формулы вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\rho} A_{ij} f^{(j)}(x_i) + \sum_{l \in I(\nu)} B_l f^{(l)}(0) + R_n(f) \tag{15}$$

на множестве $W^{(r)} L_p$ при $\varrho = r - 1$ и $\varrho = r - 2$.

Замечание 2. Из приведенной теоремы 2 как частные случаи следуют теоремы М. Б. Аксеня и А. Х. Турецкого о наилучших формулах (1) для $\varrho = r - 2$ (r — четное) на множествах $W_0^{(r)} L_p$ и $W^{(r)} L_p$ при $1 < p \leqslant \infty$. Эти теоремы представляют собой предельные случаи теоремы 2 при $I(\nu) \equiv I_r$ и $I(\nu) \equiv$ пустое множество. Аналогично теорема 1 обобщает соответствующие результаты Н. Е. Лушпая [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 90 (1971).

* Для $q = 2$ неравенство $S_{r,q,B}(1) > 0$ доказывается легко.

3. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем., № 1, 15 (1966).
4. Левин М. И., Третья респ. конфер. матем. Белоруссии, Тезисы докладов, ч. 1, 189 (1971).
5. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
6. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 449 (1972).
7. Лушпай Н. Е., Изв. ВУЗов, Математика, **91**, № 12, 53 (1969).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
12/VI 1974

M. LEVIN, M. LEVINA

MÕNINGATE FUNKTSIOONIHULKADE PARIMATEST KVADRATUURVALEMITEST

Olgu $I(\nu)=\{i_1, i_2, \ldots, i_\nu\}\subset\{0, 1, \ldots, r-1\}$, $W^{(r)}_{0I(\nu)}L_p$ — kõigi selliste funktsioonide $f(x)$ hulk, millel lõigus $[0; 1]$ on absoluutselt pidev $r-1$ järku tuletis ja rahuldavad tingimused

$$f^{(i_k)}(0)=0 \quad (i_k\in I(\nu)) \quad \|f^{(r)}(x)\|_{L_p(0,1)}\leqslant M$$

Sellel hulgal on saadud parim kvadratuurvalem (1), s. o. sõlmed $\{x_k\}$ ja kaalud $\{A_{kj}\}$ valemile (1) on leitud $\varrho=r-1$ ja $\varrho=r-2$ (r — paarisarv) jaoks tingimusest, et suurus

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{0I(\nu)}L_p} |R_n[f]|$$

omandaks vähima väärtuse. Hulgal $W^{(r)}L_p$ on vaadeldud valemi (15) ekstreemumülesannet.

M. LEVIN, M. LEVINA

THE BEST QUADRATURE FORMULA FOR SOME SETS OF FUNCTION

Let $I(\nu)=\{i_1, \ldots, i_\nu\}\subset\{0, 1, \ldots, r-1\}$, $W^{(r)}_{0I(\nu)}L_p$ be a set of functions $f(x)$ having absolute continuity derivate of order $r-1$, and satisfying the conditions

$$f^{(i_k)}(0)=0 \quad (i_k\in I(\nu)) \quad \|f^{(r)}(x)\|_{L_p(0,1)}\leqslant M.$$

The best quadrature formula (1) has been built on this set. The knots $\{x_k\}$ and the weights $\{A_{kj}\}$ for $\varrho=r-1$ (and $\varrho=r-2$ if r is even) are found from the condition that the value

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{0I(\nu)}L_p} |R_n[f]|$$

assumes the minimal significance.

The extremal problem has been considered for formula (15) on the set $W^{(r)}L_p$.