

Ю. УДЕР

## ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ГОЛОГРАММЕ

Метод образования изображения путем восстановления волнового фронта [1] предложено называть голографией, что должно означать всестороннюю регистрацию световой волны в фотографическом процессе и ее последовательное восстановление. Однако в настоящее время в голограмме регистрируются только амплитуда и фаза волны, а в процессе восстановления не восстанавливается состояние поляризации исходной волны.

В 1965 г. А. У. Ломан предложил принцип восстановления векторных волновых фронтов [2], где используются два опорных пучка с взаимно перпендикулярными направлениями поляризации. В 1967 г. сообщалось об экспериментальной работе [3], в которой удалось реализовать идеи А. У. Ломана. В работе [4] с помощью объемных голограмм по этому же принципу регистрировалось и восстанавливалось состояние поляризации рассеянного объектом излучения. Далее С. Н. Курц [5] осуществил запись состояния поляризации при помощи кодированного опорного пучка, используя в качестве источника опорного пучка деполаризующий диффузор, освещенный линейно поляризованным пучком света. В этом случае ортогонально поляризованные составляющие опорного пучка имеют на голограмме весьма разные распределения комплексной амплитуды, вследствие чего разные состояния поляризации объектной волны регистрируются и восстанавливаются независимо друг от друга.

Характерным для всех упомянутых работ является учет поляризации света главным образом в процессе получения голограммы. По поводу процесса восстановления придерживаются мнения, что поляризация восстановленной объектной волны совпадает с состоянием поляризации опорной волны. Точное электродинамическое описание процесса восстановления осуществлено в нескольких работах (см., напр., [6, 7]) только в случае объемных голограмм с синусоидальным законом изменения диэлектрической проницаемости. В [8] были изложены общие принципы восстановления электромагнитных волн из поверхностных голограмм с произвольной пространственной формой. Коэффициент пропускания этой поверхности не является скаляром, а описывается определенной матрицей, конкретные значения элементов которой или принципы их определения в работе [8] не рассматриваются.

Целью настоящей статьи является электродинамическое описание процесса восстановления в случае бесконечно протяженной плоской го-

лограммы, коэффициент пропускания которой зависит от пространственных координат по «обычному» закону [1]

$$\tau(x, y) = \tau_0 + \tau_1(x, y), \quad (1)$$

где  $\tau_0$  — постоянная в пределах голограммы, а  $\tau_1$  — пропорциональна интенсивности света во время экспозиции

$$\tau_1(x, y) = c(E_r^* E_o + E_r E_o^*). \quad (2)$$

Здесь  $E_o$  и  $E_r$  — комплексные амплитуды электрического поля соответственно в объектном и опорном пучках света. Будем рассматривать случай плоской опорной волны.

### 1. Применение принципа Гюйгенса в задаче дифракции электромагнитных волн на плоской голограмме

Пусть монохроматическая электромагнитная волна  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \exp(-i\omega t)$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H} \exp(-i\omega t)$  падает на бесконечную плоскую голограмму, заполняющую всю плоскость  $z = 0$  (рис. 1). Часть падающей электромагнитной волны отражается от поверхности голограммы, часть проходит через нее. Поскольку оптические свойства голограммы во всех ее точках не одинаковы, при прохождении и отражении волн наблюдается их дифракция.

Если исходить из уравнений Максвелла и обычных граничных условий, проблема дифракции электромагнитного излучения на некотором теле сводится к строго определенной краевой математической задаче [9, 10]. Предположим, что нам известны комплексные амплитуды поля на обеих поверхностях голограммы

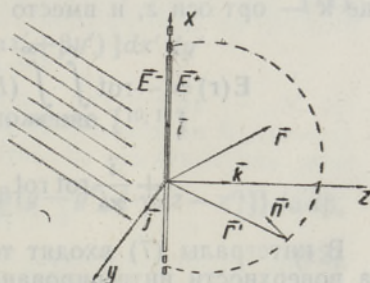


Рис. 1. К выводу формулы электромагнитной волны, прошедшей сквозь плоскую голограмму.

$$\mathbf{E}^\pm = \lim_{z \rightarrow \pm 0} \mathbf{E}(x, y, z); \quad \mathbf{H}^\pm = \lim_{z \rightarrow \pm 0} \mathbf{H}(x, y, z), \quad (3)$$

где знаки « $\pm$ » обозначают приближения к поверхности  $z = 0$  соответственно с положительного и отрицательного направления координатной оси  $z$  (рис. 1). Используем для определения поля в пространстве  $z > 0$  свойство решения уравнений Максвелла, состоящее в том, что значение волновой функции в некоторой точке пространства может быть представлено интегралом по произвольной замкнутой поверхности, охватывающей эту точку. Мы используем здесь формулу Франца [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \operatorname{rot} \oint_S [\mathbf{n}' \mathbf{E}(\mathbf{r}')] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \\ & - \frac{i}{\kappa_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \oint_S [\mathbf{n}' \mathbf{H}(\mathbf{r}')] G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (4)$$

где интегрирование производится по некоторой замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей точку  $\mathbf{r}$ , в которой вычисляется напряженность поля

$E(\mathbf{r})$ . Поверхность  $S$  с внутренней нормалью  $\mathbf{n}'$  в точке интегрирования  $\mathbf{r}'$  ограничивает область поля, которая не имеет ни особенностей, ни разрывов. В (4) квадратные скобки обозначают векторные произведения, а интегралы содержат функцию Грина для свободного пространства

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-i\kappa_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5)$$

где  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ ,  $\kappa_0 = 2\pi/\lambda$  и  $\lambda$  — длина волны.

Аналогичное выражение имеет место для магнитного вектора поля. Воспользуемся замкнутой поверхностью, которая образуется плоскостью  $z = 0$  и бесконечной полусферой, охватывающей точку наблюдения в пространстве  $z > 0$  и замыкающейся на поверхности  $z = 0$  (рис. 1). Предположим, что поле в пространстве  $z > 0$  при  $\mathbf{r}' \rightarrow \infty$  убывает быстрее, чем  $1/r'$  (в пространстве  $z > 0$  имеет место бесконечно малое поглощение электромагнитной энергии). Тогда интегралы по бесконечной полусфере обратятся в нуль [10], и в выражении (4) придется интегрировать только по плоскости  $z' = 0$ . Поэтому

$$\mathbf{n}' = \mathbf{k}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{k}$  — орт оси  $z$ , и вместо (4) можно написать выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -\text{rot} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (E_y^+ \mathbf{i} - E_x^+ \mathbf{j}) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy' + \\ & + \frac{i}{\kappa_0} \text{rot rot} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (H_y^+ \mathbf{i} - H_x^+ \mathbf{j}) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dx' dy'. \end{aligned} \quad (7)$$

В интегралы (7) входят только тангенциальные составляющие поля на поверхности интегрирования. Известно [10], что решение уравнений Максвелла определяется однозначно, когда на  $S$  заданы тангенциальные составляющие либо  $\mathbf{E}$ , либо  $\mathbf{H}$  полей. Поэтому произвольно заданными являются только две из четырех составляющих поля в выражении (7). В общем случае функциональная зависимость между этими тангенциальными составляющими имеет вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{nH}(\mathbf{r})] = & - \oint_S [\mathbf{n}' [[\mathbf{n}' \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \text{grad } G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' - \\ & - i\kappa_0 [\mathbf{n rot} \oint_S [[\mathbf{n}' \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \text{grad } G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathbf{nE}(\mathbf{r})] = & - \oint_S [\mathbf{n}' [[\mathbf{n}' \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \text{grad } G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}' + \\ & + i\kappa_0 [\mathbf{n rot} \oint_S [[\mathbf{n}' \mathbf{H}(\mathbf{r}')] \text{grad } G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (9)$$

где точка наблюдения  $\mathbf{r}$  находится на поверхности  $S$  и первые интегралы взяты в смысле главного значения.

Учитывая соотношение (6), для подынтегральных функций в интегралах, взятых в смысле главного значения, получим

$$[n'[[n'H(r')] \text{ grad } G(r-r')]] = (H_y^+ i - H_x^+ j) \frac{\partial G(r-r')}{\partial z'}, \quad (10)$$

где  $z = z'$ . При таких значениях аргумента последняя производная равна нулю на всей поверхности интегрирования, кроме точки  $r = r'$ , где производная и, следовательно, подынтегральные функции являются неопределенными. В этих условиях интегралы, взятые в смысле главного значения, обращаются в нуль и тем самым уравнения (8) и (9) сильно упрощаются.

Выражения (8), (9) задаются в еще более простом виде через фурье-образы тангенциальных составляющих поля. Это следует из того факта, что фурье-образ свертки двух функций равен произведению фурье-образов этих функций [1], а интегралы в выражениях (8), (9) определяют не что иное, как свертку граничных значений поля с производными от функции Грина.

Обозначим фурье-образы тангенциальных составляющих поля через  $e_x, e_y, h_x$  и  $h_y$  так, что

$$E_x^+(x' y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e_x(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x' + \beta y')] d\alpha d\beta, \quad (11)$$

$$e_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_x^+(x', y') \exp[i(\alpha x' + \beta y')] dx' dy'$$

и т. д., и применим для функции Грина разложение [10, 11]

$$G(r-r') = -\frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma_0} \exp\{-i[\alpha(x-x') + \beta(y-y') + \gamma_0|z-z']\} d\alpha d\beta, \quad (12)$$

где

$$\gamma_0 = \begin{cases} (\kappa_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2} & \text{при } \alpha^2 + \beta^2 \leq \kappa_0^2, \\ -i(\alpha^2 + \beta^2 - \kappa_0^2)^{1/2} & \text{при } \alpha^2 + \beta^2 > \kappa_0^2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя эти разложения в (8), (9), мы получим там вместо интегралов свертки соответствующие фурье-интегралы и, произведя предусмотренные дифференцированием по  $x, y$  и  $z$  действия под знаком полученных интегралов, будем иметь

$$\begin{aligned} e_x(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\kappa_0 \gamma_0} [(\kappa_0^2 - \alpha^2) h_y(\alpha, \beta) + \alpha \beta h_x(\alpha, \beta)], \\ e_y(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\kappa_0 \gamma_0} [(\kappa_0^2 - \beta^2) h_x(\alpha, \beta) + \alpha \beta h_y(\alpha, \beta)], \\ h_x(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\kappa_0 \gamma_0} [(\kappa_0^2 - \alpha^2) e_y(\alpha, \beta) + \alpha \beta e_x(\alpha, \beta)], \\ h_y(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\kappa_0 \gamma_0} [(\kappa_0^2 - \beta^2) e_x(\alpha, \beta) + \alpha \beta e_y(\alpha, \beta)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения (14) позволяют определить фурье-образы тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности  $z = \text{const}$ , если они известны для магнитного поля, и наоборот.

Возвратимся теперь к формуле (7). Подставим в нее разложения (11) и (12) и, изменяя порядок интегрирования, вычислим интегралы

по  $x'$  и  $y'$ . В результате получим дельта-функцию Дирака. Используя известное свойство этой функции, сократим кратность интегрирования еще на два. После дифференцирования  $\text{rot}$  и  $\text{rot rot}$  под знаками оставшихся интегралов и исключения из них фурье-образов тангенциальных составляющих магнитного поля  $h_x$  и  $h_y$  при помощи соотношений (14), выражение (7) приводится к виду

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( i e_x + j e_y - k \frac{\alpha e_x + \beta e_y}{\gamma_0} \right) \exp[-i(\alpha x + \beta y + \gamma_0 z)] d\alpha d\beta. \quad (15)$$

Примечательно здесь то, что оба слагаемых в (7), из которых одно содержит тангенциальные составляющие электрического, а другое — магнитного поля, сводятся к выражению (15) множителем  $1/2$ . Это свидетельствует о равноправности значений электрического и магнитного поля на поверхности  $S$  при определении поля в остальной части пространства по принципу Гюйгенса.

## 2. Определение граничных значений

В скалярной теории плоских голограмм амплитуда поля непосредственно за голограммой вычисляется так [1]:

$$A_S(x, y, 0) = \tau(x, y) A_i(x, y, 0), \quad (16)$$

где  $A_i$  — амплитуда падающей волны на поверхности голограммы ( $z = 0$ ). В нашем случае электромагнитной задачи мы могли бы поступить аналогичным образом, записав для амплитуды электрического поля

$$\mathbf{E}_S(x, y, 0) = \tau(x, y) \mathbf{E}_i(x, y, 0), \quad (17)$$

— при прохождении через голограмму поляризация электромагнитной волны не изменяется. Тогда возникает вопрос: на *каких* основаниях мы предпочли напряженность электрического поля? Ведь в (4) напряженность магнитного поля выступает в равной роли с напряженностью электрического поля [10]. Такого предпочтения не существовало бы, если в это же время мы могли бы написать для напряженности магнитного поля

$$\mathbf{H}_S(x, y, 0) = \tau(x, y) \mathbf{H}_i(x, y, 0), \quad (18)$$

где  $\mathbf{H}_i = \frac{i}{\chi_0} \text{rot } \mathbf{E}_i$ . Однако результаты, полученные из граничных значений (17) и (18), противоречат друг другу.

Определим граничные значения поля, удовлетворяющие соотношениям связи (14) так, чтобы не отдать предпочтения ни электрическому, ни магнитному полю. Для этого воспользуемся векторным потенциалом электромагнитного поля [12], предполагая при  $z \rightarrow 0$

$$\mathbf{A}_S(x, y, z) = \tau(x, y) \mathbf{A}_i(x, y, z) \quad (19)$$

и продолжая эту функцию в остальную часть пространства так, чтобы она удовлетворяла однородному волновому уравнению [12]

$$\Delta \mathbf{A}_S + \chi_0^2 \mathbf{A}_S = 0. \quad (20)$$

Тогда

$$\mathbf{H}_S = \text{rot } \mathbf{A}_S, \quad \mathbf{E}_S = -\frac{i}{\chi_0} \text{rot rot } \mathbf{A}_S. \quad (21)$$

Напомним при этом, что (19), (20) могут содержать неточность, определяемую градиентом от произвольной функции координат пространства, что не оказывает влияния на определяемое выражениями (21) значение поля.

Используя для векторного потенциала падающей волны разложение

$$A_i(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_i(\alpha, \beta) \exp[-i(\alpha x + \beta y + \gamma_0 z)] d\alpha d\beta, \quad (22)$$

из (19) на основании теоремы свертки [1] можно получить для фурье-образа прошедшей волны выражение

$$a_s(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(\alpha - \xi, \beta - \eta) a_i(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (23)$$

где

$$t(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x, y) \exp[i(\alpha x + \beta y)] dx dy. \quad (24)$$

При этом разложение для  $A_s$ , которое согласуется с уравнением (20), пишется тоже в виде (22), где только индекс  $i$  заменяется на  $s$ . Используя это разложение, из (21) получим

$$\begin{aligned} h_x(\alpha, \beta) &= -i[\vec{\alpha} \times \mathbf{a}_s(\alpha, \beta)]_x, \\ h_y(\alpha, \beta) &= -i[\vec{\alpha} \times \mathbf{a}_s(\alpha, \beta)]_y, \\ e_x(\alpha, \beta) &= \frac{i}{\gamma_0} \{\vec{\alpha} \times [\vec{\alpha} \times \mathbf{a}_s(\alpha, \beta)]\}_x, \\ e_y(\alpha, \beta) &= \frac{i}{\gamma_0} \{\vec{\alpha} \times [\vec{\alpha} \times \mathbf{a}_s(\alpha, \beta)]\}_y, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\vec{\alpha} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma_0 \mathbf{k}$  и знаком « $\times$ » обозначается векторное произведение. Подставляя полученные выражения в (14), убедимся в правильности полученных соотношений.

При помощи соотношений (25) выражение (15) переписывается в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\gamma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\vec{\alpha}(\vec{\alpha} a_s) - \gamma_0^2 \mathbf{a}_s] \exp(-i\vec{\alpha} \mathbf{r}) d\alpha d\beta, \quad (26)$$

а аналогичное выражение для магнитного поля примет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\alpha} \times \mathbf{a}_s \exp(-i\vec{\alpha} \mathbf{r}) d\alpha d\beta. \quad (27)$$

Интегралы (26) и (27) удовлетворяют уравнениям Максвелла независимо от каких-либо наложенных на  $a_s$  условий, кроме тех, которые обеспечивают сходимость этих интегралов. Они определяют точные выражения для прошедших сквозь голограмму световых волн, если заданы точные значения фурье-образа векторного потенциала непосредственно за голограммой. Точность решения зависит от точности выражения (19).

### 3. Электрическое поле восстановленной световой волны

Пусть голограмма освещается плоской волной

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{e} \exp(-i\vec{a}_1 \mathbf{r}), \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{h} \exp(-i\vec{a}_1 \mathbf{r}), \quad (28)$$

где  $\vec{a}_1 = a_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \gamma_1 \mathbf{k}$ ,  $a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = \kappa_0^2$ ,  $\vec{a}_1 \mathbf{e} = 0$  и  $\vec{a}_1 \mathbf{h} = 0$ . Тогда можно положить

$$a_i(\alpha, \beta) = \frac{i}{\kappa_0} \mathbf{e} \delta(\alpha - a_1) \delta(\beta - \beta_1), \quad (29)$$

где  $\delta(\alpha)$  — дельта-функция Дирака. Из (23) при помощи (29) получим

$$a_S(\alpha, \beta) = \frac{i}{\kappa_0} \mathbf{e} t(\alpha - a_1, \beta - \beta_1), \quad (30)$$

что, в свою очередь, позволяет переписать выражение (26) в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{e} - \frac{1}{\kappa_0^2} (\vec{a} \mathbf{e}) \vec{a} \right] t(\alpha - a_1, \beta - \beta_1) \exp(-i\vec{a} \mathbf{r}) d\alpha d\beta. \quad (31)$$

Интеграл (31) есть разложение прошедшей сквозь голограмму световой волны по плоским волнам с постоянными волновыми числами  $\kappa_0 = |\mathbf{a}|$  и амплитудами, зависящими от направления распространения по отношению к направлению вектора поля в первичной плоской волне и от коэффициента пропускания голограммы для данной пространственной частоты ( $\alpha$  и  $\beta$ ). При этом коэффициенты пропускания считают независящими от состояния поляризации волн.

Пусть в процессе получения голограммы фотопластинка освещается объектной волной

$$\mathbf{E}_o(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_o(\xi, \eta) \exp[-i(\xi x + \eta y + \vartheta_0 z)] d\xi d\eta \quad (32)$$

и спорной волной

$$\mathbf{E}_r(x, y, z) = \mathbf{e}_r \exp[-i(\xi_1 x + \eta_1 y + \vartheta_1 z)], \quad (33)$$

где  $\xi^2 + \eta^2 + \vartheta_0^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \vartheta_1^2 = k_0^2$ ;  $\vartheta_0 = (k_0^2 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2}$  при  $\xi^2 + \eta^2 \leq k_0^2$  и  $\vartheta_0 = -i(\xi^2 + \eta^2 - k_0^2)^{1/2}$  при  $\xi^2 + \eta^2 > k_0^2$ ;  $k_0 = 2\pi/l$  и  $l$  — длина волны света в процессе получения голограммы. Векторы  $\mathbf{e}_o$  и  $\mathbf{e}_r$  перпендикулярны направлениям распространения соответствующих плоских волн (32) и (33). Тогда согласно закону пропускания (2) фурье-образ коэффициента пропускания голограммы (24) имеет вид

$$t(\xi, \eta) = c[\mathbf{e}_r^* \mathbf{e}_o(\xi + \xi_1, \eta + \eta_1) + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_o^*(-\xi + \xi_1, -\eta + \eta_1)]. \quad (34)$$

Подставляя это выражение в (31), имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{e} - \frac{1}{\kappa_0^2} (\vec{a} \mathbf{e}) \vec{a} \right] [\mathbf{e}_r^* \mathbf{e}_o(\alpha - a_1 + \xi_1, \beta - \beta_1 + \eta_1) + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_o^*(-\alpha + a_1 + \xi_1, -\beta + \beta_1 + \eta_1)] \exp(-i\vec{a} \mathbf{r}) d\alpha d\beta. \quad (35)$$

Первое слагаемое в (35) соответствует мнимому, а второе — действительному изображению предмета [1]. Отсюда вытекает, что в про-

цессе восстановления не имеет места смещение пространственных частот в фурье-спектре объектной волны, если восстановление происходит при условиях

$$\alpha_1 = \pm \xi_1, \quad \beta_1 = \pm \eta_1, \quad (36)$$

где знаки «+» и «-» обозначают соответственно случай мнимого и действительного изображений. Эти условия известны как условия устранения аберраций в скалярной теории голографических изображений [13-15].

#### 4. Восстановление поля излучения электрического диполя

Пусть объектом является электрический диполь, размеры которого малы по сравнению с длиной волны монохроматического излучения диполя. Электрическое поле излучения этого диполя выражается через амплитудное значение дипольного момента  $\mathbf{p}$  в следующем виде [12]:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \text{rot rot} \frac{\mathbf{p} \exp(-ik_0 R)}{R}, \quad (37)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  и  $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$  — радиус-вектор диполя. Подставляя разложение (12) в (37) и сравнивая полученное выражение с (32), мы можем написать для фурье-образа объектной волны формулу

$$\mathbf{e}_0(\xi, \eta) = -\frac{i}{2\pi\theta_0} \text{rot}_0 \text{rot}_0 [\mathbf{p} \exp(i\vec{\xi}\mathbf{r}_0)], \quad (38)$$

где  $\vec{\xi} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + \theta_0 \mathbf{k}$ .

В случае, когда восстановление происходит при условиях (36), из (35) с учетом выражения (38) получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [q(\alpha, \beta) + q^*(-\alpha, -\beta)] \left[ \mathbf{e} - \frac{1}{\kappa_0^2} (\mathbf{a}\mathbf{e})\mathbf{a} \right] \exp(-i\vec{\alpha}\mathbf{r}) d\alpha d\beta, \quad (39)$$

где

$$q(\xi, \eta) = -\frac{i}{2\pi\theta_0} \mathbf{e}_r^* \text{rot}_0 \text{rot}_0 [\mathbf{p} \exp(i\vec{\xi}\mathbf{r}_0)]. \quad (40)$$

Если  $k_0 = \kappa_0$ , то из (39) получим следующее выражение для мнимого изображения (после интегрирования в полярных координатах, где интеграл по полярному радиусу вычисляется согласно формуле Зоммерфельда. См. [10], с. 329):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{c}{\kappa_0^2} \text{rot rot} \left\{ \mathbf{e} \left[ \mathbf{e}_r^* \text{rot}_0 \text{rot}_0 \frac{\mathbf{p} \exp(-i\kappa_0 R)}{R} \right] \right\}, \quad (41)$$

где

$$R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}.$$

В случае действительного изображения интеграл (39) более сложен. Физически это обусловлено тем, что амплитуды неоднородных плоских волн на том месте, где формируется действительное изображение, будут ничтожно малыми по величине, а на месте мнимого изображения — конечными. Поэтому амплитуда поля (39) на мнимом изображении будет бесконечной, а на действительном — конечной.



Произведя указанные в (41) дифференцирования, получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{c\kappa_0^2}{R} \exp(-i\kappa_0 R) \left\{ \mathbf{e}_r \left[ \frac{\mathbf{R}}{R} \times \left( \mathbf{p} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \right] \left[ \frac{\mathbf{R}}{R} \times \left( \mathbf{e} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \right] \right\} \quad (42)$$

+ члены высшего порядка по  $1/R$ .

Здесь  $\mathbf{R} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ .

Дальнее поле электрического диполя восстанавливается в основном правильно, только дипольный момент диполя-изображения не имеет направления  $\mathbf{p}$  в пространстве. Его направление определяется амплитудным вектором поля опорной волны на стадии восстановления, т. е. вектором  $\mathbf{e}$ . Кроме того, на пути распространения лучей от изображения до точки наблюдения в том месте, где находится голограмма, как бы поставлен «фильтр абсорбции» с амплитудным коэффициентом пропускания [14]

$$\tau(x, y) = \mathbf{e}_r^* \left[ \frac{\mathbf{R}}{R} \times \left( \mathbf{p} \times \frac{\mathbf{R}}{R} \right) \right]_{z=0} \quad (43)$$

Пусть  $\mathbf{p} = p\mathbf{i} = E_u$ ,  $\mathbf{e}_r = E_{vx}\mathbf{i} - E_{vz}\mathbf{k} = E_v$  (см. рис. 2) и  $\mathbf{e} = e\mathbf{j}$ . Рассмотрим восстановленное поле (42) в плоскости  $y = y_0$  (рис. 1) в новых координатных осях, где  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ . Тогда выражение (42) со всеми членами высших порядков по  $1/R$  можно привести к виду

$$\mathbf{E} = c\epsilon\kappa_0^3 \frac{\exp(-iS)}{S} \left\{ E_{vx} \left( 1 - \frac{2i}{S} - \frac{2}{S^2} + \frac{3i}{S^3} + \frac{3}{S^4} \right) - \left( \frac{S}{S} \mathbf{i} \right) \left( \frac{S}{S} E_v \right) \left[ 1 - \frac{4i}{S} - \frac{8}{S^2} + \frac{15i}{S^3} + \frac{15}{S^4} \right] \right\} \mathbf{j}, \quad (44)$$

где

$$S = \kappa_0(x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \quad \text{и} \quad S = |S|.$$

На рис. 2 представлены кривые постоянного логарифма интенсивности электрического поля (с точностью до постоянного слагаемого)

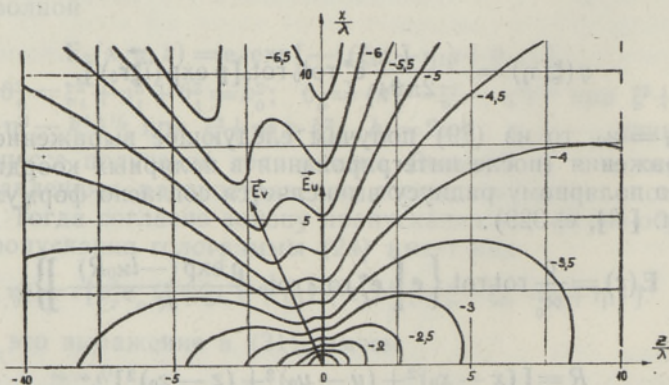


Рис. 2. Кривые постоянного логарифма интенсивности поля вблизи мнимого изображения.

вблизи мнимого изображения, определяемого выражением (44). В то же время, когда выражение дальнего поля (42) есть поле электриче-

ского диполя, в данном случае с дипольным моментом  $\mathbf{p} \sim \mathbf{j}$ , ближнее поле (44) не является ближним полем такого диполя. Ведь электрический диполь с дипольным моментом  $\mathbf{p} \sim \mathbf{j}$  излучает одинаково во всех направлениях, перпендикулярных вектору  $\mathbf{p}$ , но рис. 2 противоречит этому. Следовательно, восстановленное поле не является строго дипольным.

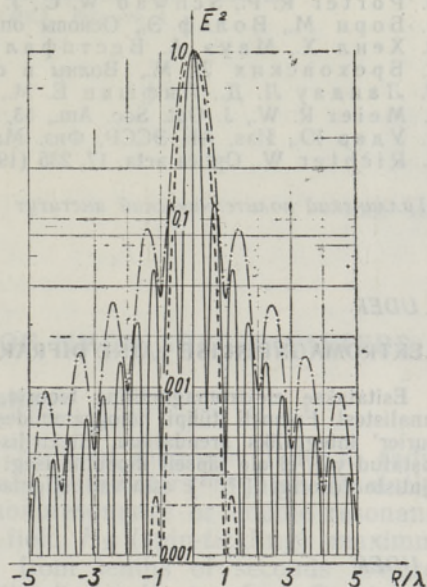


Рис. 3. Относительная интенсивность поля на отдельных осях действительного изображения, параллельных осям  $z$  (— · — · —),  $x$  (—) и  $y$  (— · — · —) координатной системы.  
 $k_0 = \kappa_0$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_r = e\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{p} = p\mathbf{j}$ .

Для действительного изображения мы провели вычисления по формуле (39) на ЭВМ «Минск-22». Наиболее характерные результаты вычислений представлены на рис. 3, где показаны изменения интенсивности поля на трех осях голографического изображения, параллельных соответственно  $z$ -,  $x$ - и  $y$ -осям координатной системы (рис. 1). По оси абсцисс отложено расстояние (в единицах длины волны) от точки поля до центральной точки изображения.

Появление второстепенных максимумов на рис. 3 обусловлено тем, что неоднородные плоские волны ( $\xi^2 + \eta^2 > \kappa_0^2$ ) в разложении (32) в случае действительного изображения не восстанавливаются — их амплитуды на действительном изображении будут ничтожно малы. По мере дальнейшего ограничения разрешающей способности голограммы, допустив, например, что в голограмме регистрируются только пространные частоты от 0 до  $\kappa_1$ , где  $\kappa_1 < \kappa_0$ , второстепенные максимумы на рис. 3 будут возрастать, расширяться и удаляться от главного максимума.

Из рис. 3 видно, что разрешение в направлении оси  $z$  меньше, чем в перпендикулярном к ней направлении.

Как показывают полученные результаты, восстановленное дипольное поле не является строго дипольным даже в том случае, когда выполняются условия резкого восстановления в скалярной теории голографических изображений (условия (36) и  $k_0 = \kappa_0$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Строук Дж., Введение в когерентную оптику и голографию, М., 1967.
2. Lohmann A. W., Appl. Optics, **4**, 1667 (1965).
3. Brungdahl O., J. Opt. Soc. Am., **57**, 545 (1967).
4. Som S. C., Lessard R. A., Appl. Phys. Lett., **17**, 381 (1970).
5. Kurtz C. N., Appl. Phys. Lett., **14**, 59 (1969).
6. Burckhardt C. B., J. Opt. Soc. Am., **56**, 1502 (1966); J. Opt. Soc. Am., **57**, 601 (1967).
7. Bergstein L., Kermisch D., Proceedings of Symposium on Modern Optics, N. Y., 1967, Polytechn. Press, N. Y., 1967, p. 655.

8. Porter R. P., Schwab W. C., J. Opt. Soc. Am., 61, 789 (1971).
9. Борн М., Вольф Э., Основы оптики, М., 1970.
10. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К., Теория дифракции, М., 1964.
11. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, М., 1957.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1967.
13. Meier R. W., J. Opt. Soc. Am., 55, 987 (1965).
14. Удер Ю., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 17, 190 (1968).
15. Richter W., Optica acta, 17, 235 (1970).

Таллинский политехнический институт

Поступила к редакцию  
23/III 1972

Ü. UDER

### ELEKTROMAGNETILISE LAINE DIFRAKTSIOON TASAPINNALISEL HOLOGRAMMIL

Esitatakse elektromagnetiline teooria, mis käsitleb valguslainete taastamist tasapinnalistest Fresneli tüüpi hologrammidest. Taastatud elektromagnetiline väli antakse Fourier' integraliks arendatuna. Elektrilise dipooli kiirgusvälja erijuhul näidatakse, et taastatud väli ei ole täpselt dipoolne isegi siis, kui on kehtivad skalaarses holograafiliste kujutiste teoorias [<sup>13-15</sup>] esinevad stigmaatilise taastamise tingimused.

Ü. UDER

### DIFFRACTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE AT A PLANE HOLOGRAM

This paper presents an electromagnetic theory of the reconstruction process from a plane Fresnel hologram. The solution is presented in the form of Fourier integral. In the special of electric dipole radiation it is shown that the reconstructed field is not exactly a dipole field even when the stigmatic image formation conditions of scalar theory [<sup>13-15</sup>] are valid.