EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.1.02

УДК 517.946

Элеонора ЯРВ

СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛА С ЧЕБЫШЕВСКОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

В работе изучаются следующие свойства функционала $F=(u_i)_0^\infty$, обладающего чебышевской устойчивостью: 1) асимптотическое поведение u_n; 2) последовательность $(u_i)_0^\infty$ является последовательностью с минимальной длиной чебышевского критического интервала для каждого частичного отрезка $(u_i)_0^n$ начиная с $n=2$.

Линейный функционал F_n в пространстве алгебраических полиномов $\{P_n(x)\}$ степени не выше n с равномерной метрикой будем задавать в форме $F_n=(\mu_k)_0^n$, положив $F_n(x^k)=\mu_k$ $(k=0, \ldots, n)$.

Заданный в такой форме функционал будем называть (согласно [1], с. 24) отрезком-функционалом и иногда отрезком, а числа μ_k $(k=0, \ldots, n)$ его параметрами.

Полином $Q_n(x)$ $(\|Q_n\|=1)$ будем называть экстремальным или обслуживающим функционал F_n, если $F_n(Q_n)=+N_n$, где N_n — норма F_n, а точки $0 \leqslant \sigma_i \leqslant 1$ $(i=1, \ldots, s)$, в которых $|Q_n(\sigma_i)|=1$, его узлами.

Паспортом полинома $Q_n(x)$ $(\|Q_n\|=1)$ назовем ([1], с. 74) тройку чисел $[n, s, p]$, где n — степень $Q_n(x)$, s — число его узлов, p — число повторений на $[0,1]$, причем повторением называем факт, когда двум соседним узлам σ_i соответствуют одинаковые знаки отклонений.

Если отрезок-функционал $(\mu_k)_0^n$ ([1], с. 26 и 38) имеет экстремальный полином $Q_n(x)$ степени $n \geqslant 1$, то $\mu_k=\sum_{i=1}^s \delta_i \sigma_i^k$ $\quad (k=0, \ldots, n)$, где $(\sigma_i)_1^s$ есть узлы полинома $Q_n(x)$. Такую структуру назовем узловой, а числа $(\delta_i)_1^s$ — нагрузками узлов полинома $Q_n(x)$. Среди чисел $(\delta_i)_1^s$ могут оказаться и нули. Те из узлов σ_i, у которых $\sigma_i \neq 0$, назовем нагруженными.

Паспортом отрезка $(\mu_i)_0^n$ ([1], с. 74) назовем тройку чисел $[n, s, p]$, где n — степень его экстремального полинома, s — число нагруженных узлов этого полинома, p — число повторений на $[0,1]$.

Каков бы ни был отрезок-функционал $(\mu_i)_0^{n-1}=0_0, \ldots, 0_{n-1}$ ([1], с. 47), существуют два числа $\mu'_n<\mu''_n$ таких, что отрезок $(\mu_i)_0^n=$ $=\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n$

а) при $\mu_n \geqslant \mu''_n$ обслуживается полиномом Чебышева $+T_n(x) = \cos n \arccos(2x-1)$ и не обслуживается им ни при каком значении $\mu_n < \mu''_n$;

б) при $\mu_n \leqslant \mu'_n$ обслуживается полиномом Чебышева $-T_n(x)$ и не обслуживается им ни при каком значении $\mu_n > \mu'_n$.

Интервал (μ'_n, μ''_n) называется чебышевским критическим интервалом отрезка, имеющего базис $(\mu_i)_0^{n-1}$, для n-го параметра.

Устойчивым функционалом $F_n = \mu_0(\Theta), \ldots, \mu_n(\Theta)$ ([1], с. 164) будем называть такой отрезок-функционал с переменным параметром Θ, который в области изменения параметра обслуживается, помимо полиномов Чебышева $\pm T_n(x)$, только полиномами одного постоянного паспорта. Отрезок-функционал $F_n = \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n + \Theta$ с переменным n параметром, который при $-\infty < \Theta < \infty$ не имеет, помимо полиномов Чебышева $\pm T_n(x)$, никаких других экстремальных полиномов степени $n \geqslant 1$, называется отрезком-функционалом с чебышевской устойчивостью. В [2] и [3] нами установлено, что существует единственный (с точностью до множителя) функционал $F = (u_i)_0^{\infty}$ с чебышевской устойчивостью, т. е. такой функционал F на $C_{[0,1]}$, у которого каждый частичный отрезок $F_n = (u_i)_0^n$ обладает свойством чебышевской устойчивости.

В [2] и [3] дана также конструкция этого функционала

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \tau_{i,n}^n + \frac{1}{2}\right), \tag{1}$$

где $(\tau_{i,n})_0^n$ — узлы полинома Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos(2x-1)$ и доказано, что длина чебышевского критического интервала для n-го параметра отрезка $F_n = (u_i)_0^n$ вычисляется по формуле

$$L_n = \frac{1}{2^{2n-2}}. \tag{2}$$

В данной статье займемся изучением свойств функционала $F = (u_i)_0^{\infty}$.

Теорема 1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \tau_{i,n}^n + \frac{1}{2}\right)$ *есть бесконечно малая, имеющая порядок малости* $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Доказательство. Обозначим при $n = \mathrm{const}$ $\Phi_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \tau_{i,n}^n + \frac{1}{2}$ и оценим Φ_n двусторонним образом. Для этого разобьем Φ_n на группы слагаемых, взяв в каждой группе по $[\sqrt{n}]$ членов, где через $[\sqrt{n}]$ обозначена целая часть $\sqrt{n}$.

Имеем

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} S_{i,n} + R_n, \tag{3}$$

где

$$S_{[\sqrt{n}],n} = \frac{1}{2} + \tau_{n-1,n}^n + \ldots + \tau_{n-[\sqrt{n}]+1,n}^n,$$

$$S_{[\sqrt{n}]-1,n}=\tau^n_{n-[\sqrt{n}],n}+\ldots+\tau^n_{n-2[\sqrt{n}]+1,n},$$

$$S_{1,n}=\tau^n_{n-([\sqrt{n}]-1)[\sqrt{n}],n}+\ldots+\tau^n_{n-[\sqrt{n}]^2+1,n},$$

$$R_n=\tau^n_{n-[\sqrt{n}]^2,n}+\ldots+\tau^n_{1,n}.$$

Заметим, что $R_n=0$ при n точном квадрате. Найдем для R_n мажоранту, используя, что

$$n-[\sqrt{n}]^2\leqslant 2[\sqrt{n}].$$

Имеем

$$R_n<\tau^n_{1,n}+\ldots+\tau^n_{2[\sqrt{n}],n}<2[\sqrt{n}]\tau^n_{2[\sqrt{n}],n}=2[\sqrt{n}]\sin^{2n}\frac{\pi[\sqrt{n}]}{n}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sqrt{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Вследствие монотонного убывания $\sin\pi/\sqrt{n}$ по n при $n\geqslant 16$ справедлива оценка

$$R_n<\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}. \qquad (4)$$

Этим остатком в общей оценке можно будет пренебречь. Определим миноранту для Φ_n:

$$\Phi_n+\frac{1}{2}>S_{[\sqrt{n}],n}>[\sqrt{n}]\tau^n_{n-[\sqrt{n}],n}=[\sqrt{n}]\sin^{2n}\frac{(n-[\sqrt{n}])}{2n}\pi=$$

$$=[\sqrt{n}]\cos^{2n}\frac{[\sqrt{n}]}{2n}\pi>\sqrt{n}\left(\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^n.$$

Вследствие монотонного возрастания $\left(\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt{n}}\right)^n$ по n при $n\geqslant 4$ справедлива оценка

$$\Phi_n+\frac{1}{2}>\frac{[\sqrt{n}]}{16}. \qquad (5)$$

Определим мажоранту для Φ_n:

$$\Phi_n<\sum_{k=1}^{[\sqrt{n}]}[\sqrt{n}]\tau^n_{n-k[\sqrt{n}],n}.$$

Так как

$$[\sqrt{n}]\tau^n_{n-k[\sqrt{n}],n}\leqslant\sqrt{n}\left(\sin^2\frac{(n-k[\sqrt{n}])}{2n}\pi\right)^n=$$

$$=\sqrt{n}\left(\cos^2\frac{k[\sqrt{n}]}{2n}\pi\right)^n \qquad (k=0,\ldots,[\sqrt{n}]),$$

то

$$\Phi_n < \sqrt{n} \sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} \cos^{2n} \frac{k[\sqrt{n}]}{2n} \pi.$$

При $0 \leqslant x \leqslant [\sqrt{n}]$ имеем

$$\sum_{k=0}^{[\sqrt{n}]} \cos^{2n} \frac{k[\sqrt{n}]}{2n} \pi < 1 + \int_0^{[\sqrt{n}]} \cos^{2n} \frac{x[\sqrt{n}]}{2n} \pi\, dx < 1 + \frac{2n}{\pi[\sqrt{n}]} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\, dt =$$

$$= 1 + \frac{2n}{\pi[\sqrt{n}]} \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, воспользовавшись формулой Стирлинга, получим

$$\Phi_n < \sqrt{n}\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right). \qquad (6)$$

Таким образом, из (5) и (6) имеем

$$\frac{[\sqrt{n}]}{16} - \frac{1}{2} < \Phi_n < \sqrt{n}\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right),$$

$$\frac{[\sqrt{n}]}{16n} - \frac{1}{2n} < u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right). \qquad (7)$$

Из (7) следует, что u_n есть бесконечно малая, имеющая порядок малости $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Если через* $(\Delta''^{(1)}_{i,n})_0^n$ и $(\Delta''^{(2)}_{i,n})_0^n$ *обозначить нагрузки при разложении отрезков* $(\nu_i)_0^n = \nu_0, \ldots, \nu_{n-1}, \nu_n''$ *и* $(\psi_i)_0^n = \psi_0, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_n''$ *по узлам* $(\tau_{i,n})_0^n$ *полинома Чебышева* $T_n(x)$, *то для длины чебышевского критического интервала n-го параметра отрезка (базис* $(\nu_i + \psi_i)_0^{n-1}$ *) имеет место формула*

$$L_n = \frac{(\tilde{\Delta}^{(n)} - \underset{\sim}{\Delta}^{(n)})}{2^{2n-1}} n, \qquad (8)$$

где

$$\tilde{\Delta}^{(n)} = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i \left|\Delta''^{(1)}_{i,n} + \Delta''^{(2)}_{i,n}\right|,$$

$$\underset{\sim}{\Delta}^{(n)} = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i \left|\Delta''^{(1)}_{i,n} + \Delta''^{(2)}_{i,n}\right|,$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{ если } 0 < i < n; \\ 2, \text{ если } i = 0,\ i = n. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отрезок-функционал

$$(\mu_i)_0^n = \nu_0 + \psi_0, \ \ldots, \ \nu_{n-1} + \psi_{n-1}, \ \nu_n'' + \psi_n''.$$

Его экстремальным полиномом является $T_n(x)$, и нагрузки $(\Delta_{i,n})_0^n$ при разложении этого отрезка по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ определяются выражением

$$\Delta_{i,n} = \Delta''^{(1)}_{i,n} + \Delta''^{(2)}_{i,n} \quad (i=0, \ldots, n).$$

Возможны два случая: 1. Ненагруженные узлы отрезков $(\nu_i)_0^n$ и $(\psi_i)_0^n$ полностью или частично совпадают. В этом случае среди чисел $(\Delta_{i,n})_0^n$ есть равные нулю, а это означает, что $\underset{\sim}{\Delta}^{(n)}=0$; $\mu''_n = \nu''_n + \psi''_n$. Тогда, согласно теореме 2 из [4], получим (8).

2. Ненагруженные узлы отрезков $(\nu_i)_0^n$ и $(\psi_i)_0^n$ не совпадают. В этом случае среди чисел $(\Delta_{i,n})_0^n$ нет равных нулю, а это означает, что $\mu''_n < \nu''_n + \psi''_n$. Будем искать μ''_n. Для этого введем в рассмотрение отрезок- функционал $(\gamma_i)_0^n = 0_0, \ldots, 0_{n-1}, h_n$.

Этот отрезок отличается от отрезка, определяющего полином Чебышева $+T_n(x)$ только множителем h ([1], с. 45), следовательно, $T_n(x)$ — его экстремальный полином с нагрузками $(\delta''_{i,n})_0^n$, вычисляемыми по формуле

$$\delta''_{i,n} = (-1)^{n-i} \frac{2^{2n-1}}{\varepsilon_i n} h \quad (i=0, \ldots, n). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь отрезок $(\mu_i - \gamma_i)_0^n$. Его нагрузками при разложении по узлам $(\tau_{i,n})_0^n$ будут числа $(\Delta_{i,n} - \delta''_{i,n})_0^n$. Согласно критерию экстремальности ([1], с. 40), для того чтобы полином этого отрезка $T_n(x)$ был экстремальным, необходимо и достаточно выполнения при всех i либо $\operatorname{sign}(\Delta_{i,n} - \delta''_{i,n}) = (-1)^{n-i}$, либо $\Delta_{i,n} - \delta''_{i,n} = 0$ (но не все i), причем, если хоть одно из чисел $\Delta_{i,n} - \delta''_{i,n} = 0$, то $\mu''_n = \mu_n - \gamma_n$.

Обозначив через h'' максимальное из чисел h, удовлетворяющих системе неравенств

$$|\Delta_{i,n}| - \frac{2^{2n-1}}{\varepsilon_i n} h \geqslant 0 \quad (i=0, \ldots, n),$$

получим

$$h'' = \underset{\sim}{\Delta}^{(n)} \frac{n}{2^{2n-1}}; \quad \mu''_n = \nu''_n + \psi''_n - \underset{\sim}{\Delta}^{(n)} \frac{n}{2^{2n-1}};$$

$$\Delta''_{i,n} = \Delta''^{(1)}_{i,n} + \Delta''^{(2)}_{i,n} - (-1)^{n-i} \frac{\underset{\sim}{\Delta}^{(n)}}{\varepsilon_i} \quad (i=0, \ldots, n). \tag{10}$$

Отсюда и согласно теореме 2 из [4] получим (8). Теорема доказана.

Теорема 3. *Последовательность $(u_i)_0^\infty$ является последовательностью с минимальной длиной чебышевского критического интервала для каждого частичного отрезка $(u_i)_0^n$ начиная с $n=2$.*

Доказательство. Рассмотрим отрезок-функционал

$$(\mu_i)_0^n = u_0, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1} + h, \mu''_n(h)$$

с переменным $(n-1)$ параметром и докажем, что имеют место формулы:

а) если n — нечетное, то

$$L_n(h)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2n-2}}+h, & \text{если } h\geqslant 0;\\ \dfrac{1}{2^{2n-2}}-(1-2\tau_{1,n})h, & \text{если } -\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}}\leqslant h<0;\\ -\dfrac{1}{2^{2n-2}}-h, & \text{если } h<-\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}};\end{cases}\qquad(11)$$

б) если n — четное, то

$$L_n(h)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2n-2}}+(1-\tau_{1,n})|h|, & \text{если } |h|\leqslant\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}};\\ |h|, & \text{если } |h|>\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}}.\end{cases}\qquad(12)$$

Для нахождения $L_n(h)$ воспользуемся (8), положив

$$(v_i)_0^n=0_0,\ \ldots,\ 0_{n-2},\ h_{n-1},\ v_n''(h);\qquad(\psi_i)_0^n=u_0,\ \ldots,\ u_{n-1},\ u_n''.$$

Тогда нетрудно показать, что

$$\Delta_{i,n}''^{(1)}=\begin{cases}(-1)^{n-i}\tau_{i,n}h\dfrac{2^{2n-1}}{\varepsilon_i n} & \text{при } h\geqslant 0,\\ (-1)^{n-i}(1-\tau_{i,n})h\dfrac{2^{2n-1}}{\varepsilon_i n} & \text{при } h<0.\end{cases}\qquad(13)$$

Из [2] и [3] имеем

а) если n — нечетное, то

$$\Delta_{2i,n}''^{(2)}=0;\quad \varepsilon_i|\Delta_{2i+1,n}''^{(2)}|=\frac{2}{n}\quad\left(i=0,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{2}\right]\right);\qquad(14)$$

б) если n — четное, то

$$\Delta_{2i+1,n}''^{(2)}=0;\quad \varepsilon_i|\Delta_{2i,n}''^{(2)}|=\frac{2}{n}\quad\left(i=0,\ \ldots,\ \frac{n}{2}\right).\qquad(15)$$

Отсюда

а) если n — нечетное, то

$$\tilde{\Delta}^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{2}{n}+\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } h\geqslant 0;\\ \dfrac{2}{n}-(1-\tau_{1,n})\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } -\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}}\leqslant h<0;\\ -\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } h<-\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}};\end{cases}\qquad(16)$$

$$\underset{\sim}{\Delta}^{(n)}=\begin{cases}0, & \text{если } h\geqslant 0;\\ \tau_{1,n}\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } -\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}}\leqslant h<0;\\ -\dfrac{2}{n}, & \text{если } h<-\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}}\end{cases}\qquad(17)$$

Подставив (16) и (17) в (8), получим (11).

б) если n — четное, то

$$\tilde{\Delta}^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{2}{n}+\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } h\geqslant 0;\\ \dfrac{2}{n}-\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } h<0;\end{cases} \tag{18}$$

$$\underset{\sim}{\Delta}^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{2}{n}, & \text{если } |h|\geqslant\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}};\\ \tau_{1,n}\dfrac{2^{2n-1}}{n}h, & \text{если } |h|<\dfrac{1}{2^{2n-2}\tau_{1,n}}.\end{cases} \tag{19}$$

Подставив (18) и (19) в (8), получим (12).

Таким образом, независимо от n $L_n(h)$ минимальна при $h=0$; следовательно, если мы имеем отрезок-функционал $(u_i)_0^{n-2}$ $(n\geqslant 2)$ и хотим его продолжить так, чтобы L_n была минимальной, что в качестве $(n-1)$-го параметра необходимо брать u_{n-1}, и $(u_i)_0^{\infty}$ — будет последовательностью с минимальной длиной чебышевского критического интервала для каждого ее частичного отрезка начиная с $n=2$.

С л е д с т в и е. Для длины чебышевского критического интервала L_n любого отрезка-функционала $(\mu_i)_0^n$ имеет место оценка

$$L_n\geqslant\frac{\mu_0}{2^{2n-2}}. \tag{20}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вороновская Е. В., Метод функционалов и его приложения, Л., 1963.
2. Вороновская Е. В., ДАН, 206, № 1, с. 17—21 (1972).
3. Ярв Э. А., ДАН, 206, № 1, с. 33—36 (1972).
4. Вороновская Е. В., Ярв Э. А., ДАН, 197, № 1, с. 21—24 (1971).

Ленинградский электротехнический институт связи им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступила в редакцию 26/VI 1973

Eleonora JÄRV

TŠEBÕŠOVI TÜÜPI STABIILSUSEGA FUNKTSIONAALIDE OMADUSI

Artiklis tõestatakse, et Tšebõševi tüüpi stabiilsusega funktsionaalidel $F=(u_i)_0^{\infty}$ on järgmised omadused:

1) u_n läheneb nullile kiirusega $1/\sqrt{n}$;

2) kui $n\geqslant 2$, siis iga osalõike $(u_i)_0^n$ jaoks on $(u_i)_0^{\infty}$ Tšebõševi kriitilise vahemiku minimaalse pikkusega jadaks.

Teoreemi järeldusena on saadud suvalise osalõike $F_n=(u_i)_0^n$ Tšebõševi kriitilise vahemiku minoranthinnang.

Eleonora JÄRV

PROPERTIES OF THE CHEBYSHEV STABLE FUNCTIONAL

In the present paper the following properties of the Chebyshev stable functional $F=(u_i)_0^{\infty}$ are investigated:

1. u_n tends to zero and is of the order $1/\sqrt{n}$;

2. $(u_i)_0^{\infty}$ is a sequence with a minimum length of the Chebyshev critical interval for each partial segment $(u_i)_0^n$ beginning with $n=2$.

As a result of this theorem, we get the minorant evaluation for the Chebyshev critical interval of any segment-functional $F_n=(\mu_i)_0^n$.