EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.1.01

УДК 512 : 519.4

У. КАЛЬЮЛАЙД

О СТЕПЕНЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ИДЕАЛА

В работе доказывается, что пересечение всех конечных степеней фундаментального идеала в целочисленном групповом кольце артиновой группы Г является нулевым в точности тогда, когда группа Г конечна и примарна. Исследуется также убывающий ряд трансфинитных степеней фундаментального идеала. В частности, вычислен индекс стабилизации указанного ряда для некоторых классов групп. В статье используется язык и факты теории пар (см. Б. И. Плоткин [1]). В силу этого некоторые известные результаты излагаются здесь в новой форме, а часть из них получает новые доказательства.

Пусть Z — кольцо целых чисел, $Z\Gamma$ — групповое кольцо группы Γ с целочисленными коэффициентами. Фундаментальный идеал в кольце $Z\Gamma$ — это множество Δ всевозможных конечных сумм $\sum n_i\gamma_i$, где $n_i \in Z$, $\gamma_i \in \Gamma$, таких, что $\sum n_i = 0$. Степени идеала Δ определяются индуктивно, т. е. $\Delta^\nu = \Delta^{\nu-1}\cdot\Delta$ для непредельного ν, и $\Delta^\nu = \bigcap\limits_{\mu<\nu}\Delta^\mu$ для предельного порядкового числа ν. Поводом для рассмотрения степеней фундаментального идеала служат прежде всего вопросы, касающиеся стабильных представлений группы Γ: ряд

$$Z\Gamma \supset \Delta \supset \Delta^2 \supset \ldots \supset \Delta^\nu \supset \Delta^{\nu+1} \supset \ldots \tag{1}$$

является нижним стабильным рядом в свободной линейной паре $(Z\Gamma, \Gamma)$.

Свойства ряда (1) исследовались в ряде работ [2–9]. Настоящая статья посвящена этой же теме. В частности, здесь приводится развернутое изложение результатов, анонсированных в сообщении [10], однако знание последнего для чтения данной работы не является необходимым.

Пусть $\tau = \tau(\Gamma)$ — индекс стабилизации ряда (1), т. е. τ является таким порядковым числом, начиная с которого $\Delta^\tau = \Delta^{\tau+1} = \ldots$. Здесь вычисляется $\tau(\Gamma)$ для некоторых классов групп. Далее, пусть ω — первое бесконечное порядковое число. Нас будет, в частности, интересовать класс групп Γ с $\tau(\Gamma) = \omega$. Однако полученные относительно этого класса результаты не являются полными и задача заслуживает дальнейшего изучения. Решение общей задачи классификации групп с точки зрения возможных значений индекса $\tau(\Gamma)$ является, по-видимому, весьма трудным [7].

Известная теорема Крулля [11] о пересечении утверждает, что в (коммутативном) нётеровом кольце R пересечение конечных степеней любого идеала I представляет собой множество таких $r \in R$, что $r\cdot(1-i) = 0$ при некотором $i \in I$, т. е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = \{r \in R \mid r \cdot (1-i) = 0 \text{ для некоторого } i \in I\}. \tag{2}$$

Обобщения этой теоремы, а также развитие алгебраических и топологических следствий из нее содержатся в работах В. Крулля [12] и О. Зарисского [13]. Ряд работ [14–16] посвящен аналогам теоремы Крулля в справа нётеровых кольцах. Для конечной группы Г кольцо $Z\Gamma$ является справа нётеровым. Возникает задача описания тех групп Г, в групповом кольце которых имеет место аналог теоремы Крулля. П. Смит [9] доказал, что в классе конечных групп Г условие

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_\Gamma^n\Big) \cdot (1-x) = 0 \text{ для некоторого } x \in \Delta_\Gamma \tag{3}$$

выполнено в точности тогда, когда группа Г нильпотентна. В данной статье мы покажем, что вопрос о равносильности (3) условию $\tau(\Gamma) = \omega$ решается отрицательно: существуют ненильпотентные конечные группы Г с $\tau(\Gamma) = \omega$.

Ниже, в § 0, кратко излагаются в нужной для нас форме некоторые известные понятия и результаты. В § 1 теорема Грюнберга о пересечении степеней фундаментального идеала доказывается для более широкого класса артиновых групп. Следующий § 2 посвящен исследованию некоторых свойств ряда конечных степеней фундаментального идеала. Приводится также новое доказательство одной теоремы Дж. Бэкли. В § 3 найден Z-базис модуля Δ_Γ^ω для конечной нильпотентной группы Г и доказано другое усиление упомянутой выше теоремы Грюнберга, которая вместе с работой А. И. Мальцева [7] в значительной степени стимулировала интерес автора к этой теме. В § 4 выясняется поведение индекса $\tau(\Gamma)$ в классе конечных групп. Доказывается, что для любого натурального n существует такая конечная группа Γ_n, что $\tau(\Gamma_n) \geqslant \omega + n$. При этом используется конструкция треугольного произведения, введенного Б. И. Плоткиным [17]. Эта же техника позволяет дать новое доказательство одной теоремы Б. Хартли [18]. Наконец, § 5 посвящен различным замечаниям, в основном касающимся особенностей поведения обобщенных размерных подгрупп.

Пусть Γ_ν — ν-й член нижнего центрального ряда для группы Г, Δ — фундаментальный идеал в целочисленном групповом кольце $Z\Gamma$ и $D_\nu = \Gamma \cap (1 + \Delta^\nu)$. Включение $\Gamma_\nu \subset D_\nu$ верно в общем случае лишь для конечных ν. Для бесконечных ν существуют контрпримеры как в классе конечных групп, так и среди групп без кручения. Результаты, изложенные в пункте 5.3, являются отрицательным ответом на один вопрос, поставленный автору А. А. Бовди.

Я глубоко признателен проф. Б. И. Плоткину, который привлек мое внимание к рассматриваемому кругу вопросов и беседы с которым были для меня очень полезны. Я благодарен также Л. Кропу за многие полезные обсуждения.

0. Предварительные сведения

Сформулируем ниже некоторые необходимые в дальнейшем факты и определения.

0.1. Пусть K — кольцо и Г — произвольная группа. Если задано представление группы Г автоморфизмами некоторого K-модуля G, то говорят, что задана *пара* (G, Γ). Ниже мы часто будем пользоваться языком и результатами теории пар (см. Б. И. Плоткин [1]).

Взаимный коммутант $[G, \Gamma]$ *для пары* (G, Γ) определяется как подмодуль в G, порожденный всевозможными элементами вида $[g, \gamma] = -g + g \circ \gamma$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$. Исходя из $[G, \Gamma]$, можно индуктивно определить подмодули $[G, \Gamma; \nu]$ для всех порядковых чисел ν. Получим *нижний* Γ-*стабильный ряд в* G,

$$G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_\nu \supset G_{\nu+1} \supset \ldots, \text{ где } G_\nu = [G, \Gamma; \nu].$$

Для регулярной пары $(Z\Gamma, \Gamma)$ этот ряд совпадает с рядом (1).

Теперь пусть для точной пары (G, Γ) существует такое порядковое число ν, что $G_\nu = 0$. Обозначим через α первое такое ν и будем говорить, что группа Γ допускает точное Γ-стабильное представление типа α^* в модуле G.

0.2. Лемма. *Пусть* (G, Γ) — *пара, в которой* G — *абелева группа и* Γ *конечна. Если пара* (G, Γ) *точна и в* G *имеется* Γ-*стабильный ряд типа* ω^*, *то группа* Γ *нильпотентна*.

Этот факт хорошо известен.

Следующие три утверждения (п. 0.3 и 0.4) принадлежат В. Г. Виляцеру. Их доказательства можно найти также в монографии Б. И. Плоткина ([1], с. 458—464).

0.3. Предложение. *Пусть* (G, Γ) — *некоторая групповая пара. Если элемент* $\sigma \in \Gamma$ *является внешним нильэлементом относительно* G *и* $[G, \sigma]$ — *группа без кручения, то* σ — *чистый элемент*.

Это предложение находит существенное приложение в доказательствах.

0.4. Теорема. *Пусть* (G, Γ) — *групповая пара, и пусть* σ — *квазистабильный элемент в* Γ. *Элемент* σ *тогда и только тогда является почти* π-*элементом, когда* $[G, \sigma]$ — *периодическая* π-*группа*.

Мы будем пользоваться также следствием из этой теоремы.

Следствие. *Если* (G, Γ) — *групповая пара и каждый элемент из* Γ *квазистабилен, то* Γ *тогда и только тогда будет относительной* π-*группой, когда* $[G, \Gamma]$ — π-*группа*.

0.5. Пусть даны две пары (A, P) и (B, Q), прямое произведение которых обозначим через (G, T). Определяя действие группы T в $\Phi = \mathrm{Hom}\,(B, A)$ формулой

$$\forall b \in B,\ \varphi \in \Phi,\ \sigma_1 \in P,\ \sigma_2 \in Q,\ b(\varphi * \sigma_1\sigma_2) = ((b \circ \sigma_2^{-1})\varphi) \circ \sigma_1,$$

приходим к паре (Φ, T). Пусть Γ — отвечающее этой паре полупрямое произведение. Полагая

$$\forall a \in A,\ b \in B,\ \varphi \in \Phi,\ a \circ \varphi = a,\ b \circ \varphi = b + b\varphi,$$

получим пару (G, Φ). Если действие группы Γ в G определить формулой

$$\forall g \in G,\ \gamma \in \Gamma,\ \varphi \in \Phi,\ \sigma \in T,\ g \circ \gamma = (g \circ \varphi) \circ \sigma,$$

то возникает пара (G, Γ), которая называется *треугольным произведением* данных *пар* и обозначается $(A, P) \triangle (B, Q)$. Конструкция треугольного произведения введена Б. И. Плоткиным в [17].

0.6. *Целочисленные размерные подгруппы* для группы Γ — это подгруппы $D_n = D_n(\Gamma, Z) = \{g \in \Gamma \mid g - 1 \in \Delta^n_\Gamma\}$. Они были введены В. Магнусом для изучения свойств свободной группы. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots$ — нижний центральный ряд группы Γ. Тогда верно

Предложение. *Для любой группы* Γ *при всяком натуральном* n *имеет место включение* $\Gamma_n \subset D_n(\Gamma)$ *(см., напр., Дж. Лози* [19] *или Я. Коннелл* [4]).

0.7. Лемма *(Бэкли). Пусть* Γ *— группа,* g *и* h *— пара ее перестановочных элементов взаимно простых порядков* p *и* q *соответственно. Тогда элемент* $(g-1)(h-1)$ *содержится в* $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_{\Gamma}^{n}\right)\cdot\Delta_{\Gamma}$ *(см. работу Дж. Бэкли* [3]).

Доказательство. Пусть $g'=1+g+\ldots+g^{p-1}$ и $h'=1+h+\ldots+h^{q-1}$. Тогда $(g-1)g'=0=(h-1)h'$.

В силу взаимной простоты чисел p и q находим такие $u, v\in Z$, что $up+vq=1$. Далее, пусть $x=ug'+vh'$. В силу перестановочности элементов g и h имеем $(g-1)(h-1)x=0$.

При пополняющем гомоморфизме $\varepsilon: Z\Gamma\to Z$ имеем

$$\varepsilon(x)=\varepsilon(ug'+vh')=up+vq=1,$$

т. е. $\varepsilon(1-x)=0$. Другими словами, существует такой элемент $y=y(g,h)\in\Delta$, что $x=1-y$. Эти замечания показывают, что

$$(g-1)(h-1)y=(g-1)(h-1)(1-x)=(g-1)(h-1),$$

что и доказывает лемму.

0.8. Лемма *(Хартли). Пусть группа* Γ *содержит элемент* x *простого порядка* p. *Тогда для фундаментального идеала* $\Delta\subset Z\Gamma$ *имеем*

(i) $p(1-x)\in\Delta^{p}$;

(ii) $(1-x)(1-y^{p^{n}})\in\Delta^{n+2}$ *для всех* $y\in\Gamma$ и $n\geqslant 0$.

Эта лемма и ее доказательство содержатся в работе Б. Хартли [6].

0.9. Лемма. *Пусть* Γ *— группа, разложимая в прямое произведение квазициклических групп и* Δ *— фундаментальный идеал в кольце* $Z\Gamma$. *Тогда верны соотношения*

$$\Delta\neq\Delta^2=\Delta^3=\ldots.$$

Это утверждение содержится в частично неопубликованной рукописи [20]. Приведем здесь доказательство этого факта.

Достаточно показать, что для каждой финитно-стабильной пары (G,Γ) эта пара в действительности 2-стабильна. Для этого рассмотрим полупрямое произведение $\Phi=G\rtimes\Gamma$, отвечающее данной паре и берем в этой нильпотентной группе Φ радикал по классу $\mathfrak{R}$ групп, разложимых в прямое произведение квазициклических групп. Легко видеть, что $\Gamma\subset\mathfrak{R}(\Phi)$. Поэтому для произвольных $g\in G$ и $\gamma_1, \gamma_2\in\Gamma$ имеем $[g,\gamma_1]\in\mathfrak{R}(\Phi)$ и $[[g,\gamma_1],\gamma_2]=e$, откуда немедленно следует 2-стабильность пары (G,Γ). То, что $\Delta\neq\Delta^2$, следует из того известного факта, что всякая абелева группа допускает точное 2-стабильное представление в некоторой абелевой области действия.

0.10. Лемма. *Пусть группа* Γ *бесконечна. Тогда в кольце* $Z\Gamma$ *левый аннулятор идеала* Δ *равен нулю (см. Я. Коннелл* [4], *предложение* 4(ii)).

1. Теорема Грюнберга

1.1. Пусть K_1 и K_2 — коммутативные кольца с единицей и пусть Δ_1 и Δ_2 — фундаментальные идеалы в групповых кольцах группы Γ над кольцами K_1 и K_2 соответственно. Всякий гомоморфизм колец коэффициентов $\nu: K_1\to K_2$ индуцирует естественным образом гомоморфизм групповых колец $\nu: K_1\Gamma\to K_2\Gamma$. В частности, при всяком натуральном n имеем гомоморфизмы $\nu_n: Z\Gamma\to Z_{p^n}\Gamma$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при всяком натуральном k имеет место соотношение $(\Delta_1^k)^{\nu_n}=\Delta_2^k$.

1.2. Пусть даны коммутативное кольцо с единицей K, группа Γ и пара (G, Γ) с абелевой областью G. Действие группы Γ можно линейно продолжать до действия группового кольца $K\Gamma$ в G. Нам понадобится следующая

Лемма. *Если пара (G, Γ) стабильна, то для любых двух перестановочных между собой элементов γ_1 и γ_2, имеющих взаимно простые порядки, в паре $(G, K\Gamma)$ выполняется соотношение*

$$\forall g\in G,\ g\circ(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)=0.$$

Доказательство. В силу перестановочности элементов γ_1 и γ_2 имеем

$$(-g+g\circ\gamma_1)+(-g+g\circ\gamma_1)\circ\gamma_2=-g+g\circ\gamma_1-g\circ\gamma_2+g\circ\gamma_1\gamma_2=$$
$$=-g+g\circ\gamma_1-g\circ\gamma_2+g\circ\gamma_2\gamma_1=-(g+g\circ\gamma_2)+(g+g\circ\gamma_2)\circ\gamma_1\in[G,\gamma_1].$$

Это вычисление показывает, что

$$G\circ(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)=[[G,\gamma_1],\gamma_2]\subset[G,\gamma_1].$$

Аналогично доказывается включение $G\circ(\gamma_2-1)(\gamma_1-1)\subset[G,\gamma_2]$. Пользуясь еще тем, что $(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)=(\gamma_2-1)(\gamma_1-1)$, находим

$$G\circ(\gamma_1-1)(\gamma_2-1)\subseteq[G,\gamma_1]\cap[G,\gamma_2]. \tag{4}$$

Пусть π_i — множество простых делителей порядка элемента γ_i, где $i=1, 2$. Применение теоремы 0.4 показывает, что $[G, \gamma_i]$ является π_i-группой. По предположению, $\pi_1\cap\pi_2=\varnothing$. Следовательно, $[G,\gamma_1]\cap$ $\cap[G, \gamma_2]=0$, откуда в силу соотношения (4) вытекает справедливость утверждения леммы.

1.3. Теорема. *Пусть Δ — фундаментальный идеал в целочисленном групповом кольце артиновой группы Γ. Соотношение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta^n=0$ имеет место в точности тогда, когда группа Γ конечна и примарна.*

Замечание. Эта теорема обобщает один результат К. Грюнберга, ([5], теорема B), другое доказательство которого приведено в работе Ф. Холла и Б. Хартли [21]. Еще одно доказательство этой теоремы принадлежит Б. И. Плоткину (не опубликовано). С любезного согласия Б. И. Плоткина воспользуемся этим доказательством — наше доказательство теоремы 1.3 является не более чем модификацией схемы Плоткина.

Доказательство. а) *Условие достаточно.* Действительно, пусть Γ — конечная p-группа. Обозначим аддитивную группу кольца $Z_{p^n}\Gamma$ через A. Группа $A\rtimes\Gamma$ является конечной p-группой и, следовательно, нильпотентна. Но тогда пара (A, Γ) стабильна. В свою очередь, стабильность пары $(Z_{p^n}\Gamma, \Gamma)$ равносильна нильпотентности фундаментального идеала $\Delta_n\subset Z_{p^n}\Gamma$. Таким образом, существует число $m=m(n)$ такое, что $\Delta_n^m=0$.

В силу 1.1 имеем теперь $(\Delta^m)^{\nu_n}\subset\Delta_n^m=0$. Это показывает, что $\Delta^{m(n)}\subseteq \operatorname{Ker}\nu_n$. Но $\operatorname{Ker}\nu_n$ состоит из всех тех элементов кольца $Z\Gamma$, все коэффициенты которых делятся на p^n. Таким образом, имеем $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Ker}\nu_n=0$. Отсюда наше утверждение легко следует. Действительно, имеем

$$\Delta^{\omega} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{m(n)} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \nu_n = 0.$$

б) *Условие необходимо.* Пусть Σ_n — ядро пары $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$. Заметим, что $\gamma \in \Sigma_n$ равносильно условию $(\gamma - 1) \in \Delta^n$. Следовательно, если $\gamma \in \bigcap_n \Sigma_n$, то $(\gamma - 1) \in \bigcap_n \Delta^n = 0$. Это показывает, что $\bigcap_n \Sigma_n = 1$, т. е. группа Γ аппроксимируется группами Γ/Σ_n.

Группа Γ/Σ_n действует в $Z\Gamma/\Delta^n$ точно и стабильно, а следовательно, она нильпотентна. Таким образом, группа Γ аппроксимируется нильпотентными группами, откуда в силу артиновости Γ вытекает ее нильпотентность.

Легко видеть, что группа Γ является p-группой Черникова. Действительно, если бы в примарном разложении $\Gamma = \Pi\Gamma_p$ было более одного множителя Γ_p, то в силу леммы 0.7 мы имели бы $\Delta_{\Gamma}^{\omega} \neq 0$.

Пусть A — полная подгруппа конечного (примарного) индекса в Γ. Тогда $\Gamma = A \cdot B$, где B — конечная p-группа. Пусть $\operatorname{ind}_{\Gamma} A > 1$. Тогда существует пара неединичных элементов $a \in A$, $b \in B$ с $b^p = 1$, откуда в силу леммы 0.8 следовало бы $(1 - b)(1 - a) \in \Delta_{\Gamma}^{\omega}$, что противоречит условию $\Delta_{\Gamma}^{\omega} = 0$.

Итак, либо $A = \Gamma$, либо $A = (1)$. В первом случае в силу леммы 0.9 имели бы место соотношения $\Delta_{\Gamma}^{\omega} = \Delta_A^{\omega} = \Delta_A^2 \neq 0$, что противоречиво. Следовательно, $A = (1)$. Но тогда $\Gamma = B$, т. е. Γ является конечной p-группой. Теорема доказана.

Замечание. Для доказательства теоремы Грюнберга в ее первоначальной форме можно избежать использования лемм 0.8 и 0.9. Действительно, доказав нильпотентность группы Γ, мы могли бы продолжить следующим образом (см. «необходимость»).

Допустим, что группа Γ непримарна. Тогда существует пара перестановочных элементов взаимно простых порядков, γ_1 и γ_2. Рассмотрим в $Z\Gamma$ элемент $y = (\gamma_1 - 1)(\gamma_2 - 1)$. Применение леммы 1.2 к паре $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$ дает соотношение

$$0 = (Z\Gamma/\Delta^n) \circ y = (Z\Gamma/\Delta^n) \cdot y, \tag{5}$$

показывающее, что $y \in \Delta^n$. Так как соотношение (5) верно для любого натурального числа n, то $0 \neq y \in \bigcap_n \Delta^n$. Это, однако, противоречит предположению $\Delta^{\omega} = 0$.

2. Нильпотентный корадикал и степени фундаментального идеала

Нильпотентный корадикал группы Γ — это подгруппа $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma)$ в Γ, являющаяся пересечением тех инвариантных в Γ подгрупп, факторгруппы по которым нильпотентны. В этом параграфе мы покажем, что в целочисленном групповом кольце группы, не совпадающей со своим нильпотентным корадикалом, пересечение всех конечных степеней фундаментального идеала Δ не совпадает ни с какой конечной степенью Δ^k.

2.1. Предложение. *Пусть U — пересечение всех конечных степеней фундаментального идеала в целочисленном групповом кольце конечной группы* Γ. *Тогда ядром пары* $(Z\Gamma/U, \Gamma)$ *является корадикал группы* Γ *по классу нильпотентных групп.*

Доказательство. Пусть Σ — ядро пары $(Z\Gamma/U, \Gamma)$. Группа Γ/Σ действует в $Z\Gamma/U$ точно и ω^* — стабильно. Применение леммы 0.2 показывает, что группа Γ/Σ нильпотентна. Следовательно, имеем $\Sigma \supset \mathfrak{N}$.

Чтобы доказать включение $\Sigma \subset \mathfrak{N}$, нам понадобится следующая

Лемма. *Для всякой конечной нильпотентной группы* Γ *существует такое натуральное число* n, *что пара* $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$ *точна.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \prod_{p\in\pi(\Gamma)} \Gamma_p$ — примарное разложение группы Γ, и A_p — циклическая группа порядка p. Группа Γ_p действует в базисной подгруппе B_p сплетения $A_p \operatorname{wr} \Gamma_p$ регулярно и, следовательно, точно. Это действие будет также и стабильным, так как B_p является конечной p-группой. Рассмотрим пару $(\sum_p B_p, \Gamma)$. Ей соответствует точное n-стабильное представление группы Γ, где в качестве n взята максимальная длина стабильных рядов в группах B_p, $p\in\pi(\Gamma)$. Но тогда и свободное представление, соответствующее паре $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$, точно. Лемма доказана.

Продолжим доказательство предложения 2.1.

Пусть Γ — любая конечная группа. Группа $\Gamma/\mathfrak{N}$ нильпотентна. Лемма показывает, что существует число n такое, что пара $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma/\mathfrak{N})$ точна. Другими словами, $\mathfrak{N}$ является ядром пары $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$. Но ядро пары $(Z\Gamma/U, \Gamma)$, очевидно, содержится в ядре пары $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$. Следовательно, $\Sigma\subset\mathfrak{N}$, что и доказывает предложение.

2.2. Пусть D_n — ядро пары $(Z\Gamma/\Delta^n, \Gamma)$, $D_* = \bigcap_n D_n$, а D_ω — ядро пары $(Z\Gamma/\Delta^\omega, \Gamma)$. Легко видеть, что $D_\omega = D_*$ (доказательство сводится к развертыванию определений D_ω и D_*). Далее, пусть Γ_* — пересечение членов нижнего центрального ряда конечной группы Γ. Ясно, что $\Gamma_* = \mathfrak{N}(\Gamma)$. В работе Дж. Бэкли [3] доказано, что $\Gamma_* = D_*$. Следовательно, предложение 2.1 и теорема Бэкли равносильны. Поэтому на приведенное выше доказательство предложения 2.1 можно смотреть как на новое доказательство теоремы Бэкли, использующее язык и технику теории линейных пар.

2.3. Группу Γ назовем *группой Грюнберга*[1], *если* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_\Gamma^n = 0$. Например, таковой является всякая конечная примарная группа. Замечательный результат Б. Хартли [6] показывает, что *всякая нильпотентная группа без кручения является группой Грюнберга.*

Легко видеть, что Γ является группой Грюнберга в точности тогда, когда регулярная пара $(Z\Gamma, \Gamma)$ является ω^*-стабильной.

Пусть группа Γ аппроксимируется группами Грюнберга. Это означает существование таких $\Sigma_i \triangleleft \Gamma$, что $\bigcap \Sigma_i = 1$ и все Γ/Σ_i являются группами Грюнберга. Далее, пусть $\omega\Sigma_i$ — идеал в $Z\Gamma$, порожденный всеми $\sigma - 1$, $\sigma\in\Sigma_i$. Рассмотрим $W = \bigcap_i \omega\Sigma_i$ и покажем относительно этого идеала следующее

Предложение. *Имеет место соотношение* $\Delta^\omega \subset W$.

Доказательство. По предположению, группы Γ/Σ_i являются группами Грюнберга. Так как ω^*-стабильность пары сохраняется при поднятии пары по правому эпиморфизму, то в силу изоморфизма $Z(\Gamma/\Sigma_i) \cong Z\Gamma/\omega\Sigma_i$ будет ω^*-стабильной также и пара $(Z\Gamma/\omega\Sigma_i, \Gamma)$. Но последнее означает, что $\Delta^\omega \subset \omega\Sigma_i$. Это верно при всех i, откуда следует $\Delta^\omega \subseteq \bigcap_i \omega\Sigma_i$. Предложение доказано.

2.4. Лемма. *Пусть* Γ — *циклическая группа простого порядка. Тогда все конечные степени фундаментального идеала* $\Delta\subset Z\Gamma$ *различны.*

---

[1] Мы пользуемся в данной работе этим коротким названием — группа Грюнберга, хотя ранее оно уже применялось в теории групп в другом смысле (радикал Грюнберга, группа Грюнберга).

Доказательство. Если $|\Gamma| = p$, то $Z\Gamma \cong Z[x]/(x^p - 1)$, где $Z[x]$ — кольцо целочисленных многочленов от одной переменной.

Допустим, что $\Delta \subset \Delta^2$. Тогда существуют многочлены $f(x)$ и $g(x)$ такие, что

$$(x-1) = (x-1)^2 \cdot f(x) + (x^p - 1) \cdot g(x).$$

Следовательно, имеем

$$1 = (x-1) \cdot f(x) + (x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1) \cdot g(x).$$

Положим в последнем соотношении $x = 1$. Получим $1 = p \cdot g(1)$, что очевидно, противоречиво. Таким образом, $\Delta \neq \Delta^2$.

Допустим, что $\Delta^2 \subset \Delta^3$. Тогда существуют такие $f(x)$ и $g(x)$, что

$$(x-1)^2 = (x-1)^3 f(x) + (x^p - 1) g(x).$$

После деления на $(x-1)$ имеем

$$(x-1) = (x-1)^2 \cdot f(x) + (x^{p-1} + \ldots + 1) g(x).$$

Так как $(x-1)$ не делит $(x^{p-1} + \ldots + 1)$, то из последнего равенства следует

$$1 = (x-1) f(x) + (x^{p-1} + \ldots + 1) \tilde{g}(x).$$

Положим здесь $x = 1$. Получим $1 = p \cdot \tilde{g}(1)$, что противоречиво. Следовательно, $\Delta^2 \neq \Delta^3$. Аналогично доказываются соотношения $\Delta^3 \neq \Delta^4 \neq \neq \Delta^5 \neq \ldots$.

2.5. Предложение. *Для конечной группы* Γ, *совпадающей со своим нильпотентным корадикалом, индекс стабилизации ряда* (1) *равен единице. Если же* $\mathfrak{N}(\Gamma) \neq \Gamma$, *то* $\tau(\Gamma) \geqslant \omega$.

Доказательство. а) Предложение легко проверяется в случае, когда $\mathfrak{N}(\Gamma) = \Gamma$. Действительно, тогда в силу 2.1 группа Γ является ядром пары $(Z\Gamma/U, \Gamma)$, откуда следует $\Delta \subset U$.

б) Пусть теперь $\mathfrak{N}(\Gamma) \neq \Gamma$. В силу нильпотентности группы $\Gamma/\mathfrak{N}(\Gamma)$ имеем эпиморфизм группы Γ на циклическую группу простого порядка. Пусть M — ядро этого эпиморфизма.

Из предположения $\Delta^n_\Gamma \subset \Delta^{n+1}_\Gamma$ следует $\Delta^n_\Gamma + \omega M \subset \Delta^{n+1}_\Gamma + \omega M$, а поэтому и

$$(\Delta^n_\Gamma + \omega M)/\omega M \subset (\Delta^{n+1}_\Gamma + \omega M)/\omega M. \tag{6}$$

При изоморфизме $Z\Gamma/\omega M \cong Z(\Gamma/M)$ идеал $\Delta^n_\Gamma + \omega M/\omega M$ отождествляется с $\Delta^n_{\Gamma/M}$. Соотношение (6) показывает поэтому, что $\Delta^n_{\Gamma/M} \subset \Delta^{n+1}_{\Gamma/M}$. Это противоречит, однако, лемме 2.4. Предложение доказано.

3. Пересечение степеней фундаментального идеала в групповом кольце конечной нильпотентной группы

Пусть Γ — конечная нильпотентная группа. В этом параграфе мы вычислим базис Z-модуля $\bigcap\limits_n \Delta^n_\Gamma$ (см. теорему 3.1). Следствием этих вычислений будет равенство $\tau(\Gamma) = \omega$. Из соотношения $\tau(\Gamma) = \omega$ нильпотентности группы Γ, однако, не следует. Существуют ненильпотентные группы Γ сколь угодно большого порядка, для которых $\tau(\Gamma) = \omega$. Здесь доказывается также одно усиление теоремы Грюнберга (см. теорему 3.3).

3.1. Теорема. *Пусть* $\Gamma = \Pi\Gamma_i$ — *примарное разложение*[2] *конечной нильпотентной группы* Γ. *Тогда* 1) Z-*базис модуля* $\bigcap\limits_n \Delta_\Gamma^n = \Delta^\omega$ *состоит из всевозможных произведений вида* $(\gamma_{i_1}-1)\ldots(\gamma_{i_s}-1)$, *где* $2 \leqslant s \leqslant |\pi(\Gamma)|$, *а элементы* γ_{i_j} *принадлежат попарно различным примарным компонентам группы* Γ; 2) *индекс стабилизации ряда* (1) *для конечной нильпотентной группы равен* ω.

Доказательство. Обозначим через Δ_i модуль с Z-базисом $\gamma_i - 1$, $\gamma_i \in \Gamma_i$. Легко проверить, что $\Delta_i \cap \Delta_k = 0$ при $i \neq k$.

Всякий элемент $\gamma \in \Gamma$ имеет однозначную запись вида $\gamma = \Pi\gamma_i$. Отображение λ, определенное для всех $\gamma \in \Gamma$ формулой

$$\lambda(\gamma - 1) = \sum(\gamma_i - 1),$$

продолжим линейно на весь Z-модуль $\Delta = \Delta_\Gamma$. Так как Z-модуль Δ является свободным, то это приводит к гомоморфизму Z-модулей

$$\lambda : \Delta \to \sum \Delta_i.$$

Найдем ядро гомоморфизма λ.

Из самого определения λ видно, что в $\operatorname{Ker}\lambda$ попадают все Z-комбинации вида

$$\sum_{(i)} n_{(i)}(\gamma_{i_1} - 1)\ldots(\gamma_{i_k} - 1), \quad n_{(i)} \in Z, \quad k \geqslant 2.$$

Далее, пусть $x = \Sigma n_i(\gamma_i - 1)$. Тогда $\lambda(x) = x$. Поэтому из $\lambda(x) = 0$ вытекает $x = 0$. Видим, что никакая Z-комбинация вида $\Sigma n_i(\gamma_i - 1)$ в $\operatorname{Ker}\lambda$ не содержится. Эти рассуждения показывают, что $\operatorname{Ker}\lambda$ как Z-модуль порождается произведениями вида $(\gamma_{i_1} - 1)\ldots(\gamma_{i_k} - 1)$, $k \geqslant 2$.

Докажем, что указанные произведения составляют Z-базис модуля $\operatorname{Ker}\lambda$. Допустим противное. Тогда имеем некоторое нетривиальное несократимое соотношение

$$\sum_{\substack{(i)\\ k \geqslant 2}} n_{(i)}(\gamma_{i_1} - 1)(\gamma_{i_2} - 1)\ldots(\gamma_{i_k} - 1) = 0, \quad n_{(i)} \in Z. \tag{7}$$

Раскроем в (7) скобки. Тогда всякое слагаемое в левой части (7) запишется в виде

$n_{(i)}\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_k} +$ (члены, содержащие меньше чем k множителей γ_{i_j}).

В силу того, что элементы $\gamma \in \Gamma$ образуют Z-базис модуля $Z\Gamma$ и что всякий $\gamma \in \Gamma$ однозначно записывается в виде $\gamma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n$, $\gamma_i \in \Gamma_i$, из (7) следует

$$\sum_{(i)} n_{(i)}\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_k} = 0. \tag{8}$$

Несократимость соотношения (7) означает, что все произведения $(\gamma_{i_1} - 1)\ldots(\gamma_{i_k} - 1)$ в нем разные. Но тогда разными являются и все произведения $\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_k}$ в (8). Поэтому из (8) следует, что все $n_{(i)} = 0$. Ясно, что первое утверждение теоремы будет доказано, если окажется, что $\Delta^\omega \subset \operatorname{Ker}\lambda \subset \Delta^{\omega+1}$. К доказательству этого факта мы теперь и перейдем.

---

[2] Если индексы при прямом произведении Π (при прямой сумме Σ) не обозначены, то прямое произведение (прямая сумма) берется по всем i, $p_i \in \pi(\Gamma)$, где $\pi(\Gamma)$ — множество всех простых чисел, входящих в порядки элементов группы Γ.

а) $\operatorname{Ker}\lambda \subset \Delta^{\omega+1}$. Очевидно, достаточно показать, что все произведения вида $(\gamma_{i_1}-1)\ldots(\gamma_{i_k}-1)$, $k\geqslant 2$, $\gamma_{i_j}\in\Gamma_{i_j}$, содержатся в $\Delta^{\omega+1}$. Так как $\Delta^{\omega+1}$ — идеал в $Z\Gamma$, то для этого, в свою очередь, достаточно показать, что все произведения вида $(\gamma-1)(\sigma-1)$, $\gamma\in\Gamma_i$, $\sigma\in\Gamma_j$, $i\neq j$, содержатся в $\Delta^{\omega+1}$. Последнее, однако, вытекает из леммы 0.7.

б) $\Delta^{\omega}\subset\operatorname{Ker}\lambda$. Возьмем любой $x\in\Delta^{\omega}$. Элемент x можно записать в виде $x=y+z$, где $y=\Sigma n_i(\gamma_i-1)$, $\gamma_i\in\Gamma$, а z — «нелинейная часть», т. е. целочисленная линейная комбинация произведений $(\gamma_{i_1}-1)\ldots(\gamma_{i_k}-1)$, где $k\geqslant 2$. Ясно, что $z\in\operatorname{Ker}\lambda$.

Из леммы 0.7 следует $z\in\Delta^{\omega}$. Рассмотрим элемент $y=x-z\in\Delta^{\omega}$. Докажем, что $y=0$. Допустим противное. Тогда в записи $y=\Sigma n_i(\gamma_i-1)$, $\gamma_i\in\Gamma$, некоторое n_j является ненулевым. Рассмотрим тогда эпиморфизм $\tau:\Gamma\to\Gamma_j$; отметим, что если $\gamma\in\Gamma$ имеет запись $\gamma=\gamma_1\ldots\gamma_j\ldots\gamma_n$, то $\tau(\gamma)=\gamma_j$. Линейное продолжение отображения τ дает эпиморфизм колец $\tau: Z\Gamma\to Z\Gamma_j$. Легко проверить, что при всех натуральных k верно равенство $\tau(\Delta^k)=\Delta^k_j$. Следовательно, имеем

$$\tau(\Delta^{\omega})=\tau(\bigcap_k\Delta^k)\subset\bigcap_k\Delta^k_j=\Delta^{\omega}_j.$$

Но группа Γ_j является группой Грюнберга, т. е. $\Delta^{\omega}_j=0$. Мы видим, что $\tau(\Delta^{\omega})=0$. Из $y\in\Delta^{\omega}$ следует теперь, что

$$0=\tau(y)=\tau(\Sigma n_i(\gamma_i-1))=n_j(\gamma_j-1).$$

В силу $n_j\neq 0$ это равенство, однако, противоречиво. Таким образом, $y=0$, откуда следует $x=z\in\operatorname{Ker}\lambda$.

Из соотношения $\Delta^{\omega}=\operatorname{Ker}\lambda=\Delta^{\omega+1}$ вытекает неравенство $\tau(\Gamma)\leqslant\omega$. Предложение 2.5, однако, показывает, что $\tau(\Gamma)\geqslant\omega$. Теорема доказана.

3.2. В работе П. Смита [9] доказано, что нильпотентность конечной группы Γ равносильна существованию такого $x\in\Delta_\Gamma\subset Z\Gamma$, что

$$\Delta^{\omega}_{\Gamma}\cdot(1-x)=0. \tag{9}$$

Ясно, что из (9) следует $\tau(\Gamma)\leqslant\omega$. Обратное утверждение, однако, неверно. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Пусть Γ — некоторая группа. В кольце $Z\Gamma$ выполняется соотношение $\tau(\Gamma)=\omega$ в точности тогда, когда Γ обладает такой инвариантной подгруппой Σ, что $[\Sigma,\Sigma]=\Sigma$ и $\tau(\Gamma/\Sigma)=\omega$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, если положить $\Sigma=(1)$. Покажем достаточность.

Прежде всего, докажем $\omega\Sigma\subset\Delta^{\omega+1}_{\Gamma}$.

По предположению, $\Sigma=[\Sigma,\Sigma]$. Поэтому для всякого $\sigma\in\Sigma$ существуют такие элементы σ_1 и σ_2 в Σ, что $\sigma=\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$. Имеем

$$\sigma-1=\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}[(\sigma_1-1)(\sigma_2-1)-(\sigma_2-1)(\sigma_1-1)]. \tag{10}$$

Это соотношение показывает, что $\omega\Sigma\subset\Delta^2_{\Gamma}$. Последнее включение вместе с (10) дает $\omega\Sigma\subset\Delta^3_{\Gamma}$. Продолжив аналогичным образом, видим, что $\omega\Sigma\subset\bigcap_n\Delta^n_{\Gamma}=\Delta^{\omega}_{\Gamma}$. Пользуясь соотношением (10) еще раз, из $\omega\Sigma\subset\Delta^{\omega}_{\Gamma}$ получаем, наконец, что $\omega\Sigma\subset\Delta^{\omega+1}_{\Gamma}$.

Далее, из соотношения $\omega\Sigma\subset\Delta^{\omega+1}_{\Gamma}$ следует $\Delta^n_{\Gamma}+\omega\Sigma=\Delta^n_{\Gamma}$ при всяком натуральном n. Из этого факта вытекает, что при изоморфизме $Z(\Gamma/\Sigma)\cong Z\Gamma/\omega\Sigma$ идеал $\Delta^{\omega}_{\Gamma/\Sigma}$ отождествляется с $\Delta^{\omega}_{\Gamma}/\omega\Sigma$.

Теперь легко доказать, что $\tau(\Gamma) \leqslant \omega$. Действительно, в силу $\tau(\Gamma/\Sigma) = \omega$ имеем равенство

$$\Delta_\Gamma^\omega/\omega\Sigma = \Delta_\Gamma^\omega/\omega\Sigma \cdot \Delta_\Gamma/\omega\Sigma.$$

Поэтому $\Delta_\Gamma^\omega \subset \Delta_\Gamma^\omega \cdot \Delta_\Gamma + \omega\Sigma \subset \Delta_\Gamma^{\omega+1}$. Следовательно, $\tau(\Gamma) \leqslant \omega$.

Неравенство $\tau(\Gamma) \geqslant \omega$ следует из такого замечания. Пусть $\Gamma \to \overline{\Gamma}$ — некоторый эпиморфизм и $\mathfrak{S}$ — многообразие тривиальных пар. Если $(G, \overline{\Gamma}) \in \mathfrak{S}^{n+1} \setminus \mathfrak{S}^n$, то и $(G, \Gamma) \in \mathfrak{S}^{n+1} \setminus \mathfrak{S}^n$. Теорема доказана.

Следствие. *Если нильпотентный корадикал конечной группы* Γ *совпадает со своим коммутантом, то* $\tau(\Gamma) = \omega$.

Действительно, пусть $\mathfrak{N}(\Gamma) = \mathfrak{N}$ — нильпотентный корадикал группы Γ. Пользуясь теоремой 3.1, получаем $\tau(\Gamma/\mathfrak{N}) = \omega$. Утверждение следствия вытекает теперь из теоремы 3.2.

Замечание 1. В группе всех подстановок множества мощности ν рассмотрим подгруппу F_ν тех подстановок, которые переставляют лишь конечное число элементов. Далее, пусть A_ν — множество всех тех элементов F_ν, которые разлагаются в произведение четного числа транспозиций.

Пользуясь теоремами 1.3 и 3.2, видим, что $\tau(F_\nu) = \omega$. Таким образом, серия групп F_ν, $\nu \geqslant 5$, доставляет нам примеры ненильпотентных групп Γ сколь угодно большой мощности, для которых $\tau(\Gamma) = \omega$.

Замечание 2. В пункте 5.2 будет показано, что в классе конечных групп $\mathfrak{N}^{(2)}$, введенном Б. Хартли [18], нильпотентность группы Γ равносильна условию $\tau(\Gamma) = \omega$. Интересно было бы выявить класс $\mathfrak{X}$ всех тех групп, где указанная ситуация имеет место. Серия групп F_n, $n \geqslant 5$, показывает, что класс $\mathfrak{X}$ не содержит полностью класса всех конечных групп.

3.3. Пусть Γ — произвольная бесконечная группа. Далее, пусть μ — наименьшее порядковое число такое, что $\Delta^\mu = 0$. Если μ — непредельное, то равенства $0 = \Delta^\mu = \Delta^{\mu-1} \cdot \Delta$ показывают, что $\Delta^{\mu-1} \subset \operatorname{Ann}_l \Delta$. Пользуясь леммой 0.10, видим, что $\Delta^{\mu-1} = 0$, но это противоречит выбору μ. Поэтому в случае бесконечной группы Γ соотношение $\Delta^\mu = 0$, возможно, выполняется лишь для предельных μ. Нам не удалось выяснить, возможны ли здесь предельные $\mu > \omega$. В случае же конечных групп имеет место следующая

Теорема. *Пусть* Γ *— конечная группа и пусть* $\nu = \omega(n+1) + m$, *где* n, m *— любые неотрицательные целые числа. В групповом кольце* $Z\Gamma$ *выполняется соотношение* $\Delta^\nu = 0$ *в точности тогда, когда группа* Γ *примарна.*

Замечание. При $\nu = \omega$ эта теорема превращается в теорему Грюнберга и поэтому может считаться ее усилением. Приводимое ниже доказательство, однако, существенно использует теорему Грюнберга.

Доказательство. *Достаточность.* Если группа Γ примарна, то из теоремы 1.3 следует $\Delta^\omega = 0$. Поэтому $\Delta^\nu = 0$ при всех $\nu \geqslant \omega$.

Необходимость. Рассмотрим ряд

$$Z\Gamma \supset \Delta \supset \Delta^2 \supset \ldots \supset \Delta^\omega \supset \ldots \supset \Delta^{\omega 2} \supset \ldots \supset \Delta^{\omega(n+1)} \supset \ldots \supset \Delta^\nu = 0. \tag{11}$$

Обозначим подгруппу тех элементов группы Γ, которые действуют тождественно в факторе $\Delta^{\omega i}/\Delta^{\omega(i+1)}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, через Σ_i; при этом будем считать, что $\Delta^{\omega 0} = Z\Gamma$. К парам $(\Delta^{\omega i}/\Delta^{\omega(i+1)}, \Gamma/\Sigma_i)$ применима лемма 0.2. Отсюда вытекает нильпотентность групп Γ/Σ_i.

Пусть $\Sigma = \bigcap_i \Sigma_i$. Пользуясь теоремой Ремака, мы можем вкладывать группу Γ/Σ в конечное прямое произведение $\prod_i \Gamma/\Sigma_i$. Поэтому группа Γ/Σ — нильпотентна.

Пара $(Z\Gamma, \Sigma)$ — финитно стабильна, а область действия $Z\Gamma$ — без кручения. Предложение 0.3 показывает, что Σ действует в $Z\Gamma$ тривиально. Другими словами, $\Sigma \subset \mathrm{Ker}\,(Z\Gamma, \Gamma) = 1$, т. е. $\Sigma = 1$. Группа $\Gamma \cong \cong \Gamma/\Sigma$, таким образом, нильпотентна.

В силу теоремы 3.1 имеем $\tau(\Gamma) = \omega$, откуда $0 = \Delta^{\nu} = \Delta^{\omega}$. Примарность Γ следует теперь из теоремы 1.3. Теорема доказана.

4. О значениях индекса стабилизации для конечных групп

Основная цель этого параграфа — доказать теорему 4.12. Здесь мы покажем, что для всякого натурального n существуют конечные группы Γ, индекс стабилизации ряда трансфинитных степеней фундаментального идеала $\Delta = \Delta(\Gamma, Z)$ которых не меньше $\omega + n$.

Групповое кольцо $Z\Gamma$ для конечной группы Γ — нётерово справа. Поэтому область действия регулярной пары $(Z\Gamma, \Gamma)$ — нётеров модуль. Оказывается, что от нётеровости области действия G пары (G, Γ) существенно зависит длина нижнего Γ-стабильного ряда в G. Если допускать ненётеровы представления, то из результатов Б. Хартли (см. [6], док-во леммы 21) легко вывести, что любая группа Γ, допускающая эпиморфизм на циклическую группу простого порядка, имеет для всякого порядкового числа ν стабильное представление типа ν^{*}. Другой пример такого рода содержится в работе Б. И. Плоткина [8].

4.1. Пусть n — любое натуральное число. Далее, пусть P — унитреугольная группа $(n \times n)$-матриц над простым полем Z_p; A — n-мерное линейное пространство над Z_p; Q — конечная q-группа ($q \neq p$; p, q — простые числа) и B — целочисленное групповое кольцо группы Q. Естественным образом возникают пары (A, P) и (B, Q). Обозначим через (G, Γ) треугольное произведение этих пар. Таким образом,

$$(G, \Gamma) = (A, P) \triangle (B, Q) = (A \oplus B, \mathrm{Hom}(B, A) \rtimes (P \times Q)) = \\ = (A \oplus B, \Phi \rtimes \Sigma).$$

Пусть

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_\omega = \bigcap_s G_s \supset G_{\omega+1} \supset \ldots,$$

где $G_\nu = [G, \Gamma; \nu]$, $\nu \geqslant 1$, есть нижний стабильный ряд для пары (G, Γ). Далее, пусть $B_s = [B, Q; s]$; в частности $B_0 \equiv B$. Докажем, что $A + B_s \subset G_s$ при всех s.

4.2. Включение $A + B \subset G_0$ очевидно. Покажем, что $A + B_1 \subset G_1$. Ясно, что $B_1 = [B, Q] \subset G_1$. Чтобы доказать $A \subset G_1$, заметим, что $[B, \Phi] \subset G_1$ и $[b, \varphi] = -b + b \circ \varphi = -b + b + b\varphi = b\varphi$ при всяком $b \in B$. Возьмем в качестве элемента b базисный элемент свободной абелевой группы B. Тогда при всяком $a \in A$ отображение $b \to a$ можно продолжить до гомоморфизма φ из B в A. Следовательно, имеем $A \subset [B, \Phi] \subset G_1$.

Заметим, что $B_1 = [B, Q] = [ZQ, Q] = \{[g, \sigma] = -g + g\sigma = = g(\sigma - 1) \in ZQ \cdot \Delta_Q = \Delta_Q\}$. Таким образом, $B_1 = \Delta_Q$.

4.3. Докажем $A + B_2 \subset G_2$. Имеем $B/\Delta_Q \cong Z$. Но тогда по известной теореме подгруппа Δ_Q выделяется в абелевой группе B прямым слагаемым

$$B = T \oplus \Delta_Q = T \oplus B_1.$$

Поэтому имеем

$$\Phi=\mathrm{Hom}(B, A)=\mathrm{Hom}(T\oplus B_1, A)=\mathrm{Hom}(T, A)\oplus\mathrm{Hom}(B_1, A).$$

Таким образом, $\mathrm{Hom}\,(B_1, A)\subset\mathrm{Hom}\,(B, A)$. Теперь

$$G_2=[G_1, \Gamma]\supset[A+B_1, \Gamma]\supset[A+B_1, \Phi]\supset[A+B_1, \mathrm{Hom}(B_1, A)].$$

Группа B_1 как подгруппа свободной абелевой группы B также свободна и абелева. Те же рассуждения, что и в п. 4.2, показывают, что $A\subset[A+B_1, \mathrm{Hom}\,(B_1, A)]$. Поэтому $A\subset G_2$.

Далее, имеем $B_2=[B_1, Q]\subset[G_1, \Gamma]=G_2$. Следовательно, $A+B_2\subset G_2$.

Отметим, что $B_2=[B, Q; 2]=\Delta_Q^2$.

4.4. Пусть Σ — группа, Σ' — ее коммутант, а Δ — фундаментальный идеал целочисленного группового кольца для Σ. В работе Дж. Бэкли [22] доказано, что если факторгруппа Σ/Σ' является группой конечной экспоненты r, то аддитивная группа Δ/Δ^i имеет экспоненту, делящую r^i, $i=2, 3, \ldots$. Поэтому, если Σ — конечная p-группа, то (конечными) p-группами будут и все аддитивные группы Δ/Δ^i, $i=2, 3, \ldots$

4.5. Справедливость включения $A+B_s\subset G_s$, $s\geqslant 3$, докажем индукцией по s.

Пусть $A+B_s\subset G_s$ доказано для всех $s<k$. Покажем, что верно и $A+B_k\subset G_k$. Пусть b_1 — образующий элемент свободной абелевой группы B_1, и пусть a — любой элемент группы A. Существует $\varphi\in\mathrm{Hom}\,(B_1, A)$ такой, что $b_1\varphi=a$. Так как $B_1/B_{k-1}=\Delta/\Delta^{k-1}$, то в силу п. 4.4 группа B_1/B_{k-1} будет q-группой. Поэтому существует такое число m, что $b=q^m b_1\in B_{k-1}$. Тогда имеем

$$b\varphi=(q^m b_1)\varphi=q^m(b_1\varphi)=q^m a.$$

В силу $p\neq q$ вместе с элементом a всю группу A пробегает также элемент $q^m a$. Другими словами, всякий элемент x группы A можно представить в виде $x=q^m a$, $a\in A$. Выше мы видели, что тогда существует такой $\varphi\in\mathrm{Hom}\,(B_1, A)$, что $b\varphi=x$. Обозначим через Φ_A то подмножество в $\mathrm{Hom}\,(B_1, A)$, которое пробегается φ в равенстве $b\varphi=x$, когда x пробегает всю группу A. Далее, при любом $x\in A$ имеем

$$x=b\varphi=-b+(b+b\varphi)=-b+b\circ\varphi=[b, \varphi]\in[b, \Phi_A]\subset$$
$$\subset[B_{k-1}, \mathrm{Hom}(B_1, A)]\subset[A+B_{k-1}, \Gamma].$$

Однако в силу индуктивного предположения $[A+B_{k-1}, \Gamma]\subset G_k$. Соотношение $A\subset G_k$, таким образом, доказано.

Далее, $B_k=[B_{k-1}, \Gamma]\subset[G_{k-1}, \Gamma]=G_k$. Поэтому имеем $A+B_k\subset\subset G_k$, что и требовалось доказать.

4.6. Докажем справедливость равенства $G_s=A+B_s$, $s==0, 1, 2\ldots$.

Действительно, при $s=0$ это утверждение очевидно. Пусть по индукции при $k\leqslant s$ доказано, что $G_k=A+B_k$. Чтобы доказать $G_{s+1}==A+B_{s+1}$, достаточно (в силу п. 4.5) показать, что $G_{s+1}\subset A+B_{s+1}$. Возьмем любые $a\in A$, $b\in B_s$, $\varphi\in\Phi$, $\sigma\in\Sigma$. Пользуясь соотношениями п. 0.5, находим

$$[a+b, \varphi\sigma]=-(a+b)+(a+b)\circ\varphi\sigma=-a-b+a\circ\varphi\sigma+b\circ\varphi\sigma=$$
$$=-a-b+(a\circ\varphi)\circ\sigma+(b\circ\varphi)\circ\sigma=-a+a\circ\sigma-b+b\circ\sigma+(b\varphi)\circ\sigma=$$
$$=[a, \sigma]+[b\varphi, \sigma]+b\varphi+[b, \sigma]\in A+B_{s+1}.$$

Но тогда имеем $G_{s+1}=[G_s,\Gamma]\subset[A+B_s,\Gamma]\subset A+B_{s+1}$, что доказывает справедливость равенства.

4.7. Я утверждаю теперь, что $G_\omega\subset A$. Действительно, согласно предыдущему пункту

$$G_\omega=\bigcap_{s=1}^{\infty}G_s=\bigcap_{s=1}^{\infty}(A+B_s).$$

Возьмем любой элемент $x\in G_\omega$. Тогда при всяком s существуют такие $a_s\in A$ и $b_s\in B_s$, что $x=a_s+b_s$. В силу $A\cap B=0$ имеем $b_s=b_{s+1}$ при всех s, откуда, в частности, следует $x-a_1\in B_\omega$. Пользуясь теоремой 1.3, видим, что $B_\omega=\bigcap_{s=1}^{\infty}B_s=\bigcap_{s=1}^{\infty}\Delta_Q^s=0$. Следовательно, $x=a_1$. Этот результат, очевидно, доказывает выполнимость включения.

4.8. Оставшуюся часть этого параграфа посвятим доказательству соотношения $A\subset G\Delta_\Gamma^\omega$. Предварительно проведем несколько вспомогательных вычислений.

Пусть $\Phi_1=[\Phi,\Sigma_2]$. При любых $b\in B$, $\varphi\in\Phi$, $\sigma\in\Sigma_2$ имеем $b=b\circ\varepsilon=b\circ\varphi\varphi^{-1}=(b+b\varphi)\circ\varphi^{-1}=b\circ\varphi^{-1}+b\varphi$, откуда $b\circ\varphi^{-1}=b-b\varphi$. Далее,

$$b\circ[\varphi,\sigma]=b\circ(\varphi^{-1}\sigma^{-1}\varphi\sigma)=(b-b\varphi)\circ(\sigma^{-1}\varphi\sigma)=(b\sigma^{-1}-b\varphi)\circ(\varphi\sigma)=$$
$$=(b\sigma^{-1}+b\sigma^{-1}\varphi-b\varphi)\sigma=b-b\varphi+b\sigma^{-1}\varphi.$$

Возьмем теперь любые $b\in B$ и $\varphi_1\in\Phi_1$. Тогда существуют такие $\varphi\in\Phi$ и $\sigma\in\Sigma_2$, что $\varphi_1=[\varphi,\sigma]$. Пользуясь полученными выше соотношениями, находим

$$[b,\varphi_1]=-b+b\circ\varphi_1=-b+b-b\varphi+b\sigma^{-1}\varphi=-b\varphi+b\sigma^{-1}\varphi=$$
$$=(-b+b\sigma^{-1})\varphi=[b,\sigma^{-1}]\varphi.$$

Эти вычисления показывают, что $[B,\Phi_1]\supset[B,\Sigma_2]\Phi$. Но группа $B_1=[B,\Sigma_2]\subset B$ является свободной абелевой группой и поэтому $B_1\Phi=A$. Таким образом, модуль A содержится в $[B_1,\Phi]$.

4.9. Лемма. *Имеет место соотношение* $[[\Phi,\Sigma_2],\Sigma_2]=[\Phi,\Sigma_2]$.

Доказательство. Обозначим через Φ_2, G соответственно $[[\Phi,\Sigma_2],\Sigma_2]$, Φ/Φ_2 и рассмотрим факторпару (G,Σ_2) пары (Φ,Σ_2). Легко показать, что ряд

$$G\supset[G,\Sigma_2]\supset 0$$

является 2-стабильным рядом для пары (G,Σ_2). Другими словами, $G\Delta^2=0$.

Заметим, далее, что группа G, будучи факторгруппой p-группы $\Phi=\mathrm{Hom}\,(B,A)$ является p-группой, а действующая группа Σ_2 является q-группой и $q\neq p$.

Возьмем теперь любые $g\in G$ и $\sigma\in\Sigma_2$. Тогда существует k такое, что $\sigma^{q^k}=1$.

С одной стороны имеем $g(\sigma^{q^k}-1)=g0=0$.

С другой стороны,

$$g(\sigma^{q^k}-1)=g((1+(\sigma-1))^{q^k}-1)=g((1+q^k(\sigma-1)+\ldots)-1)=$$
$$=g(q^k(\sigma-1)+\ldots)=q^k(g(\sigma-1)),$$

где через многоточие обозначена сумма членов, содержащихся в Δ^2. Поэтому $q^k(g(\sigma-1))=0$, откуда в силу сделанного выше замечания немедленно следует тривиальность пары (G,Σ_2). Следовательно. $\Phi_2\supset[\Phi,\Sigma_2]$. Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

4.10. Пользуясь доказанной леммой, видим, что $H=\Phi\cdot\Sigma_2$ является подгруппой в группе Γ и $\Phi_1 \subset H$. Для всякой подгруппы $M\leqslant H$ через $\tilde{\omega}M$ обозначим правый идеал в ZH, порожденный всеми $m-1$, $m\in M$. Находим идеал Δ_H^ω в кольце ZH.

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 3.2, можно показать, что $\tilde{\omega}\Phi_1\subset\Delta_H^\omega$.

Докажем обратное включение.

Прежде всего, заметим, что H/Φ_1 является q-группой и, следовательно, $\Delta^\omega_{H/\Phi_1}=0$. Но

$$\Delta^\omega_{H/\Phi_1}=\bigcap_{s=1}^{\infty}(\Delta^s_H+\tilde{\omega}\Phi_1)/\tilde{\omega}\Phi_1,$$

откуда следует, что

$$\tilde{\omega}\Phi_1\supset\bigcap_{s=1}^{\infty}(\Delta^s_H+\tilde{\omega}\Phi_1)\supset\bigcap_{s=1}^{\infty}\Delta^s_H=\Delta^\omega_H.$$

Таким образом, имеет место равенство $\Delta_H^\omega=\tilde{\omega}\Phi_1$.

4.11. Теперь уже легко доказать, что $G_\omega=G\Delta_\Gamma^\omega=A$.

Для этого прежде всего заметим, что

$$A\Delta_\Gamma^\omega\subset A\Delta_\Gamma^n=[A,\Gamma;n]=[A,\Sigma_1;n]=A_n=0.$$

Если учесть наши результаты из предыдущих пунктов этого параграфа, то

$$A=G_\omega\supset G\Delta_\Gamma^\omega=(A+B)\Delta_\Gamma^\omega\supset A\Delta_\Gamma^\omega+B\Delta_\Gamma^\omega=B\Delta_\Gamma^\omega\supset$$

$$\supset B\Delta_H^\omega=B(\tilde{\omega}\Phi_1)\supset[B,\Phi_1]=A,$$

откуда и вытекают требуемые равенства.

На основании этого результата будем утверждать, что $\Delta_\Gamma^{\omega+n-1}\neq\Delta_\Gamma^{\omega+n}$.

Действительно, в противном случае мы имели бы $G\Delta_\Gamma^{\omega+n}=G\Delta_\Gamma^{\omega+n-1}$. С другой стороны, $G\Delta_\Gamma^{\omega+n-1}=A\Delta_\Gamma^{n-1}=[A,\Sigma_1;n-1]=A_{n-1}\neq 0$ и $G\Delta_\Gamma^{\omega+n}=A\Delta_\Gamma^n=[A,\Sigma_1;n]=A_n=0$. Таким образом, $G\Delta_\Gamma^{\omega+n}\neq G\Delta_\Gamma^{\omega+n-1}$. Противоречие доказывает утверждение.

4.12. Итак, мы пришли к следующему результату.

Теорема. *Пусть ω — первое бесконечное порядковое число. Для всякого натурального n существует такая конечная группа Γ, в целочисленном групповом кольце которой $(\omega+n-1)$-я и $(\omega+n)$-я степени фундаментального идеала Δ различны.*

Методы работы [8] позволяют усилить результаты § 2—4. Можно доказать, что $\tau(\Gamma)<\omega 2$ для любой конечной группы Γ. Далее, для нётеровых групп Γ, нильпотентный корадикал которых совпадает со своим коммутантом, имеет место $\tau(\Gamma)=\omega$. Это же равенство установлено для артиновых нильпотентных групп Γ, что позволяет доказать теорему 3.3 для любой артиновой группы Γ. Доказательства будут приведены в отдельной работе.

5. Замечания об одном классе конечных групп

5.1. Приведем некоторые дополнительные свойства одного класса групп, введенного Б. Хартли [18]. Определяется этот класс следующим образом. Пусть Ξ — множество всех простых чисел и σ' — дополнение к σ в Ξ. Рассмотрим в конечной группе Γ подгруппу $\mu_2(\Gamma)=\bigcap\Gamma_{\sigma'}$, где пересечение берется по всем таким $\sigma \in \Xi$, что $|\sigma| = 2$, а $\Gamma_{\sigma'}$ — подгруппа, порожденная всеми σ'-элементами в Γ. Класс $\mathfrak{N}^{(2)}$ — это класс конечных групп, являющихся расширениями абелевых групп с помощью нильпотентных и имеющих единичную подгруппу $\mu_2(\Gamma)$. Оказывается, что всякая $\mathfrak{N}^{(2)}$-*группа допускает точное стабильное представление типа* $(\omega + n)^*$ *в некоторой конечнопорожденной абелевой группе* G. Этот результат принадлежит Б. Хартли ([18], теорема 2).

Приведем его доказательство, используя конструкцию треугольного произведения.

Заметим прежде всего, что для всякой $\mathfrak{N}^{(2)}$-группы Γ существуют такие простые числа p и q, что Γ содержит абелеву инвариантную p-подгруппу A, факторгруппа Γ/A по которой является нильпотентной (p, q)-группой. Таким образом, имеем $\Gamma/A = B_1 \times B_2$, где B_1 — p-группа и B_2 — q-группа. Следовательно, всякая $\mathfrak{N}^{(2)}$-группа изоморфно вкладывается в сплетение вида $T = A \operatorname{Wr} (B_1 \times B_2)$. Поэтому достаточно показать, что группа T допускает $(\omega + n)^*$-стабильное представление.

Рассмотрим пары с регулярным действием (A^{B_1}, B_1) и (ZB_2, B_2), и пусть

$$(G, T_1) = (A^{B_1}, B_1) \triangle (ZB_2, B_2).$$

В лекциях проф. Б. И. Плоткина, которые читались им в Латвийском государственном университете (Рига) весной 1972 года, приводится формула

$$(A^{B_1}, B_1) \triangle (ZB_2, B_2) = (A^{B_1} + ZB_2, A \operatorname{Wr} (B_1 \times B_2)),$$

которая показывает, что группа T изоморфна группе T_1.

Обозначим через $\mathfrak{S}$ многообразие тривиальных пар. Из того, что B_2 является группой Грюнберга, легко следует, что $(ZB_2, B_2) \in \mathfrak{S}^{\omega}$. Далее, пара (A^{B_1}, B_1) — финитно стабильна, так как $A^{B_1} \leftthreetimes B_1$ является p-группой. Другими словами, имеем $(A^{B_1}, B_1) \in \mathfrak{S}^n$. Но тогда $(G, T) \cong$ $\cong (G, T_1) = (A^{B_1}, B_1) \triangle (ZB_2, B_2) \in \mathfrak{S}^n \cdot \mathfrak{S}^{\omega} = \mathfrak{S}^{\omega+n}$, что и требовалось доказать.

5.2. Предложение. *Группа* Γ *из класса* $\mathfrak{N}^{(2)}$ *нильпотентна в точности тогда, когда* $\tau(\Gamma) = \omega$. *Для ненильпотентных групп* Γ *из класса* $\mathfrak{N}^{(2)}$ *имеет место неравенство* $\tau(\Gamma) \geqslant \omega + 1$, *а* $(\omega + n)$*-й член* $\Gamma_{\omega+n}$ *нижнего центрального ряда для такой группы не содержится в размерной подгруппе* $D_{\omega+n}$.

Доказательство. Если группа Γ нильпотентна, то по теореме 3.1 имеем $\tau(\Gamma) = \omega$.

Обратно, пусть для некоторой $\Gamma \in \mathfrak{N}^{(2)}$ имеет место $\tau(\Gamma) \leqslant \omega$. Заметим прежде всего, что указанное в теореме 5.1 (Хартли) число n для группы Γ можно считать ненулевым. Действительно, если $n = 0$, то в силу $G\Delta^{\omega} \subset G_{\omega} = 0$ мы имели бы $\Gamma_{\omega} \subset D_{\omega} \subset \operatorname{Ker} (G, \Gamma) = 1$, т. е. Γ нильпотентна. Итак, пусть $n \geqslant 1$. По той же теореме 5.1 имеем $0 = G_{\omega+n} \supset G\Delta^{\omega+n}$, откуда в силу $\tau(\Gamma) \leqslant \omega$ следует $1 = \operatorname{Ker} (G, \Gamma) \supset$ $\supset D_{\omega+n} = D_{\omega} \supset \Gamma_{\omega}$. Видим, что группа Γ нильпотентна.

Следовательно, для ненильпотентной группы $\Gamma \in \mathfrak{N}^{(2)}$ имеет место неравенство $\tau(\Gamma) \geqslant \omega + 1$. Далее легко видеть, что для таких групп Γ, $\Gamma_{\omega+n} \not\subset D_{\omega+n}$. Действительно, в противном случае $\Gamma_{\omega} = \Gamma_{\omega+n} \subset$ $\subset D_{\omega+n} \subset \operatorname{Ker} (G, \Gamma) = 1$, но это противоречит ненильпотентности Γ. Предложение доказано.

5.3. Существуют также группы без кручения Γ, для которых соотношение $\Gamma_{\nu} \subset D_{\nu}$ верно не всегда. Рассмотрим пример Б. И. Плоткина ([1], с. 470—471) слабо стабильной группы автоморфизмов Γ, не обладающей центральной системой даже при абелевой области действия G. Возникает точная пара (G, Γ). Группа Γ не имеет кручения и допускает в модуле G точное Γ-стабильное представление типа $(\omega+1)^*$. При $\Delta^\omega = \Delta^{\omega+1}$ мы имели бы $G\Delta^\omega = G\Delta^{\omega+1} \subset G_{\omega+1} = 0$, откуда $\Gamma_\omega \subset \subset \operatorname{Ker}(G, \Gamma) = 1$, т. е. $\Gamma_\omega = 1$, что невозможно. Итак, $\Delta^{\omega+1} \neq \Delta^\omega \neq 0$.

5.4. Пусть Γ — некоторая группа и Δ — фундаментальный идеал в кольце $Z\Gamma$. Далее, пусть τ — первый такой ординал, что $\Delta^\tau = \Delta^{\tau+1} = \ldots$ Символом D_τ обозначим в группе Γ подгруппу $(1+\Delta^\tau) \cap \Gamma$. Нас интересует теоретико-групповое строение размерной подгруппы D_τ.

Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\Gamma)$ — нильпотентный корадикал конечной группы Γ. Прежде всего имеем $D_\tau \subseteq \mathfrak{N}$. Действительно, в силу неравенства $\tau(\Gamma) \geqslant \omega$ имеем $\Delta^\tau \subseteq \Delta^\omega$, поэтому $D_\tau \subseteq D_\omega$. Отсюда (с учетом 2.2) следует требуемое включение.

Одно описание подгруппы D_τ, которым, однако, пока не удалось воспользоваться для вычисления индекса стабилизации ряда (1), все же заслуживает упоминания.

Теорема. *Пусть τ — индекс стабилизации ряда степеней фундаментального идеала в целочисленном групповом кольце конечной группы Γ. Тогда размерная подгруппа D_τ является пересечением всех тех инвариантных в Γ подгрупп, факторгруппы по которым бипримарны и являются расширениями абелевых групп с помощью нильпотентных.*

Доказательство. Рассмотрим пару $(Z\Gamma/\Delta^\tau, \Gamma)$. Ядром ее будет группа D_τ. Ряд

$$Z\Gamma/\Delta^\tau \supset \ldots \supset \Delta^\omega/\Delta^\tau \supset \ldots \supset 0$$

является инвариантным Γ-стабильным рядом в аддитивной группе G кольца $Z\Gamma/\Delta^\tau$. Другими словами, группа Γ/D_τ изоморфно вкладывается в группу стабильности указанного выше ряда в G.

Можно, следовательно, воспользоваться следующим фактом (см. [18], теорема 1*).

Пусть F — некоторая группа. Если Γ является конечной подгруппой в группе стабильности некоторого инвариантного ряда в F, то $\Gamma \in \mathfrak{N}^{(2)}$.

По этой теореме Хартли $\overline{\Gamma} = \Gamma/D_\tau \in \mathfrak{N}^{(2)}$. Следовательно, подгруппа $\mu_2(\overline{\Gamma})$ тривиальна. Это означает, что существует набор $\overline{\Omega}$ инвариантных в $\overline{\Gamma}$ подгрупп $\overline{X}$ с тривиальным пересечением, факторгруппы $\overline{\Gamma}/\overline{X}$ по которым бипримарны и содержатся в классе[3] $\mathfrak{an}$. Пусть $\Omega = \{X\}$ — набор подгрупп из Γ, являющихся полными прообразами подгрупп $\overline{X} \in \overline{\Omega}$. Ясно, что инвариантные подгруппы $X \subset \Omega$ таковы, что Γ/X бипримарны, содержатся в $\mathfrak{an}$ и $\bigcap_{X \in \Omega} X = D_\tau$. Далее, пусть Ω^* — тот набор инвариантных в Γ подгрупп, о котором говорится в теореме. В силу $\Omega^* \supseteq \Omega$ имеем $\bigcap_{X \in \Omega^*} X \subseteq \bigcap_{X \in \Omega} X$. Таким образом,

$$\bigcap_{X \in \Omega^*} X \subseteq D_\tau.$$

Для доказательства обратного включения достаточно показать, что D_τ содержится в каждой $X \in \Omega^*$.

Заметим прежде всего, что $\Gamma/X \in \mathfrak{N}^{(2)}$ для всякой $X \in \Omega^*$. Поэтому группа Γ/X (при некотором натуральном n) допускает точное $(\omega+n)^*$-стабильное представление в абелевой области G (см. теорему Хартли в 5.1). Получаем пару $(G, \Gamma/X)$.

[3] Как обычно, $\mathfrak{a}$ обозначает класс абелевых групп и $\mathfrak{n}$ — класс нильпотентных групп.

Поднятие этой пары по эпиморфизму $\Gamma \to \Gamma/X$ дает нам пару (G, Γ), ядром которой является X. Ясно, что $G_{\omega+n} = [G, \Gamma;\ \omega+n] = 0$.

Далее, заметим, что $G\Delta_\Gamma^{\omega+n} \subset G_{\omega+n}$. Следовательно, $\Delta^{\omega+n}$ аннулирует модуль G. Однако, очевидно, $\Delta^\tau \subset \Delta^{\omega+n}$, откуда следует $G\Delta^\tau = 0$. Другими словами, $G(D_\tau - 1) = 0$. Это означает, что D_τ лежит в ядре пары (G, Γ). Таким образом, $D_\tau \subset X$. Теорема доказана.

Замечание. Пусть Γ — конечная группа и пусть $D_\nu = (1 + \Delta_\Gamma^\nu) \cap \Gamma$. Предложением 2.1 и теоремой 5.4. выясняется теоретико-групповое строение размерных подгрупп D_ω и D_τ. Вопрос о строении групп D_ν при $\omega < \nu < \tau$ остается открытым, и задача заслуживает дальнейшего изучения.

Примечание при корректуре. Недавно появилась статья К. Грюнберга и Дж. Роузблейда (Can. J. Math., **24**, 221 (1972)), из основной теоремы которой вытекает часть результатов данной работы. В частности, в этой работе доказана гипотеза, отмеченная в резюме данной статьи. Методы доказательств этой работы существенно отличаются от метода нашей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плоткин Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966.
2. Бовди А. А., Матем. заметки, 2, 129 (1967).
3. Buckley J., Proc. Amer. Math. Soc., **18**, 185 (1967).
4. Connell I., Canad. J. Math., **15**, 650 (1963).
5. Gruenberg K., Arch. Math., **13**, 408 (1962).
6. Hartley B., Proc. London Math. Soc., **20**, 365 (1970).
7. Мальцев А. И., Матем. сб., **25**, 347 (1949).
8. Плоткин Б. И., Тр. Московск. матем. об-ва (в печати).
9. Smith P., Proc. London Math. Soc., **21**, 385 (1970).
10. Кальюлайд У., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та (матем. и механика), **281**, 58 (1971).
11. Krull W., Sitz. Ber. Heidelberg Akad. Wiss., 1928.
12. Krull W., J. reine und angew. Math., **179**, 204 (1938).
13. Zariski O., Summa Bras. Math., **1**, 169 (1946).
14. Lesieur L., Croisot C., Algèbre noetherienne non commutative Memorial des Sciences Mathematique, Fasc. CLIV, Paris, 1963.
15. Lesieur L., Croisot C., J. reine und angew. Math., **204**, 216 (1960).
16. Riley J., Trans. Am. Math. Soc., **105**, 177 (1962).
17. Плоткин Б. И., В сб.: Некоторые вопросы теории групп, Рига, 1971.
18. Hartley B., J. Algebra. 3, 187 (1966).
19. Losey G., Trans. Am. Math. Soc., **97**, 474 (1960).
20. Плоткин Б. И., Гринберг А. С., Радикальные классы и многообразия в теории представлений групп. (Рукопись статьи), 1971.
21. Hall Ph., Hartley B., Proc. London Math. Soc., **16**, 1 (1966).
22. Buckley J., Illinois J. Math., **14**, 274 (1970).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 13/VII 1972

U. KALJULAID

FUNDAMENTAALSE IDEAALI ASTMETEST

Olgu F rühm ja $\Delta = \Delta_F$ fundamentaalne ideaal täisarvuliste koefitsientidega rühmaringis ZF. Siin uuritakse rea

$$ZF \supset \Delta \supset \Delta^2 \supset \ldots \supset \Delta^\tau = \Delta^{\tau+1} = \ldots$$

stabilisatsiooniindeksi $\tau(F)$ võimalikke väärtusi ning Z-mooduli Δ^τ ehitust.

Olgu ω esimene lõpmatu ordinaalarv. Tõestatakse, et iga naturaalarvu n jaoks leidub lõplik rühm F_n, mille korral $\tau(F_n) \geqslant \omega + n$. Näidatakse, et Artini rühma F

korral seos $\Delta_F^{\omega}=0$ kehtib parajasti siis, kui F on lõplik p-rühm. Lõplike rühmade F korral on selle väite tõestanud K. Gruenberg oma töös [5]. Leitakse Z-mooduli Δ_F^{ω} baas juhul, kui F on lõplik nilpotentne rühm, ning tõestatakse veel üks K. Gruenbergi mainitud tulemuse üldistus.

U. KALJULAID

ON THE POWERS OF THE AUGMENTATION IDEAL

Let F be Artinian group and let Δ_F be the augmentation ideal in the integral group-ring ZF. The necessary and sufficient condition for $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_F^n = (0)$ is that F is a finite p-group. For a finite nilpotent group F the Z-basis of the module $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_F^n$ is found. As the language of pairs [1] is often used here, some known results are proved in the new framework, notably some results of K. Gruenberg [5] and J. Buckley [3].

Let F be a group and let F_ν be the ν-th member of the lower central series for F. Let Δ be the augmentation ideal of the integral group-ring for F and let $D_\nu = F \cap (1+\Delta^\nu)$. Condition $F_\nu \subset D_\nu$ is in general true only for finite ν. For infinite ν counter-examples exist both in the class of finite groups and in the class of torsion-free groups. The question about possible values of the index of stabilization $\tau(F)$ of the series

$$ZF \supset \Delta \supset \Delta^2 \supset \ldots \supset \Delta^{\omega} \supset \Delta^{\omega+1} \supset \ldots$$

is studied. Let ω be the first infinite ordinal. It is proved that for any natural n there exists a finite group F_n, such that $\tau(F_n) \geqslant \omega + n$. The construction of the triangular product of linear pairs according to B. Plotkin [17] is used. With the same technique a new proof is given of a theorem of Hartley [18]. The following statement appears to be probable.

Conjecture. For all natural n there exists a finite group F_n with $\tau(F_n) = \omega + n$ and $\tau(F) < \omega 2$ for all Artinian groups F.