

Н. ВЕКСЛЕР

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЭХО-СИГНАЛ ОТ «АКУСТИЧЕСКИ ЖЕСТКОЙ» СФЕРЫ В ЖИДКОСТИ

Предложен метод вычисления нестационарного эхо-сигнала, вызванного зондирующим импульсом конечной длительности, от «акустически жесткой» неподвижной сферы, погруженной в безграничную идеальную сжимаемую жидкость. Метод основан на применении интегрального преобразования Лапласа и разделении переменных по угловой и радиальной координатам. Обратное преобразование выполнено с использованием теорем сдвига и свертки. Давление в эхо-сигнале представлено в виде бесконечного ряда.

1° Введение. Ввиду важных практических приложений и благодаря широким возможностям вычислительной техники в последнее время интенсивно разрабатывается проблема взаимодействия звуковых волн с тонкостенными упругими конструкциями. В этой проблеме можно выделить две большие ветви: исследование силового воздействия звуковой волны на упругий объект и анализ эхо-сигнала от упругого объекта. Состояние проблемы отражено в недавно вышедших монографиях [1, 2] и обзорах [3, 4].

Необходимой предпосылкой понимания механизма формирования эхо-сигнала от упругого объекта, сложного как по форме, так и по структуре, является изучение эхо-сигнала от объектов простой геометрической формы, таких как «акустически жесткая» или «мягкая» сферы. В последних случаях эхо-сигнал не затенен влиянием упругих свойств объекта и может быть вычислен точно.

Из предыдущих работ, тесно связанных с темой настоящего исследования, отметим статьи [5-9].

2° Постановка задачи. Рассмотрим задачу о нахождении нестационарного эхо-сигнала, вызванного зондирующим импульсом конечной длительности, от неподвижной «акустически жесткой» сферы, погруженной в безграничную идеальную сжимаемую жидкость. Предположим, что зондирующий импульс представляет собой отрезок плоской волны, гармонически изменяющейся во времени.

Давление в жидкости удовлетворяет волновому уравнению

$$[\partial_r^2 + 2r^{-1}\partial_r + r^{-2}(\partial_\theta^2 + \text{ctg } \theta \partial_\theta)]p_j = \partial_t^2 p_j \quad (j = 1, 2). \quad (2.1)$$

Здесь p_1 — давление в падающей волне; p_2 — давление в дифракционной волне; θ — полярный угол; r — безразмерный (деленный на радиус сферы) радиус; t — безразмерное время. Единица безразмерного времени определяется как интервал, за который волна в жидкости проходит расстояние, равное радиусу сферы. Время отсчитывается от момента соприкосновения падающей волны со сферой, происходящего при $r = 1$, $\theta = 0$.

Начальные условия

$$\text{при } t = 0 \quad p_2 = \partial_t p_2 = 0. \quad (2.2)$$

Краевое условие

$$\text{при } r = 1 \quad \omega_1 + \omega_2 = 0, \quad (2.3)$$

где ω_1, ω_2 — перемещения в жидкости, вызываемые давлениями p_1, p_2 соответственно.

Условие затухания

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad p_2 \rightarrow 0. \quad (2.4)$$

Закон изменения давления в зондирующем импульсе примем в виде

$$p_1 = p_0 [\sin(\omega T_1) H(T_1) - \sin(\omega T_2) H(T_2)], \quad (2.5)$$

$$T_1 = t - 1 + r \cos \theta, \quad T_2 = T_1 - T_0, \quad T_0 = 2\pi n \omega^{-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; T_0 — длительность зондирующего импульса; ω — частота.

Краткости ради ниже отыскивается эхо-сигнал, вызванный лишь первым слагаемым в формуле (2.5). Эхо-сигнал второго слагаемого находится аналогичным образом.

3° Решение в пространстве изображений Лапласа. Для решения сформулированной задачи применим интегральное преобразование Лапласа [10]. Используя метод разделения переменных, получим в пространстве изображений (индекс L) решение в виде бесконечного ряда

$$p_2^L(r, \theta, s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^{-1/2} K_{m+1/2}(rs) P_m(x) \quad (x = \cos \theta), \quad (3.1)$$

где s — параметр преобразования; a_m — постоянная, определяемая из краевого условия; $K_{m+1/2}$ — модифицированная функция Бесселя второго рода полуцелого порядка; P_m — полином Лежандра.

Отметим, что $p_2^L(r, \theta, s)$ ограничено при $\theta = 0, \theta = \pi$ и удовлетворяет преобразованному по Лапласу условию затухания (2.4).

Воспользовавшись соотношением

$$K_{m+1/2}(rs) = K_{1/2}(rs) f_m(rs) \quad (3.2)$$

и следуя А. А. Харкевичу [11], придадим выражению (3.1) вид

$$p_2^{L'}(r, \theta, s) = r^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \exp(-rs) f_m(rs) P_m(x). \quad (3.3)$$

Используя преобразованное по Лапласу краевое условие (2.3), после несложных преобразований получим

$$p_2^{L'}(r, \theta, s) = r^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \exp[-s(r-1)] \xi_m^L \chi_m^L P_m(x), \quad (3.4)$$

где

$$\xi_m^L = (\partial_r p_{1m}^L)|_{r=1}, \quad \chi_m^L = f_m(rs)/F_m(s), \quad (3.5)$$

а f_m, F_m — функции Стокса [12].

4° Вычисление оригинала по изображению. Применяя теоремы сдвига и свертки [10], получим выражение для давления в отраженной волне

$$\begin{aligned} p_2(r, \theta, t) &= r^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} p_m(r, t) P_m(x), \\ p_m(r, t) &= \int_0^{t_1} \xi_m(\tau) \chi_m(t_1 - \tau) d\tau, \\ t_1 &= t - r + 1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Функция χ_m^L (3.5) является мероморфной, поскольку [12, 13]

$$\begin{aligned} f_m(rs) &= \sum_{k=0}^m \frac{(m+k)!}{(m-k)!k!(2rs)^k}, \\ F_m(s) &= \sum_{k=0}^m \frac{(m+k)!(1+k+s)}{(m-k)!k!(2s)^k}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Воспользовавшись теоремой о вычетах [10], имеем

$$\chi_m(t_1) = \sum_{j=1,2,3,\dots} \frac{s_m^j f_m(rs)}{\partial_s [s^m F_m(s)]} \exp(st_1) \Big|_{s=s_{mj}}, \quad (4.3)$$

где s_{mj} — корни уравнения

$$F_m(s) = 0. \quad (4.4)$$

Как показано в [11], уравнение (4.4) при четных m имеет один действительный отрицательный корень и $1/2 m$ пар комплексно сопряженных корней, а при нечетных m $1/2(m+1)$ пар комплексно сопряженных корней.

Введя обозначение

$$s_{mj} = -\alpha_{mj} \pm i\beta_{mj} \quad (4.5)$$

и используя формулу (4.3), имеем при четных m

$$\chi_m(t_1 - \tau) = \delta_{m0} \exp[-\alpha_{m0}(t_1 - \tau)] + \sum_{j=1}^{1/2 m} e_{mj}, \quad (4.6)$$

при нечетных m

$$\chi_m(t_1 - \tau) = \sum_{j=1}^{1/2(m+1)} e_{mj}, \quad (4.7)$$

где

$$e_{mj} = \exp[-\alpha_{mj}(t_1 - \tau)] \{ \gamma_{mj} \sin[\beta_{mj}(t_1 - \tau)] + \delta_{mj} \cos[\beta_{mj}(t_1 - \tau)] \}. \quad (4.8)$$

Коэффициенты $\gamma_{mj}(r, s_{mj})$, $\delta_{mj}(r, s_{mj})$ ради краткости не приведены.

Функцию $\xi_m(\tau)$ (3.5) получим, раскладывая $(\partial_r p_1)|_{r=1}$ в ряд по полиномам Лежандра

$$(\partial_r p_1)|_{r=1} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m(\tau) P_m(x), \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_m(\tau) &= p_0 \omega [c_m \sin \omega(\tau - 1) + d_m \cos \omega(\tau - 1)], \\ c_m &= -(m + 1/2) \int_{-1}^1 x \sin \omega x P_m(x) dx, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$d_m = (m + 1/2) \int_{-1}^1 x \cos \omega x P_m(x) dx.$$

Используя (4.1), (4.6)–(4.8) и (4.10), получим при четных m

$$p_m(r, t) = p_{m0}(r, t) + \sum_{j=1}^{1/2m} p_{mj}(r, t); \quad (4.11)$$

при нечетных m

$$p_m(r, t) = \sum_{j=1}^{1/2(m+1)} p_{mj}(r, t), \quad (4.12)$$

где

$$p_{m0}(r, t) = -p_0 \frac{1 - \lambda_{m0}}{1 + \lambda_{m0}^2} \delta_{m0} c_m \cos \omega \left\{ \sin \omega t_1 + \right. \\ \left. + \frac{1 + \lambda_{m0}}{1 - \lambda_{m0}} [\cos \omega t_1 - \exp(-\alpha_{m0} t_1)] \right\} H(t_1), \quad (4.13)$$

$$p_{mj}(r, t) = p_0 \{ A_{mj} \exp(-\alpha_{mj} t_1) + 1/2 \omega [B_{mj} \sin(\kappa_{mj} t_1) + \\ + C_{mj} \sin(\eta_{mj} t_1) + D_{mj} \cos(\kappa_{mj} t_1) + E_{mj} \cos(\eta_{mj} t_1)] \} H(t_1). \quad (4.14)$$

При этом

$$\lambda_{m0} = \alpha_{m0} \omega^{-1}, \quad \kappa_{mj} = \omega + \beta_{mj}, \quad \eta_{mj} = \omega - \beta_{mj},$$

$$A_{mj} = -1/2 \omega (D_{mj} + E_{mj}),$$

$$B_{mj} = \frac{G_{mj} \alpha_{mj} + M_{mj} \kappa_{mj}}{\alpha_{mj}^2 + \kappa_{mj}^2},$$

$$D_{mj} = \frac{-G_{mj} \kappa_{mj} + M_{mj} \alpha_{mj}}{\alpha_{mj}^2 + \kappa_{mj}^2},$$

$$G_{mj} = Q_m T_{mj} + R_m S_{mj},$$

$$M_{mj} = -Q_m S_{mj} + R_m T_{mj},$$

$$Q_m = d_m \sin \omega + c_m \cos \omega,$$

$$S_{mj} = -\gamma_{mj} \cos(\beta_{mj} t_1) + \delta_{mj} \sin(\beta_{mj} t_1),$$

$$T_{mj} = \gamma_{mj} \sin(\beta_{mj} t_1) + \delta_{mj} \cos(\beta_{mj} t_1).$$

$$C_{mj} = \frac{L_{mj} \alpha_{mj} + N_{mj} \eta_{mj}}{\alpha_{mj}^2 + \eta_{mj}^2}, \quad (4.15)$$

$$E_{mj} = \frac{-L_{mj} \eta_{mj} + N_{mj} \alpha_{mj}}{\alpha_{mj}^2 + \eta_{mj}^2},$$

$$L_{mj} = Q_m T_{mj} - R_m S_{mj},$$

$$N_{mj} = Q_m S_{mj} + R_m T_{mj},$$

$$R_m = d_m \cos \omega - c_m \sin \omega,$$

5° Численный пример. Для иллюстрации работоспособности предлагаемого метода приведем пример вычисления давления p_2 в эхо-сигнале.

Исходные данные примем такими же, как в [7]

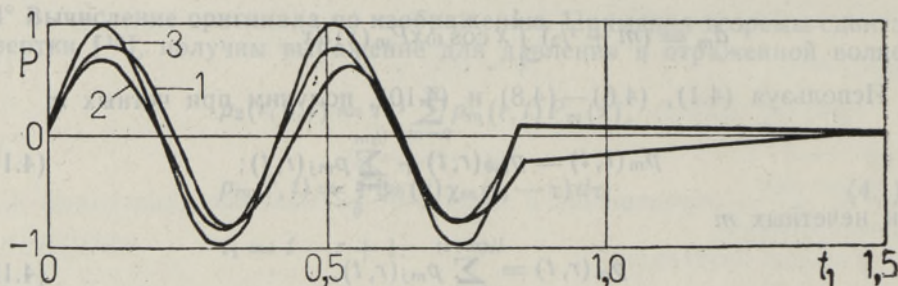
$$\omega = 15, \quad T_0 = 4\pi\omega^{-1}, \quad \theta = 0, \quad r = 10^3. \quad (5.1)$$

Ряд (4.1) оборвем при $m = 5$. В качестве корней уравнения (4.4) примем значения, вычисленные в [11] и уточненные на ЭВМ в [1].

Результаты расчета на ЭВМ «Минск-32» по программам на языке АКИ [14] представим в виде графика.

На рисунке приведены кривые давления $P = p_2 r p_0^{-1}$, вычисленного по формуле (4.1) (кривая 1) и заимствованного из работы [7] (кривая 2). Для сравнения показано давление в зондирующем импульсе (кривая 3).

6° Обсуждение. Давление в нестационарном эхо-сигнале представлено в виде бесконечного ряда по полиномам Лежандра. Сходимость



этого ряда пока не исследована. Сопоставление результатов расчета эхо-сигнала по формуле (4.1) при обрывании ряда на $m = 5$ с данными статьи [7] позволяет сделать вывод о приемлемости полученной зависимости.

Точность вычисления давления естественно растет с ростом m . При каждом m наиболее трудоемким оказывается отыскание корней полиномов и вычисление коэффициентов γ_{mj} , δ_{mj} .

Каждый член ряда содержит гармонические и экспоненциально затухающие слагаемые. Через некоторый промежуток времени влияние экспоненциально затухающих слагаемых становится ничтожно малым и нестационарный эхо-сигнал переходит в стационарный.

Это обстоятельство стоит учесть при выборе наиболее информативного типа зондирующего импульса, именно — длительность зондирующего импульса должна превышать время практического затухания нестационарной части эхо-сигнала.

Предлагаемый метод не накладывает ограничений на длительность зондирующего импульса, в то время как при нахождении импульсного эхо-сигнала с применением интегрального преобразования Фурье по времени и численного обращения малая длительность зондирующего импульса приводит к значительному удлинению счета на ЭВМ.

При вычислении эхо-сигнала по классической теории рассеяния обычно используется предположение $r \rightarrow \infty$, связанное с удобством расчета сферических функций Ханкеля по их асимптотическим представлениям. В предлагаемом подходе формула (4.1) применима как при $r \rightarrow 1$, так и при $r \rightarrow \infty$.

Плоская форма падающей волны и гармонический закон изменения давления во времени в зондирующем импульсе выбраны с целью сравнения полученных результатов с известными ранее. Метод может быть применен при сферической, цилиндрической и иных формах зондирующего импульса, равно как и в случае законов изменения давления в зондирующем импульсе во времени, отличных от гармонического.

Предположение о неподвижности сферы является общеупотребительным и, как показано в статье [8], оказывает существенное влияние на эхо-сигнал лишь при малых частотах.

Метод может быть использован для расчета эхо-сигналов от «акустически мягкой» сферы. По-видимому, его удастся применить и для расчета эхо-сигналов от упругих (сплошных и полых) сфер.

Автор благодарен Р. Пукк за консультации по программированию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. Ин-т механики МГУ, научные труды № 2, М., 1970.
2. Мнев Е. Н., Перцев А. К., Гидроупругость оболочек, Л., 1970.

3. Freedman A., J. Acoust. Soc. Amer., 48, Part 2, No. 2 (1970).
4. Векслер Н. Д., Эхо-сигналы от упругих объектов в воде (обзор). Ин-т кибернетики АН ЭССР, препринт № 1, Таллин, 1971.
5. Varakat R. G., J. Acoust. Soc. Amer., 32, No. 1 (1960).
6. Lauvstad V. R., J. Acoust. Soc. Amer., 38, No. 2 (1965).
7. Rudgers A. J., J. Acoust. Soc. Amer., 45, No. 4 (1969).
8. Hickling R., Wang N. M., J. Acoust. Soc. Amer., 39, No. 2 (1966).
9. Векслер Н. Д., Нигул У. К., Пукк Р. А., Изв. АН СССР, МТТ, № 6 (1970).
10. Деч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., 1960.
11. Харкевич А. А., Неустановившиеся волновые явления, М., 1950.
12. Замышляев Б. В., Яковлев Ю. С., Динамические нагрузки при подводном взрыве, Л., 1967.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962.
14. Неменман М. Е., Цегельский В. И., Матюшевская И. М., Автокод для решения инженерных задач на машине «Минск-2», Минск, 1965.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/VII 1971

N. VEKSLER

VEDELIKUS OLEVALT JÄIGALT SFÄÄRILT SAABUNUD MITTESTATSIONAARNE KAJASIGNAAL

Ideaalses lõpmatus vedelikus olevalt jäigalt sfäärilt lõpliku pikkusega sondeeriva impulsi poolt esile kutsutud kajasisignaali arvutamise ülesanne, mis on püstitatud punktis 2, lahendatakse muutujate eraldamise ja Laplace'i integraalteisenduste abil. Lahend on esitatud lõpmatu rea (4.1) kujul ja on kehtiv r , θ ja t suvaliste väärtuste korral. Esitatakse kajasisignaali arvutamise näide ja tulemuste analüüs.

N. VEKSLER

TRANSIENT ECHO-PULSE FROM A RIGID SPHERE IN FLUID

The problem (formulated in section 2^o) of finding an echo-pulse from a rigid immovable sphere immersed in unbounded acoustical liquid caused by an incident pulse of limited duration is solved, using Laplace transform and exploiting the method of variables separation. The solution of the problem is given in form of infinite series (4.1) suitable for any values of r , θ , t . The paper contains an example of calculation of echo-pulse. Obtained results are discussed.