EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.1.03

УДК 517.949.8

Х. ЙОКК

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Сходимость разностных схем для дифференциальных уравнений второго порядка исследована А. А. Самарским [1], исходившим при этом из априорных оценок. В данной статье при рассмотрении сходимости мы будем исходить из принципа компактной аппроксимации операторов, изложенного в статьях Г. М. Вайникко [2, 3]. Это позволяет отказаться от положительной определенности соответствующих операторов, однако разрешимость разностной задачи гарантируется тогда лишь при достаточно малом шаге.

1. Пусть шаг $h=1/n$, и при этом $x_i=ih$, $i=0, 1, \ldots, n$, есть дискретный аргумент разностной схемы

$$u_x=u_{x,i}=\frac{1}{h}[u(x_{i+1})-u(x_i)], \quad u_{\bar{x}}=u_{\bar{x},i}=u_{x,i-1}.$$

Предположим всюду в дальнейшем, что некая функция $k(x)$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условию $|k(x)|\geqslant k_0>0$, при этом $k(x)$ может менять знак на этом отрезке. Пусть

$$\Delta\equiv\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\int_0^1\frac{dx}{k(x)}\neq 0,$$

где ν_1 и ν_2 — постоянные.

Во-первых, рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &Lu\equiv-[k(x)u'(x)]'-q(x)u(x)=f(x),\\ &l_1u\equiv\nu_1u(0)-k(0)u'(0)=\mu_1,\\ &l_2u\equiv\nu_2u(1)+k(1)u'(1)=\mu_2,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где μ_1 и μ_2 — постоянные, а принадлежность функций $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ тому или иному классу определим позже, и соответствующую дискретную краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} &L_hy\equiv-(ay_{\bar{x}})_x-dy=\varphi,\\ &l_{1h}y\equiv\nu_1y_0-a_1y_{x,0}=\mu_1+\frac{h}{2}(\varphi_0+d_0y_0),\\ &l_{2h}y\equiv\nu_2y_n+a_ny_{\bar{x},n}=\mu_2+\frac{h}{2}(\varphi_n+d_ny_n),\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

где коэффициенты $a_i\,(a_i\neq 0)$, d_i, φ_i постоянны.

С точки зрения практики (в физическом смысле) интерес представляют такие решения краевых задач (1), которые в точках разрыва коэффициентов удовлетворяют соотношениям

$$u_+=u(x+0)=u(x-0)=u_-,\quad k_+u'_+=k_-u'_-.$$

В дальнейшем предположим, что эти равенства выполнены. При этом через $\mathfrak{M}$ обозначим множество точек разрыва коэффициентов и свободного члена уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

1° $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}\left|\sum\limits_{i=1}^{j}\frac{h}{a_i}-\int\limits_0^{x_j}\frac{dx}{k(x)}\right|\to 0$ *при* $h\to 0$;

2° $|a_j|>c>0\quad (j=1,2,\ldots;\ n=1,2,\ldots)$;

3° $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|d_j|<c,\qquad \max\limits_{0\leqslant j\leqslant n,\, x_j\notin\mathfrak{M}}|d_j-q(x_j)|\to 0$ *при* $h\to 0$;

4° $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n}|\varphi_j|<c,\qquad \max\limits_{0\leqslant j\leqslant n,\, x_j\notin\mathfrak{M}}|\varphi_j-f(x_j)|\to 0$ *при* $h\to 0$

и краевая задача (1) *имеет единственное решение* $u^*(x)$. *Тогда при достаточно малых* h *аппроксимирующая задача* (2) *имеет единственное решение* $y_h^*=(y_0^*, y_1^*,\ldots, y_n^*)$ *и*

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n}|u^*(x_i)-y_i^*|\to 0\quad \textit{при}\quad h\to 0.$$

Доказательство. Пусть $G(x,\xi)$ — функция Грина дифференциального выражения $[k(x)u'(x)]'$ при краевых условиях $l_1u=0$ и $l_2u=0$, а G_{ij} — дискретная функция Грина для аналогичной дискретной задачи. В данном случае

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(x)\beta(\xi)}{\Delta}, & 0\leqslant x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{\alpha(\xi)\beta(x)}{\Delta}, & \xi\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\qquad G_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\beta_j\alpha_i}{\delta_n}, & 0\leqslant i\leqslant j,\\[2mm] \dfrac{\alpha_j\beta_i}{\delta_n}, & j\leqslant i\leqslant n,\end{cases}$$

где

$$\alpha(x)=\frac{1}{\nu_1}+\int\limits_0^x\frac{ds}{k(s)},\qquad \beta(x)=\frac{1}{\nu_2}+\int\limits_x^1\frac{ds}{k(s)},$$

$$\Delta=\alpha(x)+\beta(x)=\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\int\limits_0^1\frac{dx}{k(x)};$$

$$\alpha_j=\frac{1}{\nu_1}+\sum_{i=1}^{j}\frac{h}{a_i},\qquad \beta_j=\frac{1}{\nu_2}+\sum_{i=j+1}^{n}\frac{h}{a_i},$$

$$\delta_n=\alpha_j+\beta_j=\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{a_i}.$$

Тогда уравнения (1) и (2) эквивалентны следующим уравнениям второго рода:

$$u=Tu+b,\qquad y_h=T_hy_h+b_h,$$

где

$$Tu=\int_0^1 G(x,\xi)\,q(\xi)\,u(\xi)\,d\xi; \qquad b=\int_0^1 G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi+G(x,0)\,\mu_1+G(x,1)\,\mu_2;$$

$$[T_h y_h]_i=\sum_{j=0}^{n} h_j G_{ij} d_j y_j \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n);$$

$$[b_h]_i=\sum_{j=0}^{n} h_j G_{ij}\varphi_j+G_{i0}\mu_1+G_{in}\mu_2 \qquad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n);$$

$$h_j=\begin{cases} h & \text{при } j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\\ 0{,}5h & \text{при } j=0,\ n.\end{cases}$$

Введем оператор p_h, сопоставляющий каждой функции u вектор $p_h u=(u(x_0),\ u(x_1),\ \ldots,\ u(x_n))\in m_{n+1}$.

Условия 1°—3° гарантируют, что последовательность линейных операторов $T_h\in L(m_{n+1}, m_{n+1})$ компактно аппроксимирует вполне непрерывный линейный оператор $T\in L(C, C)$ по отношению к связыбающим отображениям $p_h\in L(C, m_{n+1})$. Отсюда, согласно [3], следует однозначная разрешимость уравнения $y_h=T_h y_h+b_h$ при достаточно малых h и справедливость неравенства

$$\|y_h^*-p_h u^*\|\leqslant c\|p_h T u^*-T_h p_h u^*\|+\|p_h b-b_h\|. \tag{3}$$

В силу условий 1°—4° правая часть неравенства (3) стремится к нулю при $h\to 0$. Теорема доказана.

Пусть $C^{(2)}$ — класс r раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$, а $Q^{(r)}$ — класс r раз кусочно-непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$; т. е. $u\in Q^{(r)}$, если u непрерывно дифференцируема r раз, за исключением конечного числа точек разрыва, где функция u и ее производные имеют конечные односторонние пределы на отрезке $[0,1]$; $C=C^{(0)}$; $Q=Q^{(0)}$.

Теперь рассмотрим случаи, когда выполнено одно из следующих условий:

$$k(x),q(x),f(x)\in C^{(2)},\quad a_i=k(x_{i-1/2}),\quad d_i=q(x_i),\quad \varphi_i=f(x_i); \tag{4}$$

$$k(x),q(x),f(x)\in Q^{(1)},\quad a_i=k(x_{i-1/2}+0),\quad d_i=q(x_i+0),\quad \varphi_i=f(x_i+0); \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned}
&k(x)\in Q^{(2)}, f(x), q(x)\in Q, \qquad a_i=\left[\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1} \quad (i=1,2,\ldots,n),\\
&d_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \qquad \varphi_i=\frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\\
&d_0=\frac{2}{h}\int_{x_0}^{x_{1/2}} q(x)\,dx, \qquad \varphi_0=\frac{2}{h}\int_{x_0}^{x_{1/2}} f(x)\,dx,\\
&d_n=\frac{2}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_n} q(x)\,dx, \qquad \varphi_n=\frac{2}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_n} f(x)\,dx
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

или

$$k(x),\ f(x),\ q(x)\in Q,\quad a_i=k(x_{i-1/2}+0),\quad d_i=q(x_i+0),\quad \varphi_i=f(x_i+0). \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть краевая задача* (1) *имеет единственное решение* $u^*(x)$ *и пусть выполнено одно из условий* (4)—(7). *Тогда аппроксимирующая задача* (2) *имеет при достаточно малых* h *единственное решение* $y_h^*=(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$. *При этом в случае выполнения* (4)

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |y_i^*-u^*(x_i)|\leqslant ch^2; \tag{8}$$

в случае выполнения (5)

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |y_i^*-u^*(x_i)|\leqslant ch; \tag{9}$$

в случае выполнения (6)

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |y_i^*-u^*(x_i)|\leqslant ch^2 \tag{10}$$

и в случае выполнения (7)

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |y_i^*-u^*(x_i)|\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{11}$$

Доказательство. Из условий теоремы 2 следует, что условия теоремы 1 выполнены. В силу этого условие (11) также выполнено. Используя формулу Тейлора, видим, что

5° $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\int\limits_0^1 G(x_i,\xi)q(\xi)u^*(\xi)d\xi-\sum\limits_{j=0}^n h_jG_{ij}d_ju^*(x_j)\right|\leqslant ch^m;$

6° $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \left|\int\limits_0^1 G(x_i,\xi)f(\xi)d\xi-\sum\limits_{j=0}^n h_jG_{ij}\varphi_j\right|\leqslant ch^m;$

7° $\max\limits_{0\leqslant i,j\leqslant n} |G(x_i,x_j)-G_{ij}|\leqslant ch^m.$

Из неравенств 5°—7° и (3) при $m=1$ следует выполнение условия (9), а при $m=2$ — условий (8) и (10). Теорема доказана.

2. Рассмотрим теперь задачу о собственных значениях, представимую в виде

$$Lu=\lambda f(x)u(x), \quad l_1u=0, \quad l_2u=0, \tag{12}$$

и соответствующую ей дискретную задачу

$$L_hy=\lambda\varphi y, \quad l_{1h}y=0, \quad l_{2h}y=0. \tag{13}$$

Задачи (12) и (13) эквивалентны задачам

$$u-Tu=\lambda Su, \quad y_h-T_hy_h=\lambda S_hy_h,$$

где при $i=0, 1, \ldots, n$

$$Su=\int\limits_0^1 G(x,\xi)f(\xi)u(\xi)d\xi, \quad [S_hy_h]_i=\sum_{j=0}^n h_jG_{ij}\varphi_jy_j.$$

Приведем две теоремы о сходимости собственных значений.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1°—4° *и пусть ноль не является собственным значением задачи* (12). *Тогда*

1) *каждое собственное значение* λ_0 *задачи* (12) *является пределом при* $h\to 0$ *собственных значений* λ_h *задачи* (13) *и, наоборот, собственные*

значения задачи (13) *могут при* $h \to 0$ *сгущаться только к собственным значениям задачи* (12);

2) *при* $h \to 0$ *имеет место сходимость*

$$\mathfrak{D}_h \equiv \sup_{y_h \in Y_h, \|y_h\|_{m\ n+1}=1} \ \inf_{u_0 \in \mathfrak{U}_0} \ \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i - u_0(x_i)| \to 0,$$

$$\mathfrak{D}'_h \equiv \sup_{u_0 \in \mathfrak{U}_0, \|u_0\|_C = 1} \ \inf_{y_h \in Y_h} \ \max_{0 \leqslant i \leqslant n} |y_i - u_0(x_i)| \to 0,$$

где $\mathfrak{U}_0$ — *корневое подпространство оператора* $(I-T)^{-1}S$, *соответствующее собственному значению* $\lambda_0 \neq 0$, *а* Y_h — *линейная оболочка тех корневых подпространств оператора* $(I_h - T_h)^{-1}S_h$, *которые соответствуют близким к* λ_0 *собственным значениям оператора* $(I_h - T_h)^{-1}S_h$.

Доказательство этой теоремы следует из компактной аппроксимации операторов T и S последовательностью операторов T_h и S_h (см. [3], с. 36).

Теорема 4. *Пусть ноль не является собственным значением задачи* (12) *и пусть выполнено одно из условий* (4)—(7), *тогда верны утверждения теоремы* 3 *и, кроме того, в случае выполнения условия* (4)

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leqslant ch^{2/l}, \quad \mathfrak{D}_h \leqslant ch^{2/l}, \quad \mathfrak{D}'_h \leqslant ch^{2/l};$$

в случае выполнения условия (5)

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leqslant ch^{1/l}, \quad \mathfrak{D}_h \leqslant ch^{1/l}, \quad \mathfrak{D}'_h \leqslant ch^{1/l};$$

в случае выполнения условия (6)

$$|\lambda_h - \lambda_0| \leqslant ch^{2/l}, \quad \mathfrak{D}_h \leqslant ch^{2/l}, \quad \mathfrak{D}'_h \leqslant ch^{2/l}$$

и в случае выполнения условия (7)

$$|\lambda_h - \lambda_0| \to 0, \quad \mathfrak{D}_h \to 0, \quad \mathfrak{D}'_h \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

где $c = \mathrm{const}$ *и* l — *ранг собственного значения задачи* (12).

Доказательство теоремы вытекает из 1°—7° и из теоремы 3.2 работы [3].

Замечание 1. Если функции $k(x)$ и $q(x)$ положительны, то $l = 1$. В общем случае это, по-видимому, не так, и собственные значения задачи (12) могут быть комплексными.

Замечание 2. Если ноль является собственным значением задачи (12), но существует λ', не являющееся собственным значением, то утверждения теорем 3 и 4 остаются в силе для собственных значений $\lambda_0 \neq 0$. При этом собственные значения задачи (12) изолированы и могут сгущаться только к бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.
2. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация линейных операторов операторами в фактор-пространствах, Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, **220**, 170 (1968).
3. Вайникко Г. М., Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений, Тарту, 1970.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
20/VI 1972

H. JOKK

TEIST JÄRKU HARILIKE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE DIFERENTSSKEEMIDE KOONDUVUS

Artiklis uuritakse mõningate tuntud diferentsskeemide (2), (4)—(7) koondumist teist järku hariliku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande (1) ja vastava omaväärtusülesande jaoks. Loobutakse käsitletava ülesande positiivse määratuse nõudest, mis on põhiline A. A. Samarski töödes [1] aprioorsete hinnangute tuletamisel.

H. JOKK

THE CONVERGENCE OF METHODS OF FINITE DIFFERENCES FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND DEGREE

In this paper the convergence of some known methods of finite differences (2), (4)—(7) and the speed of convergence for the boundary value problem (1) and the corresponding eigenvalue problem are examined. The author refrains from a positive definition of the problem, which is the basic condition at the derivation of a priori estimations according to A. A. Samarski [1].