EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.1.15

УДК 517.949.8

Х. ЙОКК

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА НЕРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

H. JOKK. DIFERENTSSKEEMIDE KOONDUVUSEST EBAÜHTLASE VÕRGU KASUTAMISEL MITTELINEAARSETE TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEKS

H. JOKK. CONVERGENCE OF DIFFERENCE SCHEMES WITH NON-HOMOGENEOUS GRID FOR SOLVING NON-LINEAR SECOND-DEGREE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Для решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами обычно используются разностные схемы, которые в случае линейных уравнений совпадают с известными схемами А. А. Самарского [1]. По сравнению с [1] мы отказываемся от положительности или сохранения знаков коэффициентов линейной части уравнения. В статьях [2, 3] рассмотрены вопросы о сходимости разностных схем для линейных дифференциальных уравнений второго порядка и соответствующие задачи собственных значений.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &Lu\equiv-[k(x)u'(x)]'+r(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x,u(x),u('x)),\\ &l_1u\equiv\nu_1u(0)-k(0)u'(0)=\mu_1,\\ &l_2u\equiv\nu_2u(1)+k(1)u'(1)=\mu_2,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

где ν_1, ν_2 и μ_1, μ_2 — некоторые постоянные, а функции [1] $k(x)\in Q^{(1)}$, $q(x), r(x)\in Q$, $k(x)u'(v)\in C$ и $f(x,u,v)\in W^{(0,1,1)}$. Всюду в дальнейшем предполагается, что

$$|f'_u(x,u,v)|\leqslant M_1+M_2|u|^\alpha+M_3|v|^\alpha,$$
$$|f'_v(x,u,v)|\leqslant M_4+M_5|u|^\alpha+M_6|v|^\alpha,$$

где $\alpha=\mathrm{const}$ $(\alpha>0)$ и $1/\nu_1+1/\nu_2+\int\limits_0^1 dx/k(x)\neq0$, $0<c'\leqslant|k(x)|\leqslant c''$.

[1] Мы используем следующие обозначения: $C^{(k)}$ — класс k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$; $Q^{(k)}$ — класс k раз кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$, т. е. $u\in Q^{(k)}$, если u непрерывно дифференцируема k раз, за исключением конечного числа точек разрывов, где u и ее производные имеют конечные односторонние пределы: $Q^{(0)}=Q$; $C^{(0)}=C$; $W^{(k,l,m)}$ — класс нелинейных функций, которые имеют частные производные соответственно k, l и m-го порядка по первому, второму и третьему аргументу. При этом нелинейная функция и ее частные производные непрерывны по второму и третьему аргументу, а по первому — могут иметь конечное число разрывов первого рода вдоль некоторых прямых $x=x_i$. Если функция f имеет все частные производные до k-го порядка включительно, то используется обозначение $f\in W^{(k)}$.

Пусть дана неравномерная сетка ω_n на отрезке $[0,1]$, т. е. сетка, которая удовлетворяет условиям $0=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=1$,

$$h_k=x_k-x_{k-1} \quad \text{и} \quad \max\{\max_k h_k/h_{k+1}, \max_k h_{k+1}/h_k\}\leqslant c=\text{const}.$$

Используя разностные производные

$$y_x=(y_{i+1}-y_i)/h_{i+1}, \quad y_{\bar{x}}=(y_i-y_{i-1})/h_i, \quad y_{\hat{x}}=(y_{i+1}-y_i)/\hbar_i,$$

где

$$\hbar_i=0{,}5(h_i+h_{i+1}),$$

составим дискретную задачу (разностную схему)

$$\begin{gathered}-(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}+b^+y_x+b^-y_{\bar{x}}+dy=\varphi^++\varphi^-,\\ \nu_1y_0-k(0)\,[h_1/2\hbar_1(y_{x,0}-y_{x,1})+y_{x,0}]=\mu_1,\\ \nu_2y_n+k(1)\,[h_n/2\hbar_{n-1}(y_{\bar{x},n}-y_{\bar{x},n-1})+y_{\bar{x},n}]=\mu_2,\end{gathered} \tag{2}$$

где коэффициенты $a_i(a_i\neq 0)$, b_i^+, b_i^-, d_i — постоянные. В компонентной записи φ^+ и φ^- имеют вид

$$\varphi_i^+=h_{i+1}/2\hbar_i f(x_i,y_i,y_{x,i}), \quad \varphi_i^-=h_i/2\hbar_i f(x_i,y_i,y_{\bar{x},i})$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Пусть выполнены следующие условия [2]

1° $0<c'<|a_i|<c''$ $\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$;

2° $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,\ (x_{i-1},x_i)\cap\mathfrak{M}=\varnothing} |(\overset{0}{a}_i)^{-1}-(a_i)^{-1}|\to 0$ при $n\to\infty$;

3° $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{|b_i^+|,|b_i^-|\}\leqslant c_1=\text{const}$, $\quad \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,\ (x_i,x_{i+1/2})\cap\mathfrak{M}=\varnothing}|\overset{0}{b}{}_i^+-b_i^+|\to 0$,

$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,\ (x_{i-1/2},x_i)\cap\mathfrak{M}=\varnothing}|\overset{0}{b}{}_i^- - b_i^-|\to 0$ при $n\to\infty$;

4° $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}|d_i|\leqslant c_2=\text{const}$, $\quad \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1,\ (x_{i-1/2},x_{i+1/2})\cap\mathfrak{M}=\varnothing}|\overset{0}{d}_i-d_i|\to 0$ при $n\to\infty$.

где

$$\overset{0}{a}_i=\Big(1/h_i\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx/k(x)\Big)^{-1}, \quad \overset{0}{d}_i=1/\hbar_i\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}q(x)\,dx, \quad \overset{0}{b}{}_i^-=1/\hbar_i\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_i}r(x)\,dx,$$

$$\overset{0}{b}{}_i^+=1/\hbar_i\int\limits_{x_i}^{x_{i+1/2}}r(x)\,dx, \quad x_{i+1/2}=0{,}5(x_i+x_{i+1}) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Теорема 1. *Пусть задача* (1) *имеет решение* u^*, *функции* $k(x)\in Q^{(1)}$, $r(x), q(x)\in Q$, $f(x,u,v)\in W^{(0,1,1)}$, *условия* 1°—4° *выполнены и линеаризированная задача*

[2] Через $\mathfrak{M}$ обозначено множество всех точек разрывов функций k, q, r и f и их допустимых производных (имеются в виду производные, существование которых предполагается в определении классов Q и W).

$$-[k(x)u'(x)]' + [r(x) - f'_v(x, u^*(x), (u^*(x))')]u'(x) + \\ + [q(x) - f'_u(x, u^*(x), (u^*(x))')]u(x) = 0, \quad l_1 u = 0, \ l_2 u = 0 \tag{3}$$

имеет лишь нулевое решение $u(x) \equiv 0$.

Тогда задача (2) *имеет при* $n > n_0$ *единственное решение* y^*_n *и при* $n \to \infty$ *справедлива сходимость*

$$\|u^* - y^*_n\| = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |u^*(x_i) - y^*_i| + \Big(\sum_{i=0}^{n-1} h_{i+1} |u^*_x(x_i) - y^*_{x,i}|^p\Big)^{1/p} \to 0,$$

где $p \geqslant \alpha + 1$ — *любое фиксированное число.*

Теперь рассмотрим краевую задачу (1), где

$$k(x), r(x), q(x) \in Q^{(2)} \quad \text{и} \quad f(x, u, v) \in W^{(2)}, \tag{4}$$

и соответствующую ей дискретную задачу (2), где постоянные определены следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
a_i &= k(x_i - 0{,}5h_i) + O(h_i^2), \\
d_i &= \frac{h_i q_i^- + h_{i+1} q_i^+}{2\hbar_i} + \alpha_1 (h^2 q'^-)_{\hat{x},i} + O(\hbar_i^2), \\
b_i^- &= \frac{h_i}{2\hbar_i} r_i^- - \frac{\alpha_2 h_i^2}{\hbar_i} r'^-_i + O(\hbar_i^2), \qquad (\alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const}) \\
b_i^+ &= \frac{h_{i+1}}{2\hbar_i} r_i^+ + \frac{\alpha_2 h_{i+1}^2}{\hbar_i} r'^+_i + O(\hbar_i^2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$a_i = \overset{0}{a}_i, \quad d_i = \overset{0}{d}_i, \quad b_i^- = \overset{0}{b}{}_i^-, \quad b_i^+ = \overset{0}{b}{}_i^+ \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{6}$$

Тогда верна

Теорема 2. *Пусть существует единственное решение* $u(x) \equiv 0$ *линеаризированной задачи* (3) *и решение* u^* *задачи* (1) *с условиями* (4). *Тогда задача* (2) *с коэффициентами* (5) *или* (6) *имеет при* $n > n_0$ *единственное решение* y^*_n *и на сетке* $\omega_n \supset \mathfrak{M}$ *справедлива оценка*

$$\|y^*_n - u^*\| \leqslant c_p [\hbar_1^2 + \hbar_{n-1}^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} h_i^{2p+1}\Big)^{1/p}] \quad (0 < c_p = \mathrm{const}).$$

Доказательство теорем 1 и 2 основывается на результатах [4] о собственной сходимости операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.
2. Йокк Х., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 31 (1973).
3. Йокк Х., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 227 (1973).
4. Вайникко Г. М., Карма О. О., Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (в печати).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
8/X 1973