EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.1.01

УДК 517.52

Г. КАНГРО

О СКОРОСТИ СУММИРУЕМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ТРЕУГОЛЬНЫМИ РЕГУЛЯРНЫМИ МЕТОДАМИ. I

Для регулярного нижнего треугольного метода суммирования A устанавливается достаточное (и в случае некоторых ограничений относительно A также необходимое) условие такое, чтобы A сохранял λ-ограниченность[1], $\lambda=\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_n\uparrow$. При выполнении этого условия для широкого класса методов A дается необходимое и достаточное условие такое, чтобы ортогональный ряд $\sum a_n\varphi_n$ с $\sum a_n^2\lambda_n^2<\infty$ был регулярно A^λ-суммируемым почти всюду (п. в.).

1. Введение

Сходящуюся последовательность $x=\{\xi_n\}$ с $\lim\xi_n=\xi$ будем называть ограниченной (сходящейся) со скоростью λ или λ-ограниченной (λ-сходящейся), если $\beta_n=O(1)$ ($\exists\lim\beta_n$), где

$$\beta_n=\lambda_n(\xi_n-\xi).$$

В частности, если $\lim\beta_n=0$, то условимся называть последовательность x регулярно λ-сходящейся. Если A — некоторый метод суммирования последовательностей, то последовательность x будем называть (регулярно) λ-суммируемой методом A или A^λ-суммируемой, если преобразованная последовательность Ax является (регулярно) λ-сходящейся.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — система действительных функций, ортонормальная на заданном множестве X по некоторой положительной σ-аддитивной мере μ. Рассмотрим ортогональный ряд

$$f=\sum_n a_n\varphi_n \tag{1}$$

с $\sum a_n^2\lambda_n^2<\infty$, где f — функция, определяемая почти всюду на X, к которой ряд $\sum a_n\varphi_n$ сходится (согласно теореме Рисса—Фишера) в пространстве L^2_μ. Предположим, что числа $0<\varrho_n^2\uparrow$ представляют собой множители Вейля для A-суммируемости ряда (1) п. в., т. е. ряд (1) A-суммируем п. в. на X, если

$$\sum_n a_n^2\varrho_n^2<\infty. \tag{2}$$

Отметим, что если ряд (1) суммируем п. в. регулярным методом A, то A-сумма ряда (1) эквивалентна функции f (см., напр., [1], с. 392).

[1] Свободные индексы принимают все целочисленные значения 0, 1, 2, ..., если не оговорено иначе.

Из теории суммируемости со скоростью общих ортогональных рядов известны следующие основные проблемы.

Проблема I. При каких условиях, наложенных на метод A и скорость суммирования λ, числа $\varrho_n^2\lambda_n^2$ являются множителями Вейля для регулярной A^λ-суммируемости п. в. ряда (1), т. е. при каких условиях из

$$\sum_n a_n^2\varrho_n^2\lambda_n^2<\infty \tag{3}$$

вытекает регулярная A^λ-суммируемость п. в. ряда (1)?

Проблема II. При каких условиях, наложенных на метод A и скорость суммирования λ, сами числа λ_n^2 являются множителями Вейля для регулярной A^λ-суммируемости п. в. ряда (1)?

Проблема III. При каких условиях, наложенных на методы A и $\bar{A}$ и скорость суммирования λ, методы A и $\bar{A}$ равносильны относительно регулярной λ-суммируемости п. в. ряда (1) с

$$\sum_n a_n^2\lambda_n^2<\infty?$$

Проблемы I и II рассматривались для методов арифметических средних [2–5], Рисса [1, 6], Валле—Пуссена [5, 7], сумматорной функции [8–11], Хаусдорфа [11, 12] и класса A^p [13, 14], проблемы I и III — для метода Эйлера—Кноппа [15, 16], а проблема III — для метода Чезаро [16]. Для решения проблем I—III в I части статьи в случае широкого класса $\mathfrak{A}$ регулярных нижних треугольных методов A (содержащего все перечисленные выше методы суммирования, кроме метода Эйлера—Кноппа) доказывается основная теорема, дающая необходимое и достаточное условие для регулярной A^λ-суммируемости п. в. ряда (1) с $\sum a_n^2\lambda_n^2<\infty$. При этом скорость λ, допустимая в основной теореме, такова, что метод A сохраняет λ-ограниченность, т. е. переводит каждую λ-ограниченную последовательность в такую же. С помощью основной теоремы проблемы I—III решаются для методов $A\in\mathfrak{A}$ во II части статьи.

2. Регулярные треугольные методы, сохраняющие λ-ограниченность

1. Известно, что регулярный треугольный метод A, заданный с помощью преобразования последовательности в последовательность матрицей (a_{nk}), сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда (см. [17], с. 139)

$$\lambda_n\sum_{k=0}^{n}\frac{|a_{nk}|}{\lambda_k}=O(1). \tag{4}$$

Из регулярности метода A вытекает

$$A_{nk}=o_k(1),\quad \underline{\lim}\,A_{nn}\geqslant 1,\quad A_{nk}=O(1),$$

где

$$A_{nk}=\sum_{\nu=0}^{k}|a_{n\nu}|. \tag{5}$$

Докажем следующую теорему, где $\varkappa=\varkappa(n)$ — наименьшее значение индекса k, при котором $a_{nk}\neq 0$ (или $A_{nk}\neq 0$). Число $\varkappa$ существует, если $A_{nn}\neq 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы регулярный треугольный метод суммирования $A=(a_{nk})$ сохранял λ-ограниченность, достаточно и, в случае выполнения условий*

$$1^\circ\ A_{n,k+1}=O(A_{nk}),\ k\geqslant\varkappa,$$
$$2^\circ\ A_{n-1,k}=O(A_{nk}),\ k\geqslant\varkappa,$$
$$3^\circ\ A_{n\nu}A_{\nu k}\geqslant A_{nk},\ k\leqslant\nu\leqslant n$$

также необходимо, чтобы

$$\exists\, c\in(0,1):\lambda_n A_{nk}^c=O(\lambda_k). \tag{6}$$

Доказательство. Без ограничения общности можем предположить, что $A_{nn}\neq 0$ при всех n, так как в случае $A_{nn}=0$ при некотором значении $n=n_0$ условия (4) и (6) одновременно выполняются при $n=n_0$, и в матрице (a_{nk}) строку с индексом n_0 можно опустить.

Достаточность. Пусть условие (6) выполнено. Тогда ввиду условия $A_{nn}=O(1)$ можем написать[2]

$$\lambda_n\sum_{k=\varkappa}^{n}\frac{|a_{nk}|}{\lambda_k}=O(1)\frac{\sum\limits_{k=\varkappa}^{n}|a_{nk}|A_{nk}^{-c}}{\sum\limits_{k=\varkappa}^{n}(A_{nk}^{1-c}-A_{n,k-1}^{1-c})}. \tag{7}$$

Согласно (5) имеем

$$\frac{|a_{nk}|A_{nk}^{-c}}{A_{nk}^{1-c}-A_{n,k-1}^{1-c}}=\frac{|a_{nk}|A_{nk}^{-1}}{1-(1-|a_{nk}|A_{nk}^{-1})^{1-c}},\quad k\geqslant\varkappa,$$

откуда в силу неравенства

$$1-(1-u)^{1-c}\geqslant(1-c)u,\qquad u\leqslant 1,$$

вытекает

$$|a_{nk}|A_{nk}^{-c}\leqslant\frac{1}{1-c}(A_{nk}^{1-c}-A_{n,k-1}^{1-c}),\quad k\geqslant\varkappa.$$

Тем самым из (7) следует (4).

Необходимость. Пусть условие (4) выполнено. При доказательстве выполнимости условия (6) достаточно ограничиться случаем $\varkappa\leqslant k<n$, поскольку при $k<\varkappa$ и $k\geqslant n$ условие (6) выполнено. Из (4) ввиду $\lambda_k\uparrow$ вытекает

$$\lambda_n A_{nk}=O(\lambda_k).$$

Поэтому, учитывая условия 1°—3°, можем найти постоянные $\alpha,\beta>0$ такие, что

$$\sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{|a_{n\nu}|}{\lambda_\nu}\geqslant\frac{\alpha}{\lambda_k}\sum_{\nu=k+1}^{n}|a_{n\nu}|A_{\nu k}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\beta A_{n-1,k}}{\lambda_k}\sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{|a_{n\nu}|A_{n\nu}A_{\nu k}}{A_{n,\nu-1}A_{nk}}\geqslant\frac{\beta A_{n-1,k}}{\lambda_k}\sum_{\nu=k+1}^{n}\frac{|a_{n\nu}|}{A_{n,\nu-1}}.$$

Применяя к функции $\ln x$ формулу конечных приращений на сегменте $[A_{n,\nu-1},A_{n\nu}]$, при $\nu>k$ получаем[3]

[2] Считаем $A_{n,-1}=0$.
[3] Неравенство (8) справедливо и при $A_{n,\nu-1}=A_{n\nu}$.

$$\ln \frac{A_{n\nu}}{A_{n,\nu-1}} \leqslant \frac{|a_{n\nu}|}{A_{n,\nu-1}} \tag{8}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{|a_{n\nu}|}{\lambda_\nu} \geqslant \frac{\beta A_{n-1,k}}{\lambda_k} \ln \frac{A_{nn}}{A_{nk}}.$$

Отсюда на основе (4) находим

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_k} \leqslant M \left(A_{n-1,k} \ln \frac{A_{nn}}{A_{nk}} \right)^{-1}, \tag{9}$$

где $M > 0$ — постоянная.

Поскольку $\varliminf A_{nn} \geqslant 1$ и $A_{nn} \neq 0$, то существует постоянная $L > 2$ такая, что

$$M \leqslant \frac{1}{2} \ln (LA_{nn}). \tag{10}$$

Б силу условия $A_{nk} = o_k(1)$ и вытекающего из (10) условия $A_{kk} > L^{-1}$ можем каждому индексу k сопоставить индекс $n(k) > k$ со свойствами

$$A_{n(k),k} < \frac{1}{L}, \quad A_{n(k)-1,k} \geqslant \frac{1}{L}. \tag{11}$$

Определяя число $c \in (0, 1)$ как решение уравнения $L^{1-c} = 2$, из неравенств (9)—(11) получаем

$$\frac{\lambda_{n(k)}}{\lambda_k} \leqslant \frac{1}{2} \ln (LA_{nn}) \frac{L}{\ln (LA_{nn})} = \frac{1}{2} L = L^c,$$

откуда ввиду первого из условий (11) находим

$$\lambda_{n(k)} A^c_{n(k),k} < \lambda_k. \tag{12}$$

Зафиксируем индекс k и определим по индукции индексы $m(\nu)$ следующим образом:

$$m(0) = k, \quad m(\nu+1) = n[m(\nu)].$$

Так как $n(\nu) > \nu$, то $m(\nu + 1) > m(\nu)$. С одной стороны, при $k = m(\nu)$ из (12) на основе условия 2° получаем

$$\lambda_{m(\nu+1)} = \lambda_{m(\nu+1)} A^c_{m(\nu+1),m(\nu)} A^{-c}_{m(\nu+1),m(\nu)} = O(1) \lambda_{m(\nu)} A^{-c}_{m(\nu+1)-1,m(\nu)}$$

и, ввиду второго из условий (11), находим

$$\lambda_{m(\nu+1)} = O(1) \lambda_{m(\nu)}. \tag{13}$$

С другой стороны, применяя неравенство (12) последовательно при $k = m(\nu - 1), m(\nu - 2), \ldots, m(0)$ и умножая полученные неравенства почленно, в силу условия 3° находим

$$\lambda_{m(\nu)} A^c_{m(\nu),k} < \lambda_k. \tag{14}$$

Пусть теперь $n \geqslant k$ — произвольный индекс. Поскольку $m(\nu) \uparrow$ и $m(0) = k$, то существует индекс ν такой, что

$$m(\nu) \leqslant n < m(\nu+1).$$

Поэтому в силу условия 3° и $A_{n,m}(\nu) = O(1)$ из (13) и (14) заключаем

$$\lambda_n A^c_{nk} \leqslant \lambda_{m(\nu+1)} A^c_{n,m(\nu)} A^c_{m(\nu),k} = O(1)\,\lambda_{m(\nu)} A^c_{m(\nu),k} = O(\lambda_k),$$

чем необходимость условия (6) доказана.

2. Приведем два примера о регулярных методах суммирования, точные условия сохранения λ-ограниченности которых даются формулой (6).

Пример 1. Обобщенный метод Валле—Пуссена (V, α). Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}$ — последовательность натуральных чисел таких, что $\alpha_n \uparrow$ и $\alpha_{n+1} - \alpha_n \leqslant 1$, $\alpha_0 = 1$. Метод (V, α) определяется с помощью преобразования последовательности в последовательность матрицей (a_{nk}) с

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_n}, & n - \alpha_n < k \leqslant n, \\ 0, & k \leqslant n - \alpha_n \text{ или } k > n. \end{cases}$$

Согласно формуле (5)

$$A_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n + k - n}{\alpha_n}, & n - \alpha_n < k \leqslant n, \\ 0, & k \leqslant n - \alpha_n, \end{cases}$$

откуда непосредственно следует выполнение условий [4] 1° и 2° теоремы 1, если иметь в виду, что $(n - \alpha_n) \uparrow$ и $\alpha_{n+1} \leqslant 2\alpha_n$. Выполнение же условия 3° следует из легко проверяемой формулы

$$A_{n\nu} A_{\nu k} - A_{nk} = \frac{(\nu - k)(n - \alpha_n - \nu + \alpha_\nu)}{\alpha_n \alpha_\nu}$$

в силу условия $(n - \alpha_n) \uparrow$.

Пример 2. Разрывный метод Рисса (R^*, p_n, α). Пусть p_n — положительные числа и $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$. Метод $A = (R^*, p_n, \alpha)$ с $\alpha > 0$ определяется с помощью преобразования ряда в последовательность треугольной матрицей (α_{nk}) с

$$\alpha_{nk} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right)^{\alpha}, \quad k \leqslant n. \tag{15}$$

Поскольку

$$a_{nk} = \alpha_{nk} - \alpha_{n,k+1}, \tag{16}$$

то согласно формуле (5) имеем

$$A_{nk} = 1 - \left(1 - \frac{P_k}{P_n}\right)^{\alpha}, \quad k \leqslant n,$$

и, следовательно,

$$\min\{\alpha, 1\} \frac{P_k}{P_n} \leqslant A_{nk} \leqslant \max\{\alpha, 1\} \frac{P_k}{P_n}. \tag{17}$$

Если $\bar{A} = (R^*, p_n, 1)$, то из (17) вытекает

$$m A_{nk} \leqslant \bar{A}_{nk} \leqslant M A_{nk}, \tag{18}$$

где $m = \min\{1, \alpha^{-1}\}$, $M = \max\{1, \alpha^{-1}\}$. Так как

$$\lambda_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_{nk}|}{\lambda_k} = \lambda_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}}\right) A_{nk} + A_{nn}, \tag{19}$$

---

[4] Здесь $\varkappa = n - \alpha_n + 1$.

то ввиду (18) метод A сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда $\bar{A}$ сохраняет ее (см. (4)). Поэтому при выполнении условия $P_n = O(P_{n-1})$ из теоремы 1 следует, что метод (R^*, p_n, α) с $\alpha > 0$ сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда

$$\exists c \in (0, 1): \lambda_n \left(\frac{P_k}{P_n}\right)^c = O(\lambda_k), \quad k \leqslant n. \tag{20}$$

Условие (20) для метода $(R^*, p_n, 1)$ установлено в [18].

Примечание 1. Если произвольные регулярные методы суммирования A и $\bar{A}$ удовлетворяют условию (18), где $M, m > 0$ — некоторые постоянные, то из (19) вытекает, что A и $\bar{A}$ одновременно сохраняют λ-ограниченность. Например, условие (18) выполнено для методов Чезаро $A = (C, \alpha)$ с $\alpha > 0$ и $\bar{A} = (C, 1)$ в силу неравенства

$$\min\{\alpha, 1\} \frac{k+1}{n+1} \leqslant A_{nk} \leqslant \max\{\alpha, 1\} \frac{k+1}{n+1},$$

легко доказуемого методом индукции по k. Тем самым метод (C, α) с $\alpha > 0$ сохраняет λ-ограниченность тогда и только тогда, когда

$$\exists c \in (0, 1): \lambda_n \left(\frac{k+1}{n+1}\right)^c = O(\lambda_k), \quad k \leqslant n. \tag{21}$$

3. Основная теорема

Будем говорить, что метод $A = (a_{nk})$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$, если

1° A треуголен и $\sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk} = 1$,

2° существует регулярный относительно нульпоследовательностей метод $B = (b_{nk})$ такой, что

$$B_{nk} = O(B_{mk}), \quad n > m, \tag{22}$$

$$A_{nk} = O(B_{nk}), \tag{23}$$

где

$$A_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} |a_{n\nu}|, \quad B_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} |b_{n\nu}|.$$

Метод B является регулярным относительно нульпоследовательностей тогда и только тогда, когда

$$B_{nk} = O(1), \quad B_{nk} = o_k(1). \tag{24}$$

Отсюда и из условий 1° и (23) вытекает регулярность метода A.

Для каждого метода $A \in \mathfrak{A}$ и числа $q \in (0, 1)$ построим по индукции возрастающую последовательность индексов $\nu(n)$:

$$\nu(0) = 0, \quad B_{\nu(n+1), \nu(n)} \leqslant q B_{\nu(n), \varkappa}, \tag{25}$$

где $\varkappa = \varkappa(n)$ — наименьшее значение индекса k, при котором $B_{\nu(n), k} \neq 0$. В силу второго из условий (24) такие индексы $\nu(n)$ существуют.

Теорема 2. *Если $A \in \mathfrak{A}$ и последовательность λ удовлетворяет условиям*

$$\sum_n a_n^2 \lambda_n^2 < \infty, \tag{26}$$

$$\exists c \in (0, 1): \lambda_n B_{nk}^c = O(\lambda_k), \tag{27}$$

то ряд (1) *регулярно A^λ-суммируем п. в. тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $s_\nu(n)$ ряда* (1) *регулярно сходится п. в. со скоростью $\{\lambda_{\nu(n)}\}$.*

Доказательство. Обозначим n-е A-средние ряда (1) через σ_n, т. е.

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} a_k \varphi_k,$$

где

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}.$$

Ввиду условия 1° имеем

$$s_n - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g_{n,k-1} a_k \varphi_k, \tag{28}$$

$$\sigma_n - \sigma_m = \sum_{k=1}^{n} (g_{m,k-1} - g_{n,k-1}) a_k \varphi_k, \quad n > m, \tag{29}$$

с

$$g_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}.$$

Из (28) и (29) в силу (23) находим

$$\int (s_n - \sigma_n)^2 d\mu = \sum_{k=1}^{n} g_{n,k-1}^2 a_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{n} B_{nk}^2 a_k^2, \tag{30}$$

$$\int (\sigma_n - \sigma_m)^2 d\mu = \sum_{k=1}^{n} (g_{m,k-1} - g_{n,k-1})^2 a_k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{n} (B_{mk} + B_{nk})^2 a_k^2$$

или, ввиду условия (22),

$$\int (\sigma_n - \sigma_m)^2 d\mu = O(1) \sum_{k=1}^{n} B_{mk}^2 a_k^2, \quad n > m. \tag{31}$$

Из (30) на основе (27) после замены порядка суммирования получим

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda_{\nu(n)}^2 \int [s_{\nu(n)} - \sigma_{\nu(n)}]^2 d\mu = O(1) \sum_{k\geqslant 1} a_k^2 \lambda_k^2 \sum_{\nu(n)\geqslant k} B_{\nu(n),k}^\alpha, \tag{32}$$

где $\alpha = 2(1-c) > 0$. Для каждого индекса $k \geqslant 1$ существует натуральное число $l = l(k)$ такое, что

$$\nu(l-1) < k \leqslant \nu(l), \tag{33}$$

вследствие чего

$$\sum_{\nu(n)\geqslant k} B_{\nu(n),k}^\alpha \leqslant \sum_{n\geqslant l} B_{\nu(n),\nu(l)}^\alpha. \tag{34}$$

Поскольку B_{nk} монотонно возрастает по k, то при $n > l$ из (25) вытекает [6]

$$B_{\nu(n),\nu(l)} \leqslant q B_{\nu(n-1),\nu(l)}.$$

Отсюда на основе первого из условий (24) находим

$$B_{\nu(n),\nu(l)} \leqslant q^{n-l} B_{\nu(l),\nu(l)} = O(1) q^{n-l}$$

и, следовательно,

[5] Если $\nu(l) < \varkappa(n-1)$, то полученное неравенство справедливо ввиду (22).

$$\sum_{n\geqslant l} B^{\alpha}_{\nu(n),\nu(l)} = O(1). \tag{35}$$

Из (32) в силу условий (26), (34) и (35) на основе теоремы Леви заключаем

$$\lim_{n} \lambda_{\nu(n)}[s_{\nu(n)} - \sigma_{\nu(n)}] = 0 \quad \text{п. в.} \tag{36}$$

Если индекс m удовлетворяет условию

$$\nu(n-1) \leqslant m < \nu(n), \tag{37}$$

то из (31) на основе (27) и (22) после замены порядка суммирования получим

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda^2_m \int [\sigma_{\nu(n)} - \sigma_m]^2 d\mu = O(1) \sum_{k\geqslant 1} a^2_k \lambda^2_k \sum_{\nu(n)\geqslant k} B^{\alpha}_{\nu(n-1),k}. \tag{38}$$

Из (33), (35) и первого из условий (24) вытекает

$$\sum_{\nu(n)\geqslant k} B^{\alpha}_{\nu(n-1),k} \leqslant \sum_{n\geqslant l} B^{\alpha}_{\nu(n-1),\nu(l)} = O(1),$$

вследствие чего из (38) и (26) на основе теоремы Леви заключаем

$$\lim_{n} \lambda_m [\sigma_{\nu(n)} - \sigma_m] = 0 \quad \text{п. в.} \tag{39}$$

при условии (37).

Если ряд (1) регулярно A^{λ}-суммируем п. в. к функции f, то из (36) для частичных сумм $s_{\nu(n)}$ ряда (1) следует

$$\lim_{n} \lambda_{\nu(n)}[s_{\nu(n)} - f] = 0 \quad \text{п. в.,} \tag{40}$$

чем необходимость условия теоремы доказана. Наоборот, из условия (40) в силу тождества

$$\lambda_m(\sigma_m - f) = \lambda_m[\sigma_m - \sigma_{\nu(n)}] + \lambda_m[\sigma_{\nu(n)} - s_{\nu(n)}] + \lambda_m[s_{\nu(n)} - f]$$

и условий (36) и (39) вытекает

$$\lim_{m} \lambda_m(\sigma_m - f) = 0 \quad \text{п. в.,}$$

ибо из $m \to \infty$ (согласно (37)) следует $n \to \infty$. Тем самым и достаточность условия теоремы доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 387 (1969).
2. Meder J., Ann. polon. math., 4, 183 (1957—1958).
3. Tandori K., Acta scient. math., 20, 19 (1959).
4. Alexits G., Kralik D., Acta math. Acad. scient. hung., 11, 387 (1960).
5. Leindler L., Acta math. Acad. scient. hung., 15, 57 (1964).
6. Leindler L., Acta scient. math., 24, 129 (1963).
7. Leindler L., Acta math. Acad. scient. hung., 16, 375 (1965).
8. Ефимов А. В., Успехи матем. наук, 22, 119 (1967).
9. Ефимов А. В., Матем. заметки, 4, 261 (1968).
10. Болгов В. А., Применение функционального анализа в теории приближений (материалы конф.), Калинин, 1970.
11. Болгов В. А., Некоторые вопросы суммируемости ортогональных рядов линейными методами (автореф. дисс.), Калинин, 1970.
12. Болгов В. А., Препринт ИФВЭ 70-12, Серпухов, 1970.
13. Болгов В. А., Матем. заметки, 4, 697 (1968).
14. Болгов В. А., Ефимов А. В., Изв. АН СССР, Сер. матем., 35, 1369 (1971).

15. Коляда В. И., Изв. высш. уч. зав., **1**, 42 (1972).
16. Мартин Э., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **305**, 222 (1972).
17. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **277**, 136 (1971).
18. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **305**, 156 (1972).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
18/VII 1973

G. KANGRO

ORTOGONAALRIDADE SUMMEERUVUSE KIIRUSEST KOLMNURKSETE REGULAARSETE MENETLUSTE ABIL. I

Regulaarse alumise kolmnurkse summeerimismenetluse A jaoks leitakse piisav tingimus (mis teatavatel kitsendustel A kohta osutub ka tarvilikuks) selleks, et menetlus A säilitaks λ-tõkestatuse; $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$. Selle tingimuse täidetuse korral antakse ulatusliku menetluste klassi $\{A\}$ jaoks tarvilik ja piisav tingimus selleks, et reaalne ortogonaalrida (1), kus $\sum a_n^2\lambda_n^2 < \infty$, oleks peaaegu kõikjal regulaarselt A^λ-summeeruv. Seejuures nimetatakse rida (1) regulaarselt A^λ-summeeruvaks, kui $\lambda_n(\eta_n - \eta) = o(1)$, kus $\{\eta_n\}$ on A-teisend reast (1) ja $\eta = \lim \eta_n$.

G. KANGRO

ON THE SPEED OF SUMMABILITY OF ORTHOGONAL SERIES BY TRIANGULAR REGULAR METHODS. I

For a regular lower triangular summability method A a sufficient condition (which on the occasion of certain restrictions with regard to A also appears necessary) for preserving λ-boundedness is stated, $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$. If this condition is fulfilled, for a wide class of summability methods $\{A\}$ a necessary and sufficient condition for regular A^λ-summability almost everywhere of real orthogonal series (1) with $\sum a_n^2\lambda_n^2 < \infty$ is found. Herewith the series (1) is said to be regularly A^λ-summable if $\lambda_n(\eta_n - \eta) = o(1)$, where $\{\eta_n\}$ is the A-transform of (1) and $\eta = \lim \eta_n$.