EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.1.13

УДК 539.126

Р.-К. ЛОЙДЕ

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЕЙНБЕРГА

R.-K. LOIDE. WEINBERGI VÕRRANDI TAANDAMINE

R.-K. LOIDE. THE REDUCTION OF WEINBERG'S EQUATION

Используя формализм работы [1], рассмотрим приведение уравнения Вейнберга к уравнению первого порядка. Покажем, что для спина $s=1$ и действительной массы покоя приведенное уравнение эквивалентно уравнению Кеммера—Дэффина.

Уравнение Вейнберга для частицы со спином s имеет вид [2]

$$p_{\mu_1}\ldots p_{\mu_{2s}}\beta^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}\Psi(p)=m^{2s}\Psi(p), \qquad m>0, \tag{1}$$

где $\Psi(p)$ преобразуется по представлению $(s,0)\oplus(0,s)$ группы Лоренца. Волновую функцию $\Psi(p)$, $\beta^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}$ и генераторы группы Лоренца $S^{\mu\nu}(\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ запишем следующим образом:

$$\Psi(p)=\begin{pmatrix}\psi(p)\\ \phi(p)\end{pmatrix}, \qquad \beta^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}=\begin{pmatrix}0 & \bar{t}^{\mu_1\ldots\mu_{2s}}\\ t^{\mu_1\ldots\mu_{2s}} & 0\end{pmatrix}, \qquad S^{0k}=\begin{pmatrix}-S^k & 0\\ 0 & S^k\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\psi(p)$ и $\phi(p)$ преобразуются соответственно по представлениям $(s,\ 0)$ и $(0,\ s)$; S^k $(k=1,\ 2,\ 3)$ — генераторы группы вращений для спина s. Общее приведенное уравнение первого порядка имеет вид

$$\begin{gathered}p_{\mu_1}\beta^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}\Psi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}=m\Psi,\\ p_{\mu_2}\Psi_{\mu_3\ldots\mu_{2s}}=m\Psi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}},\\ \ldots\ldots\ldots\\ p_{\mu_{2s-1}}\Psi_{\mu_{2s}}=m\Psi_{\mu_{2s-1}\mu_{2s}},\\ p_{\mu_{2s}}\Psi=m\Psi_{\mu_{2s}},\end{gathered} \tag{3}$$

где первое из них получено из уравнения (1). Выясним, какие представления содержатся в приведенном уравнении. На основании (2) запишем первое уравнение (3) в виде

$$\begin{gathered}p_{\mu_1}\bar{t}^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}\phi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}=m\psi,\\ p_{\mu_1}t^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2s}}\psi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}=m\phi.\end{gathered} \tag{4}$$

Функции $\psi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}$ и $\phi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}$ преобразуются соответственно по представлениям $(^1/_2,\ ^1/_2)^{\otimes 2s-1}\otimes(s,0)$ и $(^1/_2,\ ^1/_2)^{\otimes 2s-1}\otimes(0,s)$. Из уравнения (4) видно, что $\phi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}$ может содержать только представления $(s+{}^1/_2,\ ^1/_2)$ и $(s-{}^1/_2,\ ^1/_2)$. Но, так как прямое произведение $(^1/_2,\ ^1/_2)^{\otimes 2s-1}\otimes(0,s)$ содержит из них только $(s-{}^1/_2,\ ^1/_2)$, то $\phi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}$ в уравнении (4) преобразуется по представлению $(s-{}^1/_2,\ ^1/_2)$.

Итак, в первом вспомогательном уравнении $p_{\mu_2}\Psi_{\mu_3\ldots\mu_{2s}}=m\Psi_{\mu_2\ldots\mu_{2s}}$ в правой стороне нужны только представления $(s-{}^1/_2, {}^1/_2)$ и $({}^1/_2, s-{}^1/_2)$. Из приведенных выше рассуждений получаем, что в этом случае $\Psi_{\mu_3\ldots\mu_{2s}}$ содержит представления $(s-1, 1)$ и $(1, s-1)$.

Таким образом, в приведенном уравнении имеются следующие представления:

$$\begin{array}{lll} \Psi & (s,0) & (0,s) \\ \Psi_{\mu_1} & \left(s-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}\right) \\ \Psi_{\mu_1\mu_2} & (s-1,1) & (1,s-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{\mu_1\ldots\mu_{2s-1}} & \left(\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}\right) & \left(s-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \end{array} \tag{5}$$

Все представления, кроме $(s,0)$ и $(0,s)$, — двукратные. Приведенное уравнение имеет $N=s/3(8s^2+24s+10)$ компонентов.

Приведем уравнение Вейнберга для $s=1$. Из (5) видно, что, кроме $(1,0)$ и $(0,1)$, имеются еще два представления $({}^1/_2, {}^1/_2)$. Введем для представлений следующие обозначения: $\psi_{(1,0)}$, $\psi_{({}^1/_2,{}^1/_2)}$, $\phi_{({}^1/_2,{}^1/_2)}$ и $\phi_{(0,1)}$. Тогда уравнение (4) имеет вид

$$\begin{aligned} p_\mu t^\mu_{(1,0)({}^1/_2,{}^1/_2)}\phi_{({}^1/_2,{}^1/_2)} &= m\psi_{(1,0)}, \\ p_\mu t^\mu_{(0,1)({}^1/_2,{}^1/_2)}\psi_{({}^1/_2,{}^1/_2)} &= m\phi_{(0,1)} \end{aligned} \tag{6}$$

где матрицы t^μ связаны с проекционными операторами спина и определены в работе [1]. Вспомогательные уравнения следующие:

$$\begin{aligned} p_\mu t^\mu_{({}^1/_2,{}^1/_2)(1,0)}\psi_{(1,0)} &= m\psi_{({}^1/_2,{}^1/_2)}, \\ p_\mu t^\mu_{({}^1/_2,{}^1/_2)(0,1)}\phi_{(0,1)} &= m\phi_{({}^1/_2,{}^1/_2)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Представления $\psi_{({}^1/_2,{}^1/_2)}$ и $\phi_{({}^1/_2,{}^1/_2)}$ выбраны в таком виде, чтобы они имели одинаковые генераторы. Из (6) и (7) можно выписать β^0 для приведенного уравнения Вейнберга

$$\beta^0=\left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & t_{(1,0)({}^1/_2,{}^1/_2)} & 0 \\ t_{({}^1/_2,{}^1/_2)(1,0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{({}^1/_2,{}^1/_2)(0,1)} \\ 0 & t_{(0,1)({}^1/_2,{}^1/_2)} & 0 & 0 \end{array}\right|. \tag{8}$$

Поскольку общим спином везде является $s=1$, то $t_{(a,b)(c,d)}\equiv\overset{(1)}{t}_{(a,b)(c,d)}$, где $\overset{(1)}{t}_{(a,b)(c,d)}$ — проекционный оператор спина $s=1$. Используя свойства проекционных операторов спина $\overset{(s)}{t}_{(a,b)(c,d)}\cdot\overset{(s')}{t}_{(c,d)(e,f)}=\delta_{ss'}\,\overset{(s)}{t}_{(a,b)(e,f)}$, легко проверить, что β^0 удовлетворяет характеристическому уравнению $\beta^c(\beta^{0^4}-1)=0$. Собственные значения β^0 равны ±1, $\pm i$ и 0. Собственное значение 0 соответствует спину $s=0$, но соответствующие решения в связи с $m\neq0$ отбрасываются. Собственные значения ±1 соответствуют спину $s = 1$ и действительной массе покоя m, а $\pm i$ спину $s = 1$ и комплексной массе покоя im.

Покажем, что для решения с действительной массой покоя ($\hat{p}^0 = m$) уравнение можно привести к виду, где одно из представлений ($^1/_2, {}^1/_2$) равно нулю и уравнение эквивалентно уравнению Кеммера—Дэффина для спина $s = 1$. Для этого осуществим над β^0 унитарное преобразование

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \sqrt{2} I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_4 & I_4 & 0 \\ 0 & I_4 & -I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} I_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Получим $\overline{\beta}^0 = U\beta^0 U^{-1}$, т. е.

$$\overline{\beta}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & t_{(1,0)(^1/_2,^1/_2)} & -t_{(1,0)(^1/_2,^1/_2)} & 0 \\ t_{(^1/_2,^1/_2)(1,0)} & 0 & 0 & t_{(^1/_2,^1/_2)(0,1)} \\ t_{(^1/_2,^1/_2)(1,0)} & 0 & 0 & -t_{(^1/_2,^1/_2)(0,1)} \\ 0 & t_{(0,1)(^1/_2,^1/_2)} & t_{(0,1)(^1/_2,^1/_2)} & 0 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Обозначая соответствующие представления $\psi_{(1,0)}$, $\overline{\psi}_{(^1/_2,^1/_2)}$, $\overline{\phi}_{(^1/_2,^1/_2)}$ и $\phi_{(0,1)}$, легко видеть, что уравнение $(p_\mu\overline{\beta}^\mu - m)\Phi = 0$ для решения с действительной массой покоя m дает $\overline{\phi}_{(^1/_2,^1/_2)} = 0$. В системе покоя $\mathrm{p} = 0$, $\hat{p}^0 = m$ и уравнение $\overline{\beta}^0\Phi = \Phi$ дает $\overline{\phi}_{(^1/_2,^1/_2)} = 0$. Но поскольку компоненты $\overline{\phi}_{(^1/_2,^1/_2)}$ преобразуются при преобразованиях Лоренца через сами себя, то для любого p^μ $\overline{\phi}_{(^1/_2,^1/_2)} = 0$. Следовательно, $\overline{\phi}_{(^1/_2,^1/_2)}$ можно отбросить и β^0 для представлений (1, 0), ($^1/_2$, $^1/_2$) и (0, 1) имеет вид

$$\beta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & t_{(1,0)(^1/_2,^1/_2)} & 0 \\ t_{(^1/_2,^1/_2)(1,0)} & 0 & t_{(^1/_2,^1/_2)(0,1)} \\ 0 & t_{(0,1)(^1/_2,^1/_2)} & 0 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Последнее равенство удовлетворяет характеристическому уравнению $\beta^0(\beta^{0^2} - 1) = 0$ и поэтому совпадает с β^0 для уравнения Кеммера—Дэффина.

Приведенное уравнение Вейнберга для спина s дает матрицу β^0, которая удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\beta^{0^{2s-1}}(\beta^{0^{4s}} - 1) = 0, \tag{12}$$

причем спин s соответствует собственным значениям ± 1 и $\pm i$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Loide R. K., Some Remarks on Relativistically Invariant Equations, Preprint FAI—10, Tartu, 1972.
2. Weinberg S., Phys. Rev., **133B**, 1318 (1964).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 4/VII 1972