EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.1.16

УДК 518 : 517.392

*Ю. ГИРШОВИЧ*

# О НЕКОТОРЫХ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

*J. GIRŠOVITŠ.* MONEDEST PARIMATEST LÕPMATU INTEGREERIMISPIIRKONNAGA KVADRATUURVALEMITEST

*Y. GIRSHOVICH.* ON SOME BEST QUADRATURE FORMULAS OVER THE INFINITE INTERVAL

Пусть $W^{(1)}L_1$ обозначает множество всех абсолютно непрерывных на $[0,\infty)$ функций $f(x)$, для которых $\int\limits_0^\infty |f'(x)|\,dx \leqslant M$ ($M$ — заданное число), а $W^{(1)}L_\infty$ — множество всех функций $f(x)$, для которых $\operatorname{supvrai}|f'(x)| \leqslant M$. Через $\overset{(1)}{W_0}L_1$ и $\overset{(1)}{W_0}L_\infty$ обозначаются множества всех функций $f(x)$, принадлежащих соответственно множествам $W^{(1)}L_1$ и $W^{(1)}L_\infty$ и удовлетворяющих условию $f(0)=0$.

Пусть $\varphi(x)$ суммируема и положительна на $[0,\infty)$. Рассмотрим квадратурные формулы вида

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

где $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \infty$.

Формула (1) называется наилучшей [1] на множестве $H$, если ее узлы и коэффициенты выбраны так, чтобы величина

$$R_n[H] = \sup_{f\in H} |R_n(f)|$$

приняла наименьшее значение.

Найдем наилучшие формулы (1) на множествах $W^{(1)}L_1$ и $\overset{(1)}{W_0}L_1$, а при $\varphi(x)=e^{-x}$ на множествах $W^{(1)}L_\infty$ и $\overset{(1)}{W_0}L_\infty$.

Введем обозначения:

$$\omega(x) = \int\limits_x^\infty \varphi(t)\,dt, \qquad E(u) = \begin{cases} 1, & u>0 \\ 0, & u\leqslant 0, \end{cases}$$

$$B_n = 0, \qquad B_j = \sum_{k=j+1}^n A_k \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{2}$$

Теорема 1. *Единственной наилучшей на множестве $W^{(1)}L_1$ квадратурной формулой* (1) *является формула*

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x)f(x)\,dx = \frac{\omega(0)}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) + R_n(f),$$

*если узлы ее есть решения уравнений*

$$\omega(x_k)=\omega(0)(2n-2k+1)/(2n) \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n), \tag{3}$$

*верхняя грань ошибки этой формулы равна*

$$R_n[W^{(1)}L_1]=M\omega(0)/(2n).$$

Доказательство. Легко видеть [1,2], что

$$R_n[W^{(1)}L_1]=M\sup_{[0,\infty)}|K(x)|,$$

где $K(x)=\omega(x)-\sum_{k=1}^{n}A_kE(x_k-x), \quad B_0=\omega(0).$

Очевидно, что

$$\sup_{[0,x_1)}|K(x)|=\omega(0)-\omega(x_1), \qquad \sup_{[x_n,\infty)}|K(x)|=\omega(x_n).$$

Кроме того, для $k=1,2,\ldots,n-1$

$$\sup_{[x_k,x_{k+1})}|K(x)|=\sup_{[x_k,x_{k+1})}|\omega(x)-B_k|\geqslant\frac{\omega(x_k)-\omega(x_{k+1})}{2},$$

причем равенство достигается здесь ([3], с. 58) лишь при

$$B_k=0{,}5[\omega(x_k)+\omega(x_{k+1})] \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1). \tag{4}$$

Следовательно,

$$\sup_{[0,\infty)}|K(x)|\geqslant\max\{\omega(0)-\omega(x_1),\ \omega(x_n),\ \max_{1\leqslant k\leqslant n-1}0{,}5[\omega(x_k)+\omega(x_{k+1})]\}. \tag{5}$$

Правая часть этого неравенства достигает наименьшего значения, равного $\omega(0)/2n$, только при условиях (3). Так как при (4) неравенство (5) превращается в равенство, то этим условия (3) и (4) определяют единственную наилучшую формулу (1). Из (2)—(4) следует, что $A_k=\omega(0)/n$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Единственной наилучшей на множестве* $W_0^{(1)}L_1$ *формулой* (1) *является формула*

$$\int_0^\infty \varphi(x)f(x)\,dx=\frac{2\omega(0)}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)+R_n(f),$$

*если узлы ее есть решения уравнений*

$$\omega(x_k)=\omega(0)(2n+1-2k)/(2n+1) \qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

*верхняя грань ошибки этой формулы равна*

$$R_n[W_0^{(1)}L_1]=M\omega(0)/(2n+1).$$

Теорема 3. *На множестве* $W^{(1)}L_\infty$ *единственной наилучшей формулой* (1) *при* $\varphi(x)=e^{-x}$ *является формула*

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)f\left(\ln\frac{n(n+1)}{(n-k+1)^2}\right)+R_n(f).$$

*Для этой формулы* $R_n[W^{(1)}L_\infty]=M\ln(1+1/n)$.

Доказательство. Нетрудно заметить [1,2], что

$$R_n[W^{(1)}L_\infty]=M\int_0^\infty |K(x)|\,dx,$$

где $K(x)=e^{-x}-\sum_{k=1}^{n} A_k E(x_k-x)$, $\quad B_0=1.$

Имеем

$$\int_0^\infty |K(x)|\,dx=\int_0^{x_1} |e^{-x}-1|\,dx+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |e^{-x}-B_k|\,dx+\int_{x_n}^\infty e^{-x}\,dx\geqslant$$

$$\geqslant e^{-x_1}-1+x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(e^{-\frac{x_k}{2}}-e^{-\frac{x_{k+1}}{2}}\right)^2+e^{-x_n}\geqslant$$

$$\geqslant e^{-x_1}-1+x_1+\left(e^{-\frac{x_1}{2}}-e^{-\frac{x_n}{2}}\right)^2/(n-1)+e^{-x_n}\geqslant \ln(1+1/n),$$

причем знак равенства достигается здесь только при [4]

$$B_k=e^{-\frac{x_k+x_{k+1}}{2}}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

и

$$e^{-\frac{x_k}{2}}=e^{-\frac{x_1}{2}}-\left(e^{-\frac{x_1}{2}}-e^{-\frac{x_n}{2}}\right)(k-1)/(n-1)\qquad (k=2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$e^{-x_1}=n/(n+1),\qquad e^{-x_n}=1/n(n+1),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Аналогично доказывается

Теорема 4. *Единственной наилучшей на множестве* $W_0^{(1)}L_\infty$ *формулой* (1), *где* $\varphi(x)=e^{-x}$, *является формула*

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)\,dx=\frac{2}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)f\left(2\ln\frac{n+1}{n+1-k}\right)+R_n(f).$$

*Для этой формулы*

$$R_n[W_0^{(1)}L_\infty]=M/(n+1).$$

Задачи построения некоторых квадратурных формул с весовой функцией и наилучших на заданных множествах функций рассматривались ранее, например, в [5–12].

ЛИТЕРАТУРА


1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 90 (1971).
3. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
4. Бернштейн С. Н., ДАН СССР, **117**, 405 (1927).
5. Левин М. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, № 222, 15 (1965).
6. Аксень М. Б., Тр. 1 респ. конф. матем. Белоруссии, Минск, 5, 1965.
7. Лебедь Г. К., Матем. заметки, **3**, № 5, 577 (1968).
8. Лебедь Г. К., Изв. АН СССР, Сер. матем., **34**, № 3, 639 (1970).
9. Schoenberg I. J., Advances Math., 4, No. 3, 277 (1970).
10. Coman Gh., Studii și cercetări mat. București, **25**, № 4, 495 (1973).
11. Аксень В. Н., Изв. АН БССР, Физ. Матем., № 1, 131 (1974).
12. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **23**, 179 (1974).


*Министерство здравоохранения ЭССР*
*Вычислительный центр здравоохранения*

Поступила в редакцию
2/VII 1974