EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.1.14

УДК 539.126

КАДРИН ЛОЙДЕ, Р.-К. ЛОЙДЕ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФОЛДИ—ВАУТХОЙЗЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА $U(1, 3)$

KADRIN LOIDE, R.-K. LOIDE. FOLDY-WOUTHUYSENI TEISENDUS $U(1, 3)$-TÜÜPI VÕRRANDITE JAOKS

KADRIN LOIDE, R.-K. LOIDE. FOLDY-WOUTHUYSEN TRANSFORMATION FOR $U(1, 3)$-TYPE EQUATIONS

Аналогично преобразованию Фолди—Ваутхойзена для уравнений, связанных с группой де Ситтера [1], рассмотрим такое преобразование для уравнений, связанных с группой $U(1, 3)$. Найдем условия, когда преобразование Фолди—Ваутхойзена связано с преобразованием Лоренца, переводящим частицу в систему покоя.

Рассмотрим релятивистски инвариантное уравнение второго порядка

$$p_\mu p_\nu \beta^{\mu\nu} \Psi(p) = \varkappa^2 \Psi(p), \quad \varkappa > 0, \tag{1}$$

где матрицы $\beta^{\mu\nu}$ и генераторы $S^{\mu\nu}$ представления $\Psi(p)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned}
[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho};\\
[\beta^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] &= g^{\mu\rho} \beta^{\sigma\nu} - g^{\mu\sigma} \beta^{\rho\nu} + g^{\rho\nu} \beta^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma} \beta^{\mu\rho};\\
[\beta^{\mu\nu}, \beta^{\rho\sigma}] &= g^{\nu\rho} S^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} S^{\mu\rho},
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mu, \nu, \varrho, \sigma = 0, 1, 2, 3$; $g^{00} = +1$; $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$. Соотношения (2) дают алгебру Ли группы $U(1, 3)$ [2]. Уравнение (1), где $\beta^{\mu\nu}$ и $S^{\mu\nu}$ удовлетворяют соотношениям (2), назовем уравнением типа $U(1, 3)$.

Преобразование Фолди—Ваутхойзена для уравнений типа $U(1, 3)$ определим оператором

$$U_{F-W} = \exp(-v_k \beta^{k0}), \tag{3}$$

где $k = 1, 2, 3$; $\dfrac{v^k}{v} = \dfrac{p^k}{p}$; $p \equiv |\mathbf{p}|$ и $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

С учетом соотношений (2) уравнение (1) в представлении Фолди—Ваутхойзена имеет вид ($\Psi_{F-W} = U_{F-W}\Psi(p)$)

$$\beta(p)_{F-W} \Psi_{F-W} = \varkappa^2 \Psi_{F-W}, \tag{4}$$

где

$$\beta(p)_{F-W} = \frac{\beta^{00}}{2}[(p^{0^2} + p^2)\cos 2v + m^2] + 2p^0 p_k \beta^{k0} + \\
+ \frac{p_k}{p} S^{0k}(p^{0^2} + p^2)\sin 2v + \frac{p_k p_l}{2p^2}\beta^{kl}[(p^{0^2} + p^2)\cos 2v - m^2] \tag{5}$$

и m — масса покоя частицы ($p_\mu p^\mu = m^2$).

Обычное преобразование Фолди—Ваутхойзена зададим параметром v_{F-W}, где $\tan v_{F-W} = p/p^0$. Получим

$$\beta(p)^{F-W}\Psi^{F-W} = \varkappa^2\Psi^{F-W}, \tag{6}$$

где

$$\beta(p)^{F-W} = m^2\beta^{00} + 2p_0p_k(\beta^{k0} + S^{0k}). \tag{7}$$

В системе покоя $\mathbf{p} = 0$, $\hat{p} = \epsilon m$ и уравнение (1) имеет вид

$$m^2\beta^{00}\Psi = \varkappa^2\Psi. \tag{8}$$

Найдем условия, когда уравнения (6) и (8) эквивалентны, т. е. когда уравнение

$$\left[\beta^{00} + \frac{2p_0p_k}{m^2}(\beta^{k0} + S^{0k})\right]\Psi^{F-W} = h\Psi^{F-W} \tag{9}$$

и уравнение

$$\beta^{00}\Psi = h\Psi, \tag{10}$$

где $h = \varkappa^2/m^2$, имеют одинаковые решения.

Если определить операторы $F^k = \beta^{k0} + S^{0k}$, то из соотношений (2) получим

$$[\beta^{00}, F^k] = 2F^k. \tag{11}$$

Для собственной функции Ψ_h оператора β^{00} ($\beta^{00}\Psi_h = h\Psi_h$) из соотношения (11) следует, что $u^k \equiv F^k\Psi_h$ является собственной функцией β^{00} с собственным значением $h + 2$. Для каждого конечномерного неприводимого представления группы $U(1, 3)$ существует $h_{\max}$, при котором $F^k\Psi_{h_{\max}} = 0$, но при $h < h_{\max}$ $F^k\Psi_h \neq 0$. Итак, для $h_{\max}$ решение уравнения (10) является одновременно и решением уравнения (9) и наоборот, поскольку $1/m^2 \cdot \beta(p)^{F-W}$ может рассматриваться как генератор группы $U(1, 3)$ в новом базисе и поэтому не может иметь других собственных функций с собственным значением $h_{\max}$, кроме тех, которые даны уравнением (10). Для $h \neq h_{\max}$ в общем $F^k\Psi_h \neq 0$ и такие решения уравнения (10) уравнению (9) уже не удовлетворяют.

Следовательно, для $h_{\max}$ преобразование Фолди—Ваутхойзена эквивалентно (в смысле эквивалентности уравнений (9) и (10)) преобразованию Лоренца, переводящему частицу в систему покоя.

Примером уравнения типа $U(1, 3)$ является уравнение Вейнберга для спина $s = 1$ [3]. В этом случае $\beta^{\mu\nu}$ и $S^{\mu\nu}$ можно записать в следующем виде:

$$\beta^{00} = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^{k0} = \begin{vmatrix} 0 & S^k \\ -S^k & 0 \end{vmatrix}, \quad \beta^{kl} = \begin{vmatrix} 0 & \{S^k, S^l\} + g^{kl} \\ \{S^k, S^l\} + g^{kl} & 0 \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$S^{0k} = \begin{vmatrix} -S^k & 0 \\ 0 & S^k \end{vmatrix}, \quad S^{kl} = i\epsilon^{kl}_{m}\begin{vmatrix} S^m & 0 \\ 0 & S^m \end{vmatrix},$$

где $\{A, B\} = AB + BA$, ϵ^{klm} — полностью антисимметричный тензор с $\epsilon^{123} = +1$, S^k ($k = 1, 2, 3$) — генераторы группы вращений для спина $s = 1$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[S^k, S^l] = -i\epsilon^{kl}_{m}S^m. \tag{13}$$

Кроме того, для $s = 1$ S^k удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$S^iS^jS^k + S^kS^jS^i = -g^{ij}S^k - g^{jk}S^i. \tag{14}$$

Теперь, используя (12)—(14), легко проверить, что $\beta^{\mu\nu}$ и $S^{\mu\nu}$ удовлетворяют соотношениям (2), т. е. дают алгебру Ли группы $U(1,3)$.

Для уравнения Вейнберга β^{00} имеет собственные значения ± 1. Собственное значение $+1$ описывает частицу с массой покоя m и спином $s=1$. Поскольку $h_{\max}=+1$, то для уравнения Вейнберга преобразование Фолди—Ваутхойзена эквивалентно преобразованию Лоренца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loide R. K., Relation Between Foldy-Wouthuysen and Lorentz Transformations, Preprint FAI—8, Tartu, 1971.
2. Kursunoglu B., Phys. Rev., **D1**, 1115 (1970).
3. Weinberg S., Phys. Rev., **133B**, 1318 (1964).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
4/VII 1972

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 1

УДК 622.337.2.02 : 621.3

Г. НЕЙФЕЛЬД

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГОРЮЧИХ СЛАНЦЕВ И ИЗВЕСТНЯКОВ ЭСТОНИИ

H. NEUFELD. EESTI POLEVKIVI JA LUBJAKIVI ELEKTRILISTE OMADUSTE UURIMINE

H. NEUFELD. UNTERSUCHUNG DER ELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES ÖLSCHIEFERS UND KALKSTEINS ESTLANDS

Для создания автогенераторных средств контроля технологических параметров горных пород и их привязки к системам автоматизации производственных процессов необходимо предварительно исследовать электрические свойства горных пород, так как получающие широкое распространение высокочастотные методы [1, 2] контроля используют различия именно в электрических свойствах полезных ископаемых и пустых пород. Поэтому максимальный эффект при использовании этих методов в сланцевой промышленности может быть получен на основе комплексного исследования электрических свойств как сланцев, так и известняков. В данном сообщении приведены результаты исследования автором зависимостей электрических свойств сланцев и известняков от частоты внешнего электромагнитного поля, а также от их калорийности, влажности и слоистости.

Электрические свойства пород измерялись накладным конденсатором из двух одинаковых медных дисковых пластин диаметром 3 *см*, располо-