EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.1.02

УДК 519.24

Юлле КОТТА

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О РАНГЕ НЕКОТОРЫХ МАТРИЦ

1. Пусть независимые p-мерные векторы $x_\alpha (\alpha = 1, \ldots, N)$ распределены $N(\mathrm{B}z_\alpha, \Sigma)$, где q-мерные векторы z_α и матрица Σ порядка $p \times p$ известны, а матрица В порядка $p \times q$ неизвестна. Обозначим матрицы

$$(x_1 \ldots x_N) = \mathrm{X}, \quad (z_1 \ldots z_N) = \mathrm{Z}, \quad \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} z_\alpha z'_\alpha = \mathrm{G}$$

и выразим оценку максимального правдоподобия неизвестной В через $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{XZ}'(\mathrm{ZZ}')^{-1}$. Для проверки гипотезы о том, что ранг матрицы В равен q^* при конкурирующей гипотезе, что он больше q^*, можно использовать следующий результат. Если ранг матрицы В равен q^*, тогда распределение статистики

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i,$$

где $\mu_{q^*+1}, \ldots, \mu_p$ — $p - q^*$ наименьших характеристических корней уравнения $|\hat{\mathrm{B}}\mathrm{G}\hat{\mathrm{B}}' - \mu\Sigma| = 0$, асимптотически стремится к χ^2-распределению с $(p - q^*)(q - q^*)$ степенями свободы [1]. С помощью этого результата получим критерий для проверки упомянутой выше гипотезы. Если N достаточно велико, тогда гипотеза с уровнем значимости α при

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i > \chi^2_{1-\alpha} [(p - q^*)(q - q^*)]$$

отвергается.

При наличии дополнительной информации в виде равенства $\mathrm{BH} = \mathrm{M}$, где Н матрица порядка $q \times s$ ранга $s (s < q)$ и обе матрицы известны, оценка максимального правдоподобия имеет вид [2]

$$\bar{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}} - (\hat{\mathrm{B}}\mathrm{H} - \mathrm{M}) [\mathrm{H}'(\mathrm{ZZ}')^{-1}\mathrm{H}]^{-1} \mathrm{H}'(\mathrm{ZZ}')^{-1}.$$

Первая цель настоящей статьи — получение критерия для проверки гипотезы о ранге матрицы В, который использует оценку $\bar{\mathrm{B}}$.

Далее, если ранг матрицы Z меньше q, то $(\mathrm{ZZ}')^{-1}$ не существует и матрица В неоцениваема, однако можно оценить матрицу BQ, если Q удовлетворяет условию $\mathrm{ZZ}'(\mathrm{ZZ}')^{-}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}$ и $(\cdot)^{-}$ означает обобщенную обратную матрицу [2]. Вторая цель статьи — получение критерия для проверки гипотезы о ранге оцениваемой матрицы BQ.

Если векторы x_α зависимы и

$$\operatorname{cov}(\operatorname{vec} \mathrm{X}) = \mathrm{R} \otimes \Sigma,$$

то оценка максимального правдоподобия принимает вид [3]

$$\overset{*}{\mathrm{B}} = \mathrm{X}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Z}'(\mathrm{Z}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{Z}')^{-1}.$$

Третья цель статьи — получение критерия, который использует оценку $\overset{*}{\mathrm{B}}$.

2. Теорема. *Пусть*

$$\operatorname{vec} \tilde{B}' \sim N(\operatorname{vec} B', \Sigma \otimes D_N),$$

где матрицы Σ *и* D_N *неособенные и ранг матрицы* B *порядка* $p \times q$ *равен* q^*. *Тогда распределение статистики*

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i,$$

где $\mu_{q^*+1}, \ldots, \mu_p$ — $p - q^*$ *наименьших характеристических корней уравнения* $\left| \tilde{\mathrm{B}} \frac{1}{N} D_N^{-1} \tilde{\mathrm{B}}' - \mu\Sigma \right| = 0$, *асимптотически стремится к* χ^2*-распределению с* $(p-q^*)(q-q^*)$ *степенями свободы.*

Доказательство базируется на известной теореме [1]. Пусть совместная плотность распределения вероятностей элементов матрицы U порядка $p \times q$ определяется выражением

$$(2\pi)^{-1/2pq} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathrm{U}\mathrm{U}') - \frac{1}{2} N \sum_{i=1}^{q^*} \lambda_i + \operatorname{tr}(\sqrt{N}\, \mathrm{U}\Phi') \right\}, \tag{1}$$

где

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_{q^*}} \end{pmatrix}.$$

Тогда распределение статистики

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i,$$

где $\mu_{q^*+1}, \ldots, \mu_p$ — $p - q^*$ наименьших корней уравнения

$$\left| \frac{1}{N} \mathrm{U}\mathrm{U}' - \mu \mathrm{I} \right| = 0, \tag{2}$$

асимптотически стремится к χ^2-распределению с $(p-q^*)(q-q^*)$ степенями свободы.

Покажем преобразование, с помощью которого совместная плотность распределения вероятностей элементов матрицы B сводится к плотности (1) и характеристическое уравнение $\left| \tilde{\mathrm{B}} \frac{1}{N} \mathrm{D}_N^{-1} \tilde{\mathrm{B}}' - \mu\Sigma \right| = 0$ — к уравнению, корни которого равны корням уравнения (2).

Так как $\operatorname{vec} \tilde{\mathrm{B}}' \sim N(\operatorname{vec} \mathrm{B}', \Sigma \otimes \mathrm{D}_N)$, то совместная плоскость распределения вероятностей элементов матрицы $\tilde{\mathrm{B}}$ имеет вид

$$K \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\operatorname{vec} \tilde{\mathrm{B}}' - \operatorname{vec} \mathrm{B}')' (\Sigma \otimes \mathrm{D}_N)^{-1} (\operatorname{vec} \tilde{\mathrm{B}}' - \operatorname{vec} \mathrm{B}') \right\},$$

где

$$K=(2\pi)^{-1/2pq}\left|\Sigma^{-1}\right|^{1/2q}\left|D_N^{-1}\right|^{1/2p}.$$

Обозначим элементы матрицы Σ^{-1} через σ^*_{ij} и k-строки матриц B и $\tilde{\mathrm{B}}$ соответственно через b'_k и $\tilde{b}'_k$. Тогда

$$(\operatorname{vec}\tilde{\mathrm{B}}'-\operatorname{vec}\mathrm{B}')'(\Sigma\otimes D_N)^{-1}(\operatorname{vec}\tilde{\mathrm{B}}'-\operatorname{vec}\mathrm{B}')=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{p}(\tilde{b}_i-b_i)'\sigma^*_{ij}D_N^{-1}(\tilde{b}_j-b_j)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{p}\sigma^*_{ij}(\tilde{b}_i-b_i)'D_N^{-1}(\tilde{b}_j-b_j)=\operatorname{tr}\Sigma^{-1}(\tilde{\mathrm{B}}-\mathrm{B})D_\Lambda^{-1}(\tilde{\mathrm{B}}-\mathrm{B})'.$$

Следовательно, совместную плотность распределения вероятностей элементов матрицы $\tilde{\mathrm{B}}$ можно представить следующим образом:

$$K\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\tilde{\mathrm{B}}D_N^{-1}\tilde{\mathrm{B}}')-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathrm{B}D_N^{-1}\mathrm{B}')+\operatorname{tr}(\Sigma^{-1}\mathrm{B}D_N^{-1}\tilde{\mathrm{B}}')\right\}.$$

Поскольку D_N^{-1} и Σ^{-1} симметрические неособенные матрицы, их можно представить соответственно в виде CC′ и FF′, где C и F неособенные реальные матрицы. С учетом этого факта плотность распределения примет вид

$$K\exp\left\{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathrm{C}'\tilde{\mathrm{B}}'\mathrm{F}\mathrm{F}'\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{C})-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathrm{C}'\mathrm{B}'\mathrm{F}\mathrm{F}'\mathrm{B}\mathrm{C})+\operatorname{tr}(\mathrm{C}'\tilde{\mathrm{B}}'\mathrm{F}\mathrm{F}'\mathrm{B}\mathrm{C})\right\}.$$

Как известно [4], существуют две такие ортогональные матрицы Γ_1 и Γ_2, что

$$\Gamma_1\mathrm{F}'\mathrm{B}\mathrm{C}\Gamma'_2=\sqrt{N}\,\Phi,$$

где

$$\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_\lambda & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \Phi_\lambda=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_{q^*}}\end{pmatrix}$$

и $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_{q^*}$ — ненулевые корни уравнения $|\mathrm{F}'\mathrm{B}\mathrm{C}\mathrm{C}'\mathrm{B}'\mathrm{F}-\lambda N\mathrm{I}|=0$. Вместо $\tilde{\mathrm{B}}$ введем новые переменные U, полагая, что

$$\tilde{\mathrm{B}}=(\mathrm{F}')^{-1}\Gamma'_1\mathrm{U}\Gamma_2\mathrm{C}^{-1}.$$

Поскольку якобиан этого преобразования $|\mathrm{C}^{-1}|^p\,|\mathrm{F}^{-1}|^q$, то совместную плотность распределения вероятностей элементов матрицы U можно записать в виде (1).

Характеристическое уравнение $\left|\tilde{\mathrm{B}}\frac{1}{N}D_N^{-1}\tilde{\mathrm{B}}'-\mu\Sigma\right|=0$ после преобразования примет вид

$$\left|\frac{1}{N}\Gamma'_1\mathrm{U}\Gamma_2\Gamma'_2\mathrm{U}'\Gamma_1-\mu\mathrm{I}\right|=0.$$

Поскольку Γ_1 и Γ_2 ортогональные матрицы, то корни этого уравнения равны корням уравнения (2).

3. Замечание 1. Учитывая (см. [5])

$$\operatorname{vec}\hat{\mathrm{B}}'\sim N(\operatorname{vec}\mathrm{B}',\Sigma\otimes(ZZ')^{-1}),$$

нетрудно показать, что

$$\operatorname{vec} \bar{\mathrm{B}}' \sim N(\operatorname{vec} \mathrm{B}', \Sigma \otimes \mathrm{T}),$$

где $\mathrm{T} = (\mathrm{ZZ}')^{-1} - (\mathrm{ZZ}')^{-1}\mathrm{H}[\mathrm{H}'(\mathrm{ZZ}')^{-1}\mathrm{H}]^{-1}\mathrm{H}'(\mathrm{ZZ}')^{-1}$ особенная матрица ранга $q-s$. Следовательно, доказанная теорема непосредственно не применима для получения критерия с целью проверки гипотезы о ранге матрицы B. Однако можно получить критерий для проверки гипотезы о ранге матрицы BW, где W такая матрица порядка $q \times l$ $(l \leqslant q-s)$, что $\mathrm{W}'\mathrm{TW}$ — неособенная матрица. Можно показать, что

$$\operatorname{vec}(\bar{\mathrm{B}}\mathrm{W})' \sim N(\operatorname{vec}(\mathrm{BW})', \Sigma \otimes \mathrm{W}'\mathrm{TW}).$$

Значит, матрица $\bar{\mathrm{B}}\mathrm{W}$ удовлетворяет условиям теоремы и если ранг BW равен q^*, то распределение статистики

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i,$$

где $\mu_{q^*+1}, \ldots, \mu_p$ — $p-q^*$ наименьших корней уравнения

$$|\bar{\mathrm{B}}\mathrm{W}(\mathrm{W}'\mathrm{TW})^{-1}\mathrm{W}'\bar{\mathrm{B}}' - \mu N \Sigma| = 0,$$

асимптотически стремится к χ^2-распределению с $(p-q^*)(l-q^*)$ степенями свободы.

Замечание 2. Пусть BQ какая-нибудь оцениваемая матрица порядка $p \times t$ и $\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Q}$ ее оценка. Можно показать, что

$$\operatorname{vec}(\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Q})' \sim N(\operatorname{vec}(\mathrm{BQ})', \Sigma \otimes \mathrm{Q}'(\mathrm{ZZ}')^{-}\mathrm{Q}).$$

Так как $\mathrm{Q}'(\mathrm{ZZ}')^{-}\mathrm{Q}$ — симметрическая неособенная матрица [2], то матрица $\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Q}$ удовлетворяет условиям теоремы. Значит, если ранг BQ равен q^*, то распределение статистики

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i,$$

где $\mu_{q^*+1}, \ldots, \mu_p$ — $p-q^*$ наименьших корней уравнения

$$|\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Q}[\mathrm{Q}'(\mathrm{ZZ}')^{-}\mathrm{Q}]^{-1}\mathrm{Q}'\hat{\mathrm{B}}' - \mu N \Sigma| = 0,$$

асимптотически стремится к χ^2-распределению с $(p-q^*)(t-q^*)$ степенями свободы.

Замечание 3. Известно [3], что

$$\operatorname{vec} \overset{*}{\mathrm{B}}{}' \sim N(\operatorname{vec} \mathrm{B}', \Sigma \otimes \mathrm{P}'\mathrm{RP}),$$

где $\mathrm{P} = \mathrm{R}^{-1}\mathrm{Z}'(\mathrm{ZR}^{-1}\mathrm{Z}')^{-1}$. Таким образом, матрица $\overset{*}{\mathrm{B}}$ удовлетворяет условиям теоремы и если ранг B равен q^*, то распределение статистики

$$N \sum_{i=q^*+1}^{p} \mu_i,$$

где $\mu_{q^*+1}, \ldots, \mu_p$ — $p-q^*$ наименьших корней уравнения

$$|\overset{*}{\mathrm{B}}\mathrm{ZR}^{-1}\mathrm{Z}'\overset{*}{\mathrm{B}}{}' - \mu N \Sigma| = 0,$$

асимптотически стремится к χ^2-распределению с $(p-q^*)(q-q^*)$ степенями свободы.

Замечание 4. Поскольку

$$\operatorname{vec} \hat{\mathrm{B}}' \sim N(\operatorname{vec} \mathrm{B}', \Sigma \otimes (\mathrm{ZZ}')^{-1}),$$

то в случае отсутствия дополнительной информации, критерий, полученный как следствие доказанной теоремы, совпадает с критерием, отмеченным в начале статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson T. W., J. Roy. Stat. Soc., **B10**, 1 (1948).
2. John J. A., J. Roy. Stat. Soc., **B32**, 1 (1970).
3. Tan W. Y., SIAM J. Appl. Math., **20**, 1 (1971).
4. Hsu P. L., Biometrika, **31**, No. 3—4 (1940).
5. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, М., 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
20/XI 1973

ÜLLE KOTTA

ASÜMPTOOTILINE KRITEERIUM MÕNEDE MAATRIKSITE ASTAKU KOHTA KÄIVATE HÜPOTEESIDE KONTROLLIMISEKS

Artiklis esitatakse kriteerium, mis võimaldab kontrollida hüpoteesi, et maatriksi astak on q^*, konkureeriva hüpoteesi korral on see astak suurem kui q^*. See kriteerium võimaldab arvestada uuritava maatriksi elementide kohta olemasolevat lisainformatsiooni, kontrollida hüpoteesi juhul, kui vaatlustulemuste järgi on hinnatavad ainult maatriksi elementide mõned lineaarkombinatsioonid, ja arvestada vaatlustulemuste korreleeritust.

ÜLLE KOTTA

ASYMPTOTIC TEST FOR THE RANK OF CERTAIN MATRICES

We have found a criterion for testing the hypothesis that the rank of the matrix is equal to q^* against the alternative that it is greater than q^*. This criterion permits 1) to take into account a prior information about the elements of the matrix; 2) to test the hypothesis in the case if only the linear combinations of the matrix are estimable; 3) to take into account the correlation of observations.