

Ф. КАПЛАНСКИЙ

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Исходные положения. Как показано в работе [1], развитие турбулентной вихревой пары описывается в безразмерных переменных следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - 3\zeta + (u - x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (v - y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu_T \nabla^2 \zeta, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - 2T + (u - x) \frac{\partial T}{\partial x} + (v - y) \frac{\partial T}{\partial y} = a_T \nabla^2 T, \quad (3)$$

где  $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ,  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,

с граничными условиями

при  $x=0$   $\psi=0$ ,  $\zeta=0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x}=0$ ; (4)

при  $\left. \begin{matrix} x=\infty \\ y=\infty \end{matrix} \right\}$   $\psi=0$ ,  $\zeta=0$ ,  $T=0$ ; (5)

а также начальными условиями

при  $\tau=0$   $\psi(x, y, 0) = \psi_0$ ,  $\zeta(x, y, 0) = \zeta_0$ ,  $T(x, y, 0) = T_0$ . (6)

Последние дополняются интегральными условиями однозначности

$$\iint_{-\infty}^{\infty} v \, dx \, dy = 1/l_1, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} T \, dx \, dy = 1/l_2, \quad (7)$$

где  $l_1, l_2$  — произвольные постоянные, принятые равными 1.

Преобразование уравнений (1) — (3) производилось путем отнесения соответствующих размерных величин к зависящим от времени масштабам длины  $L = (3l_1 I t / \rho)^{1/3}$ , скорости  $\tilde{L} = 1/3 (3l_1 I / \rho)^{1/3} t^{-2/3}$  и температуры  $\theta = l_2 Q / c_p \rho (3l_1 I t / \rho)^{-2/3}$ . В отличие от [1] здесь в уравнения (1) и (3) включены производные  $\partial \zeta / \partial \tau$  и  $\partial T / \partial \tau$ , так как система (1) — (3) решается итерационным методом. Безразмерное время  $\tau$  представляет собой, по существу, итерационный параметр, связанный с реальным физическим временем соотношением

$$\tau = 2/3 \ln t / t_0, \quad (8)$$

которое получается в процессе преобразования исходных уравнений. Смысл граничных условий и условий нормировки, следующих из законов сохранения, подробно обсуждался в [1]. Для численного решения указанной задачи методом сеток необходимо также заменить полуплоскость, где естествен аналитический подход, на ограниченную область. Этой ограниченной областью выбирался прямоугольник  $(0, a; -b, b)$ , на сторонах которого и задавались граничные условия в виде решений линеаризованной системы уравнений (1) — (3):

$$\psi = \frac{1}{\pi l_1} \left( e^{-\frac{x^2 + (y - y_0)^2}{2\nu_\tau}} - 1 \right) \frac{x}{(y - y_0)^2 + x_0^2}, \quad (9)$$

$$\xi = \frac{1}{\pi l_1 \nu_\tau^2} x e^{-\frac{x^2 + (y - y_0)^2}{2\nu_\tau}}, \quad (10)$$

$$T = \frac{1}{2\pi l_2 a_\tau} e^{-\frac{x^2 + (y - y_0)^2}{2a_\tau}}. \quad (11)$$

Соответственно менялись и пределы интегрирования в (7)

$$\int_0^a \int_{-b}^b v \, dx \, dy = 1/l_1, \quad \int_0^a \int_{-b}^b T \, dx \, dy = 1/l_2. \quad (12)$$

Начальные поля  $\psi_0, \xi_0, T_0$  также брались по формулам (9) — (11).

Вопрос выбора конечно-разностной схемы для решения данной системы уравнений может быть отнесен к проблематике численных решений системы уравнений Навье—Стокса. Несмотря на кажущуюся простоту вида этих уравнений, наличие в них нелинейных членов обуславливает трудности аналитического подхода, а малый параметр при старших производных затрудняет использование численных методов. Исследование этих задач далеко не закончено и находится в стадии интенсивного развития.

В настоящей работе наименьшее значение  $\nu_\tau$  составляло 0,02, что дало возможность обратиться к сравнительно простой итерационной схеме Зайделя. Для разностной аппроксимации уравнений в пространстве в (1) и (3) использовалась противопоточная схема ориентации первых производных, сохраняющая второй порядок точности [2]. Такой способ аппроксимации, в отличие от обычного — центрально-разностного, оказывает стабилизирующее влияние на устойчивость и приводит к монотонному характеру численного решения.

Сеточные уравнения и их решение. В прямоугольнике  $(0, a; -b, b)$  введем прямоугольную сетку с узлами

$$x_i = i \Delta x, \quad \Delta x = \frac{a}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

$$y_j = j \Delta y, \quad \Delta y = \frac{b}{p}, \quad j = 0, \pm 1, \dots, \pm p.$$

Каждое из уравнений (1) — (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau} + C \varphi_k + A \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = D \left( \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} \right), \quad k = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где  $\varphi_k, C, A, B, D$  — функции искомых величин, их производных и неза-

висимых переменных  $x, y$ , имеющие соответственно для каждого из уравнений следующие выражения:

$$\varphi_1 = \zeta, \quad C = -3, \quad D = v_T, \quad A = u - x, \quad B = v - y; \quad (14)$$

$$\varphi_2 = \psi, \quad C = -\varphi_1/\varphi_2, \quad D = 1, \quad A = 0, \quad B = 0; \quad (15)$$

$$\varphi_3 = T, \quad C = -2, \quad D = a_T, \quad A = u - x, \quad B = v - y. \quad (16)$$

Сеточные уравнения получаются аппроксимацией частных производных разностными соотношениями

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left( \frac{A + |A|}{2} \right) \left[ \frac{\varphi_{(i,j)} - \varphi_{(i+1,j)}}{\Delta x} \right] + \left( \frac{A - |A|}{2} \right) \left[ \frac{\varphi_{(i,j)} - \varphi_{(i-1,j)}}{\Delta x} \right], \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_{(i,j+1)} - 2\varphi_{(i,j)} + \varphi_{(i,j-1)}}{\Delta y^2}. \quad (18)$$

Разрешив модельное уравнение в конечных разностях относительно  $\varphi_{(i,j)}^n$ , получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{(i,j)}^n = \frac{1}{S} \left\{ \varphi_{(i,j)}^{n-1} + \varphi_{(i+1,j)}^{n-1} \left[ \frac{D \Delta \tau}{\Delta x^2} \kappa_1 + (|A| - A) \frac{\Delta \tau}{2\Delta x} \right] + \right. \\ \left. + \varphi_{(i-1,j)}^n \left[ \frac{D \Delta \tau}{\Delta x^2} \kappa_1 + (|A| + A) \frac{\Delta \tau}{2\Delta x} \right] + \right. \\ \left. + \varphi_{(i,j+1)}^{n-1} \left[ \frac{D \Delta \tau}{\Delta y^2} \kappa_2 + (|B| - B) \frac{\Delta \tau}{2\Delta y} \right] + \right. \\ \left. + \varphi_{(i,j-1)}^n \left[ \frac{D \Delta \tau}{\Delta y^2} \kappa_2 + (|B| + B) \frac{\Delta \tau}{2\Delta y} \right] \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$S = 1 + C \Delta \tau + 2D \Delta \tau \left( \frac{\kappa_1}{\Delta x^2} + \frac{\kappa_2}{\Delta y^2} \right) + |A| \frac{\Delta \tau}{\Delta x} + |B| \frac{\Delta \tau}{\Delta y}, \quad (20)$$

$$\kappa_1 = \frac{1 + B^*}{1 + A^* + B^*}, \quad \kappa_2 = \frac{1 + A^*}{1 + A^* + B^*}, \quad A^* = \frac{|A| \Delta x}{2D}, \quad B^* = \frac{|B| \Delta y}{2D}, \quad (21)$$

$\Delta \tau$  — шаг итерационного времени. Индексы  $n-1$  и  $n$  указывают на номера последовательных итераций в схеме Зайделя. Расчет полей  $\psi$ ,  $\zeta$ ,  $T$  идет на каждой итерации с учетом вновь вычисленных значений на новом итерационном слое. Поля  $\psi$ ,  $\zeta$  рассчитываются последовательно на каждой итерации, а поле  $T$  — независимо после определения  $\psi$  и  $\zeta$ . Соотношение для вертикальной составляющей импульса удовлетворялось на каждом временном слое. Грубая оценка параметра  $y_0$ , характеризующая положение максимального значения  $\zeta(x, y)$ , приведена в [1] и уточнена в процессе численного решения. Численные эксперименты также показывают, что задание  $y_0$  с некоторым отклонением от предварительной оценки не приводит к существенному изменению решения системы.

Результаты расчетов. Расчеты выполнены в диапазоне изменения  $v_T$  от 0,02 до 0,1. При этом поля  $\psi$ ,  $\zeta$ ,  $u$ ,  $v$  и  $T$  определены при трех значениях числа  $Pr_T = 1; 0,75; 0,5$  на сетке с числом узлов  $21 \times 41$ . Расчет велся при шагах по координатам от 0,05 до 0,1 (аналогичные оценки шага в зависимости от  $v_T$  даны в [3]), и шаг по времени  $\Delta \tau$  составлял 0,01, чем обеспечивалась необходимая степень точности и выполнение условий устойчивости схемы. В итоге расчетов была достигнута сходимость на 4—5 знаков для  $\psi$ ,  $\zeta$ ,  $T$ . Некоторые результаты рас-

четов представлены на рис. 1—3 в виде изолиний функций. При уменьшении  $\nu_T$  наблюдается смещение максимального значения  $\zeta(x, y)$  в сторону положительных  $y$ , сужение вихревой зоны, а также увеличение градиентов вихревой напряженности при  $y > y_0$  и уменьшение их при  $y < y_0$ . Наконец, наблюдается характерное раздвоение температурного поля при уменьшении  $\nu_T$  и  $a_T$  с появлением периферийных максимумов. В настоящее время проводится численное решение системы уравнений (1)—(3) для случая развития вихревой пары с непроницаемой границей на уровне источника.

## Обозначения

$x, y$ — декартовы координаты,	$Q$ — суммарное избыточное теплосодержание,
$u, v$ — составляющие скорости по осям декартовых координат,	$\nu_T$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости,
$\rho$ — плотность,	$a_T$ — коэффициент турбулентной теплопроводности,
$p$ — избыточное давление,	$c_p$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении,
$T$ — избыточная температура,	$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .
$\psi$ — функция тока,	
$\zeta$ — вихревая напряженность,	
$t$ — время,	
$I$ — суммарный импульс,	

Примечание: величины  $x, y, u, v, T, \psi, \zeta, \nu_T, a_T$  являются безразмерными, остальные обозначения указаны в тексте.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Капланский Ф., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 386 (1973).
2. Fox D. G., J. Atm. Sci., 29, 322 (1972).
3. Самарский А., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, 548 (1965).

Институт термодинамики и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
23/VII 1973

F. KAPLANSKI

### KOKKUSURUMATA VEDELIKUS LEVIVA PÖÖRISPAARI KOHTA KOOSTATUD VÖRRANDISÜSTEEMI ARVULINE LAHENDAMINE

Artiklis käsitletakse turbulentsse pöörispaaari arenemist kokkusurumata vedelikus. Vastav pidevuse, liikumise ja soojuse ülekande diferentsiaalvõrrandite süsteem teisendati ajast sõltuvate mastaapide sisseviimisega dimensioonitule kujule ning seejärel integreeriti numbriliselt.

Tegelikud piirtingimused, mille alusel antud funktsioonide väärtused lähenevad lõpmatuse nullile, asendati küllaladasel kaugusel turbulentsest tsoonist asuvate funktsioonide asümptootiliste väärtustega.

Integreerimise tulemusena saadi voolufunktsioonide, kiiruse, temperatuuri ja pööriseelise ajas sarnased jaotusfunktsioonid praktilist huvi pakkavas turbulentses viskoossuse koefitsiendi piirkonnas.

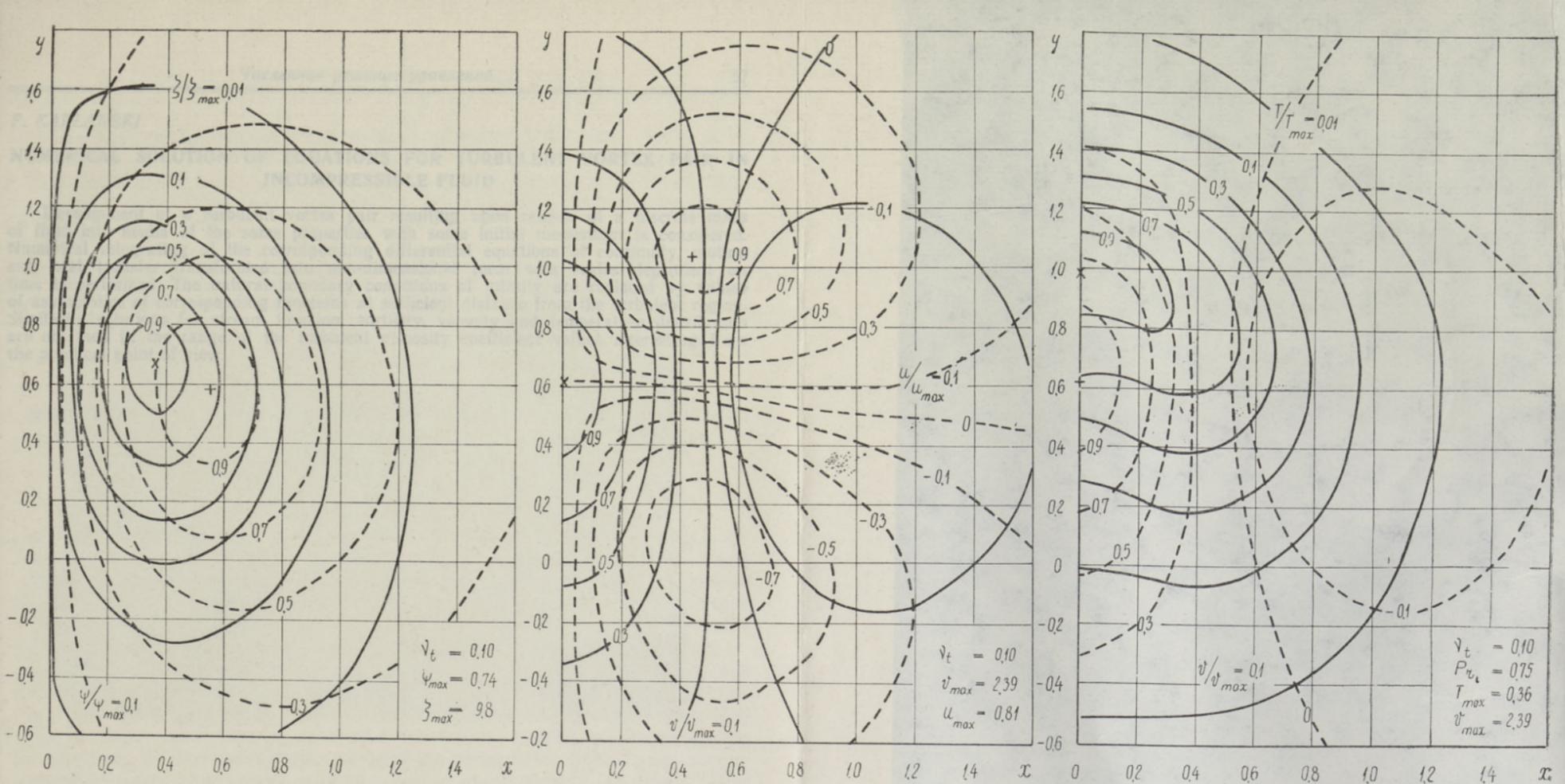


Рис. 1. Изолинии функций  $\psi$ ,  $\zeta$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $T$  при  $\nu_\tau = 0.1$ ;  $Pr_\tau = 0.75$ .

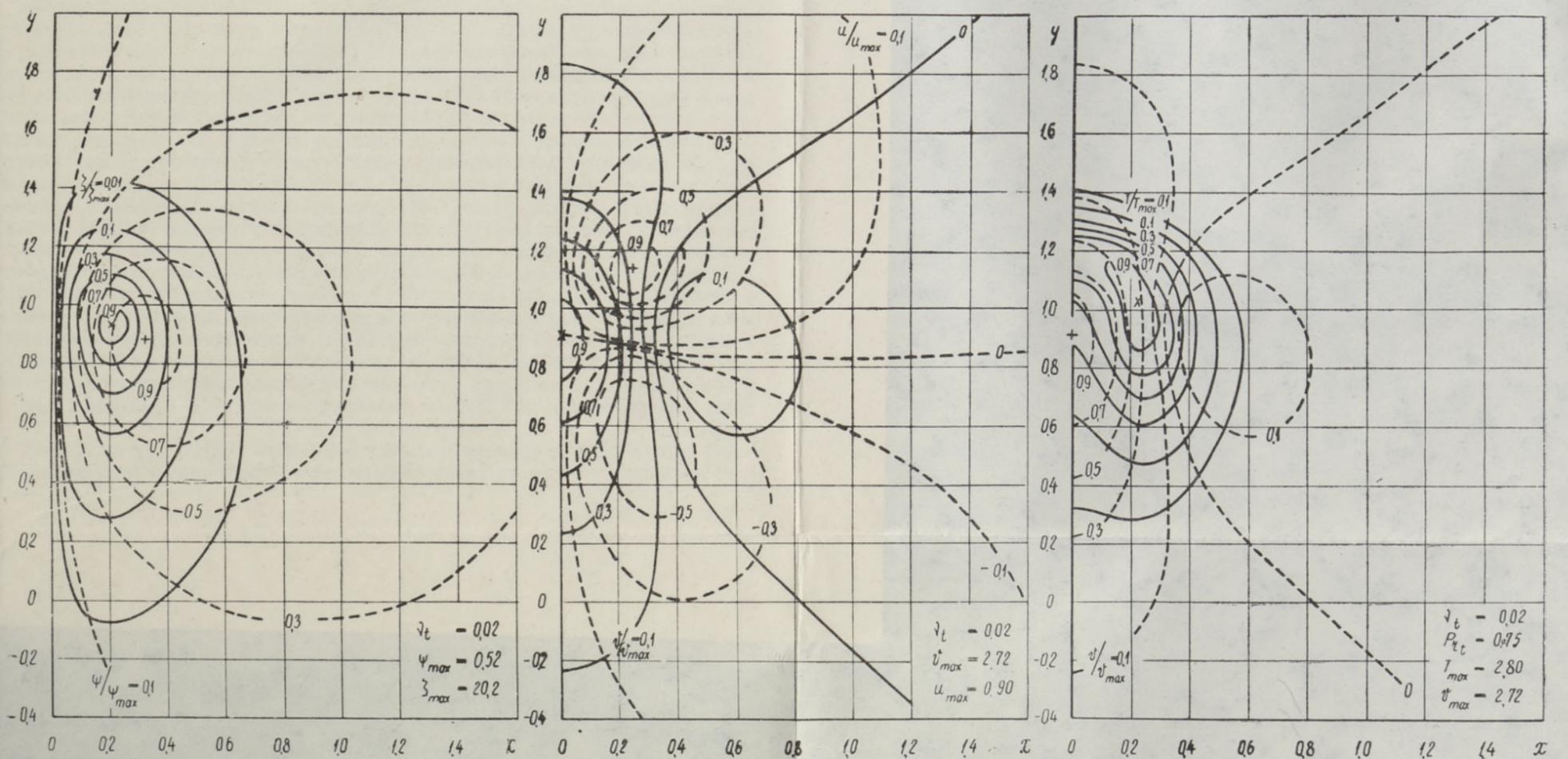


Рис. 2. Изолинии функций  $\psi$ ,  $\zeta$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $T$  при  $\nu_\tau = 0.02$ ;  $Pr_\tau = 0.75$ .

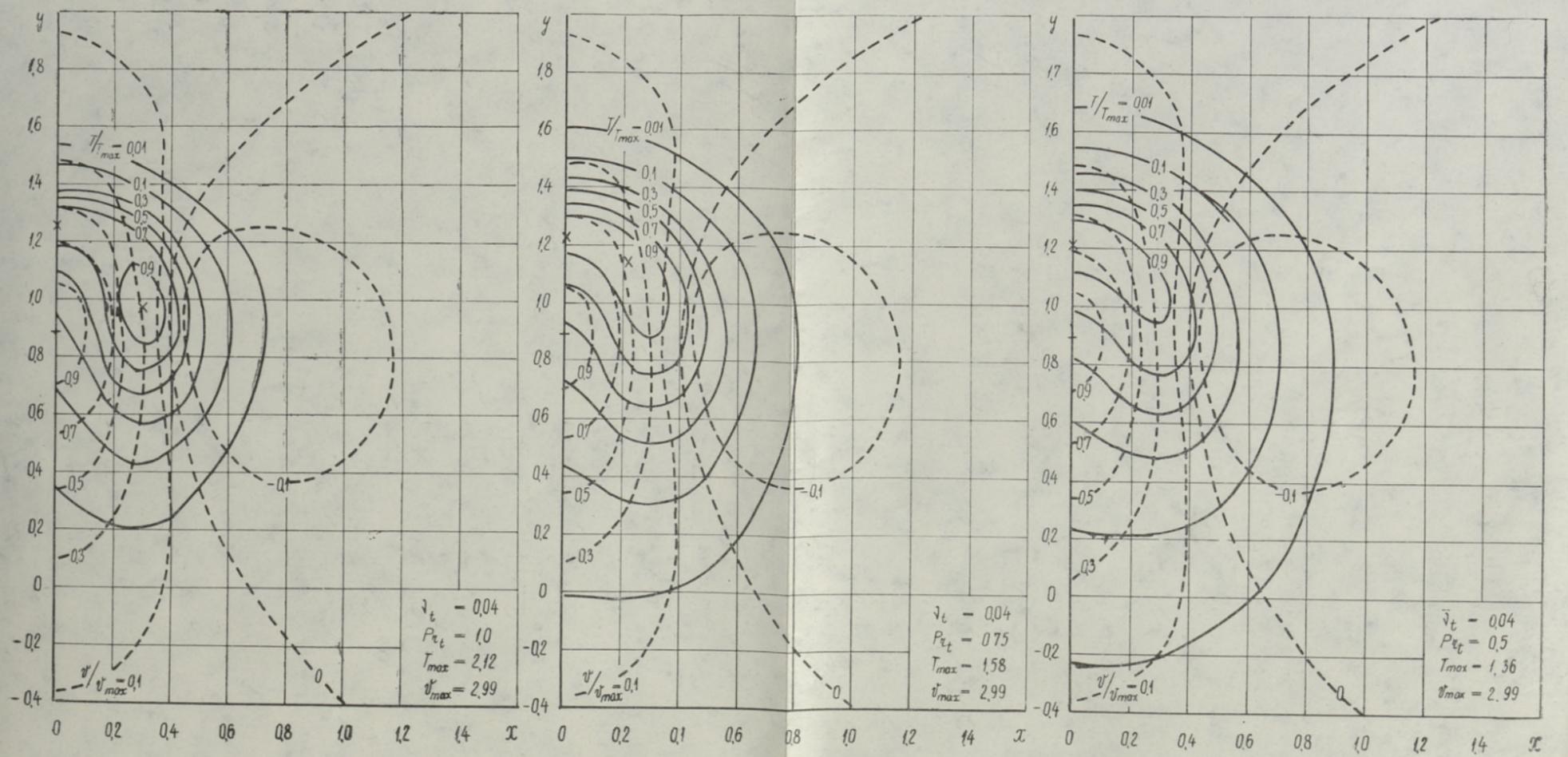


Рис. 3. Изолинии функции  $T$  при  $\nu_\tau = 0.04$ ;  $Pr_\tau = 1, 0.75, 0.5$ .

F. KAPLANSKI

## NUMERICAL SOLUTION OF EQUATIONS FOR TURBULENT VORTEX PAIR IN INCOMPRESSIBLE FLUID

Development of a turbulent vortex pair resulting upon release of a discrete mass of fluid into media of the same properties with some initial momentum is considered. Numerical integrating of the corresponding differential equations of continuity, motion and heat transfer transformed into non-dimensional form with scales dependent on time is performed. The natural boundary conditions of infinity are replaced by values of asymptotics of corresponding functions at sufficient distance from the turbulent region. Similarity solutions for stream function, vorticity, velocity and temperature distribution are obtained in the range of the turbulent viscosity coefficient values interesting from the practical point of view.