EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.1.12

УДК 519.3 : 62—50

С. УЛЬМ

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

S. ULM. DEKOMPOSITSIOONIMEETOD MATEMAATILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANNETE LAHENDAMISEKS

S. ULM. A DECOMPOSITION METHOD FOR SOLVING MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Как известно, многие методы декомпозиции для решения сепарабельных задач математического программирования основываются на использовании множителей Лагранжа (см. напр., [1, 2]), где с точки зрения экономической интерпретации координация производится по ценам. С другой стороны, для некоторых классов задач программирования и оптимального управления целесообразно применять так наз. метод условного градиента [3], где координация идет по целям (см., напр., [4, 5]). В данной заметке эти два способа координации объединяются, причем задача программирования сводится к разысканию седловой точки функции Лагранжа, а для последней цели применяются алгоритмы, разработанные В. Ф. Демьяновым [6, 7]. Такой подход позволяет разложить на подзадачи более широкий класс задач. При этом естественным образом возникают трехуровневые схемы оптимизации.

Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования: максимизировать функцию

$$f(x) \tag{1}$$

при условиях

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$x_i \in R_i \quad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

Здесь $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $x_i=(x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$, причем при $i \neq j$ в общем $n_i \neq n_j$; $\sum_{i=1}^{n} n_i = l$; $b=(b_1, \ldots, b_m)$.

Предположим, что

а) $f(x)$ — вогнутая функция на множестве $R=R_1 \times \ldots \times R_n$;

б) рангом $(m \times l)$-матрицы A является m;

в) R_i $(i=1, \ldots, n)$ — выпуклые ограниченные замкнутые множества.

При сделанных предположениях нетрудно показать, что решение задачи (1)—(3) эквивалентно разысканию седловой точки функции Лагранжа

$$F(x, \lambda) = f(x) + (\lambda, b - Ax) \tag{4}$$

на прямом произведении множества R и m-мерного пространства векторов λ.

Чтобы для решения последней задачи применить, например, метод статьи [7], введем следующие дополнения:

1° предположим дополнительно, что $R_i (i = 1, \ldots, n)$ — строго выпуклые ограниченные множества;

2° предположим, что функция $f(x)$ на множестве R дважды непрерывно дифференцируема;

3° заменим функцию (4) строго вогнуто-выпуклой функцией *

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + (\lambda, b - Ax) + \alpha\|\lambda\|^2 - \beta\|x\|^2, \tag{5}$$

где α и β — достаточно малые положительные числа (такой прием использован, например, в [8, 9]);

4° поскольку оптимальный вектор λ является конечным, найдем седловую точку на множестве $R \times S$, где

$$S = \{\lambda \mid \|\lambda\| \leqslant r\}, \tag{6}$$

а r — достаточно большое положительное число.

Введем также обозначения:

$$H(x, \lambda) = \frac{1}{2}[u^2(x, \lambda) + v^2(x, \lambda)]; \tag{7}$$

$$u_i(x, \lambda) = \max_{z_i \in R_i} \left(\frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_i}, z_i - x_i \right) \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{8}$$

$$u(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x, \lambda); \tag{9}$$

$$v(x, \lambda) = \min_{t \in S} \left(\frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda}, t - \lambda \right); \tag{10}$$

$$u_i^{(k)} = u_i(x^{(k)}, \lambda^{(k)}); \quad u^{(k)} = u(x^{(k)}, \lambda^{(k)}); \quad v^{(k)} = v(x^{(k)}, \lambda^{(k)}).$$

Теперь по методу В. Ф. Демьянова [7] нетрудно получить следующую трехуровневую схему для приближенного решения задачи (1)—(3) ($k = 0, 1, \ldots$; $x^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$ — начальные приближения):

1° III уровень, имеющий информацию о векторе $(x^{(k)}, \lambda^{(k)})$, сообщает его II уровню, а значения $x_i^{(k)}$ — соответствующим подсистемам I уровня;

2° II уровень вычисляет производные $\partial\Phi(x^{(k)}, \lambda^{(k)})/\partial x$, $\partial\Phi(x^{(k)}, \lambda^{(k)})/\partial\lambda$ и сообщает $\partial\Phi/\partial\lambda$ III уровню, а $\partial\Phi/\partial x_i$ — соответствующим подсистемам I уровня;

3° Подсистемы I уровня вычисляют $z_i^{(k)}$, $u_i^{(k)}$ из задачи

$$u_i^{(k)} = \max_{z_i \in R_i} \left(\frac{\partial \Phi(x^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\partial x_i}, z_i - x_i^{(k)} \right) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

и сообщают эти величины III уровню; в то же время III уровень вычисляет $t^{(k)}$, $v^{(k)}$ из задачи

$$v^{(k)} = \min_{\|t\| \leqslant r} \left(\frac{\partial \Phi(x^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\partial \lambda}, t - \lambda^{(k)} \right); \tag{12}$$

---

* Нормы векторов в данной заметке предполагаются евклидовыми.

4° III уровень вычисляет

а) $u^{(k)}=\sum_{i=1}^{n} u_i^{(k)}$;

б) $a_k=\min\left\{\frac{1}{|u_k|};\ \frac{1}{|v_k|}\right\}$;

в) ε_k из задачи **

$$\min_{\varepsilon\in[0,a_k]} H(x^{(k)}+\varepsilon u^{(k)}(z^{(k)}-x^{(k)}),\quad \lambda^{(k)}-\varepsilon v^{(k)}(t^{(k)}-\lambda^{(k)}));\tag{13}$$

г) $$\begin{cases} x^{(k+1)}=x^{(k)}+\varepsilon_k u^{(k)}(z^{(k)}-x^{(k)}),\\ \lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}-\varepsilon_k v^{(k)}(t^{(k)}-\lambda^{(k)});\end{cases}\tag{14}$$

5° Если $H(x^{(k+1)},\ \lambda^{(k+1)})=0$, то процесс заканчивается. Если $H(x^{(k+1)},\ \lambda^{(k+1)})>0$, то процесс повторяется от п. 1°, причем k заменяется на $k+1$.

Отметим, что разложение задачи I уровня на независимые подзадачи получается на основании равенства

$$\max_{z\in R}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ z-x\right)=\sum_{i=1}^{n}\max_{z_i\in R_i}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i},\ z_i-x_i\right).\tag{15}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Lasdon L. S., Schoeffler J. D., ISA Trans., **5**, No. 2, 175 (1966).
2. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 3 (1969).
3. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **6**, 787 (1966).
4. Михалевич В. С., Ермольев Ю. М., Шкурба В. В., Шор Н. З., Кибернетика, № 5, 29 (1967).
5. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 245 (1969).
6. Демьянов В. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, № 19, вып. 4, 25 (1967).
7. Демьянов В. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, № 19, вып. 4, 137 (1970).
8. Демьянов В. Ф., ДАН СССР, **192**, № 1, 13 (1970).
9. Гермейер Ю. Б., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **10**, 39 (1970).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/VI 1972

** Для нахождения оптимального ε_k нужно решить задачи типа (11) и (12). Но имеются и другие, более простые способы для определения ε_k (ср. [6]).