EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.1.14

LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.3 : 62—50

С. УЛЬМ

К ПРИНЦИПУ СОГЛАСОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

S. *ULM*. KOOSTÖÖ TASAKAALUPRINTSIIBIST

S. *ULM*. ON THE INTERACTION BALANCE PRINCIPLE

Рассматривается применение принципа согласования взаимодействий [1] для декомпозиции одного класса задач выпуклого программирования. Общая теорема о координируемости получена на основании необходимых и достаточных условий минимума. Приводится пример о применении этой теоремы.

1. Пусть задача нелинейного программирования представлена в виде

$$F(x_1, \ldots, x_n) \to \min_{x \in X}, \tag{1}$$

где

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n; \tag{2}$$

т. е. $x_i \in X_i$; x_i — в общем векторы.

Разложим задачу (1)—(2) некоторым образом на подзадачи

$$f_i(x_i, u_i, \beta) \to \min_{\substack{x_i \in X_i \\ u_i \in U_i}} \quad (i=1, \ldots, n), \tag{3}$$

где $U_i = \{u_i\}$ — так наз. множества связующих входов; $B = \{\beta\}$ — множество координирующих входов второго уровня (ср. [1]).

При фиксированном β обозначим решение (не обязательно единственное) i-й подзадачи (3) через $x_i(\beta)$, $u_i(\beta)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Для осуществления процесса координации в [1] введены так наз. функции взаимодействия $K_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, связывающие подзадачи (3) с общей задачей (1)—(2). Пусть $K_i(X) = U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Для каждого β можно вычислить значения $K_i(x(\beta))$, где $x(\beta) = (x_1(\beta), \ldots, x_n(\beta))$ — некоторый вектор решения подзадач.

Будем говорить (ср. [1]), что при выбранных f_i, $K_i(x)$, B

а) к задаче (1)—(2) применим принцип согласования взаимодействий, если из предположения выполнения равенств

$$u_i(\beta) = K_i(x(\beta)) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{4}$$

следует

$$x(\beta) = \hat{x}, \tag{5}$$

где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ — решение задачи (1)—(2);

б) задача (1)—(2) координируема с помощью принципа согласования взаимодействий, если этот принцип применим и существуют $\hat{\beta} \in B$ и соответствующие $x_i(\hat{\beta})$, $u_i(\hat{\beta})$ такие, что соотношения (4) выполняются.

Теорема. *Пусть*

1° $F(x)$ — *выпуклая дифференцируемая функция;*

2° X_i — *выпуклые замкнутые ограниченные множества;*

3° $f_i(x_i, u_i, \beta)$ *для каждого* $\beta \in B$ *относительно* x_i, u_i *выпуклые дифференцируемые функции;*

4° $U_i = K_i(X)$ — *выпуклые замкнутые ограниченные множества;*

5° *существуют* $\beta \in B$ *и соответствующий* $x(\beta)$ *такие, что* *

$$\left(\frac{\partial f_i(x_i(\beta), K_i(x(\beta)), \beta)}{\partial x_i}, \; x_i - x_i(\beta) \right) \geqslant 0 \qquad (x_i \in X_i) \tag{6}$$

и

$$\left(\frac{\partial f_i(x_i(\beta), K_i(x(\beta)), \beta)}{\partial u_i}, \; u_i - K_i(x(\beta)) \right) \geqslant 0 \quad (u_i \in U_i); \tag{7}$$

$$(i=1, \ldots, n);$$

6° *для каждого* $\beta \in B$ *и* $x(\beta)$, *удовлетворяющих* (6) *и* (7), *справедливо соотношение*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F(x(\beta))}{\partial x_i}, \; x_i - x_i(\beta) \right) \geqslant 0 \quad (x_i \in X_i). \tag{8}$$

Тогда задача (1)—(2) *координируема с помощью принципа согласования взаимодействий.*

Доказательство основывается на необходимых и достаточных условиях минимума (см., напр., [2]).

Замечание. Условие 6° теоремы эквивалентно условию 6°': для каждого $\beta \in B$ и $x(\beta)$, удовлетворяющих (6) и (7), справедливы соотношения $(i = 1, \ldots, n)$

$$\left(\frac{\partial F(x(\beta))}{\partial x_i}, \; x_i - x_i(\beta) \right) \geqslant 0 \qquad (x_i \in X_i). \tag{9}$$

Следствие. Пусть выполнены условия 1°—5° теоремы и пусть для каждого $\beta \in B$ и соответствующего $x(\beta)$, удовлетворяющих (6) и (7), справедливы равенства

$$\frac{\partial f_i(x_i(\beta), K_i(x(\beta)), \beta)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x(\beta))}{\partial x_i} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{10}$$

Тогда задача (1)—(2) координируема с помощью принципа согласования взаимодействий.

2. Рассмотрим пример применения теоремы. Пусть дана задача

$$F(x) = F_1(x_1) + F_2(x_2) + F_3(x_3) + F_{12}(x_1, x_2) + F_{23}(x_2, x_3) + F_{31}(x_3, x_1) \to \min,$$
$$x_i \in X_i \quad (i=1, 2, 3). \tag{11}$$

Выбираем

$K_1(x) = x_2$; $K_2(x) = x_3$; $K_3(x) = x_1$; $B = X_1 \times X_2 \times X_3$, т. е. $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, где $\dim \beta_i = \dim x_i$. Тогда $U_1 = K_1(X) = X_2$; $U_2 = K_2(X) = X_3$; $U_3 = K_3(X) = X_1$.

Далее выбираем

$$f_1(x_1, u_1, \beta) = F_1(x_1) + F_{12}(x_1, u_1) + (\beta_1, x_1) - (\beta_2, u_1), \tag{12}$$
$$f_2(x_2, u_2, \beta) = F_2(x_2) + F_{23}(x_2, u_2) + (\beta_2, x_2) - (\beta_3, u_2), \tag{13}$$
$$f_3(x_3, u_3, \beta) = F_3(x_3) + F_{31}(x_3, u_3) + (\beta_3, x_3) - (\beta_1, u_3). \tag{14}$$

* Здесь и в дальнейшем $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_{i1}}, \ldots, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{in_i}} \right)$ и т. д.

Допустим, что условия 1°—3° теоремы выполняются (следовательно, выполняется и условие 4°).

Покажем, что выполнимы также условия 5° и 6° (или 6°′).

Предположим вначале, что существуют $\beta\in B$ и соответствующий $x(\beta)$ такие, что соотношения (6) и (7) выполняются, т. е.

$$\left(\frac{dF_1(x_1(\beta))}{dx_1}+\frac{\partial F_{12}(x_1(\beta),x_2(\beta))}{\partial x_1}+\beta_1,\ x_1-x_1(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_1\in X_1), \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial F_{12}(x_1(\beta),x_2(\beta))}{\partial x_2}-\beta_2,\ x_2-x_2(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_2\in X_2), \tag{16}$$

$$\left(\frac{dF_2(x_2(\beta))}{dx_2}+\frac{\partial F_{23}(x_2(\beta),x_3(\beta))}{\partial x_2}+\beta_2,\ x_2-x_2(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_2\in X_2), \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial F_{23}(x_2(\beta),x_3(\beta))}{\partial x_3}-\beta_3,\ x_3-x_3(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_3\in X_3), \tag{18}$$

$$\left(\frac{dF_3(x_3(\beta))}{dx_3}+\frac{\partial F_{31}(x_3(\beta),x_1(\beta))}{\partial x_3}+\beta_3,\ x_3-x_3(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_3\in X_3), \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial F_{31}(x_3(\beta),x_1(\beta))}{\partial x_1}-\beta_1,\ x_1-x_1(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_1\in X_1). \tag{20}$$

Суммируя неравенства (15) и (20), получаем

$$\left(\frac{dF_1(x_1(\beta))}{dx_1}+\frac{\partial F_{12}(x_1(\beta),x_2(\beta))}{\partial x_1}+\frac{\partial F_{31}(x_3(\beta),x_1(\beta))}{\partial x_1},\ x_1-x_1(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_1\in X_1). \tag{21}$$

Аналогично, суммируя соответственно неравенства (16) и (17), (18) и (19), находим

$$\left(\frac{dF_2(x_2(\beta))}{dx_2}+\frac{\partial F_{12}(x_1(\beta),x_2(\beta))}{\partial x_2}+\frac{\partial F_{23}(x_2(\beta),x_3(\beta))}{\partial x_2},\ x_2-x_2(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_2\in X_2) \tag{22}$$

и

$$\left(\frac{dF_3(x_3(\beta))}{dx_3}+\frac{\partial F_{23}(x_2(\beta),x_3(\beta))}{\partial x_3}+\frac{\partial F_{31}(x_3(\beta),x_1(\beta))}{\partial x_3},\ x_3-x_3(\beta)\right)\geqslant 0 \quad (x_3\in X_3). \tag{23}$$

Из (21)—(23) видно, что условие 6°′ выполняется. Покажем, что существуют $\beta\in B$ и соответствующий $x(\beta)$ такие, при которых соотношения (6) и (7) имеют место. Для этого выбираем

$$\beta_1=\frac{\partial F_{31}(\hat{x}_3,\hat{x}_1)}{\partial x_1}, \tag{24}$$

$$\beta_2=\frac{\partial F_{12}(\hat{x}_1,\hat{x}_2)}{\partial x_2}, \tag{25}$$

$$\beta_3=\frac{\partial F_{23}(\hat{x}_2,\hat{x}_3)}{\partial x_3}. \tag{26}$$

Из (15)—(20) следует, что существуют

$$\begin{aligned} x_1(\beta) &= \hat{x}_1, & x_2(\beta) &= \hat{x}_2, & x_3(\beta) &= \hat{x}_3, \\ u_1(\beta) &= \hat{x}_2, & u_2(\beta) &= \hat{x}_3, & u_3(\beta) &= \hat{x}_1, \end{aligned} \tag{27}$$

удовлетворяющие соотношениям (6) и (7). Итак, условия 5° и 6° теоремы выполняются, следовательно, задача (11) координируема с помощью принципа согласования взаимодействий.

Для координации можно решить систему

$$\begin{aligned} u_1(\beta) &= x_2(\beta), \\ u_2(\beta) &= x_3(\beta), \\ u_3(\beta) &= x_1(\beta) \end{aligned} \tag{28}$$

или систему

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial F_{31}(x_3(\beta), x_1(\beta))}{\partial x_1}, \\ \beta_2 &= \frac{\partial F_{12}(x_1(\beta), x_2(\beta))}{\partial x_2}, \\ \beta_3 &= \frac{\partial F_{23}(x_2(\beta), x_3(\beta))}{\partial x_3}. \end{aligned} \tag{29}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Месарович М., Мако Д., Такахара И., Теория иерархических многоуровневых систем, М., 1973.
2. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **6**, № 5, 787 (1966).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/IX 1974

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 1

УДК 518 : 517.392

M. LEVIN, A. JÕGI, M. LEVINA

ON THE OPTIMAL CUBATURE FORMULAS

M. LEVIN, A. JÕGI, M. LEVINA. OPTIMAALSETEST KUBATUURVALEMITEST

М. ЛЕВИН, А. ЙЫГИ, М. ЛЕВИНА. ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

The present paper is concerned with the construction problem of some optimal [1,2] formulas for numerical integration.

1. Let H_1 be the Hilbert space of functions $\varphi(z)$ defined on the set $z \in E_1$, where the inner product $(\alpha(z), \gamma(z))_{H_1}$ is introduced; H_2 is the ~~КI и КВr несколько острых максимумом расположено в области щели~~