EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.1.07

УДК 62—501.12—501.22 : 512.86

Ю. ЯАКСОО, Ю. НУРГЕС

О МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ РАЗМЕРНОСТЬЮ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Введение

Успех использования алгоритмов управления существенно зависит от принятой математической модели системы. Любую систему можно представить посредством моделей двух типов: а) типа вход—выход (внешнее описание); б) типа вход—состояние—выход (внутреннее описание). Решение проблемы перехода от одной модели к другой имеет большое значение, так как в зависимости от поставленных задач та или другая модель может получить преимущества. Например, внутреннее описание позволяет непосредственно использовать метод динамического программирования для решения задачи управления [1].

Переход от внутреннего описания к внешнему легко осуществим исключением параметров состояния. Зато вопрос перехода от внешнего описания к внутреннему (проблема реализации) является серьезной задачей, решенной только для простейших систем. Р. Е. Калманом [2] выработана теория и (вместе с Б. Л. Хо) практический алгоритм реализации для линейных стационарных динамических систем. Ту же проблему при конечном числе входных—выходных данных исследует А. Дж. Тейтер [3]. М. А. Арбиб и Х. П. Цейгер [4] обобщают задачу реализации для нелинейных дискретных стационарных систем.

В данной работе исследуем задачу реализации последовательного соединения линейных безынерционных ступеней, т. е. нестационарной линейной дискретно-непрерывной системы с конечным числом шагов. При этом нас интересует минимальная реализация (с минимальными размерностями векторов состояния), которая соответствует управляемой и наблюдаемой частям системы. Кроме того, в отличие от предыдущих работ рассмотрим задачу минимальной реализации с изменяющейся размерностью вектора состояния.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, который состоит из N последовательно соединенных линейных безынерционных ступеней (см. рис. 1). Предположим, что известно только *внешнее описание* объекта, т. е. преобразование входов $u_1, \ldots, u_N$ в выходы $z_1, \ldots, z_N$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{z}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{pmatrix}$$

или в матричном виде

$$z = \bar{z} + Au, \tag{1}$$

где вектор $\bar{z}$ и передаточная матрица A порядка $N \times N$ известны. Обозначая

$$y = z - \bar{z},$$

можно внешнее описание (1) переписать в виде

$$y = Au. \tag{2}$$

Рассмотрим *внутреннее описание* объекта с изменяющейся размерностью n_s вектора состояния x_s

$$\left.\begin{aligned} \underset{n_s\times 1}{x_s} &= \underset{(n_s\times n_{s-1})(n_{s-1}\times 1)}{F_{s-1}x_{s-1}} + \underset{(n_s\times 1)(1\times 1)}{g_s u_s}, \\ \underset{1\times 1}{y_s} &= \underset{(1\times n_s)(n_s\times 1)}{h'_s x_s}, \\ x_0 &= 0, \\ s &= 1, 2, \ldots, N, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где символ $(')$ обозначает операцию транспонирования.

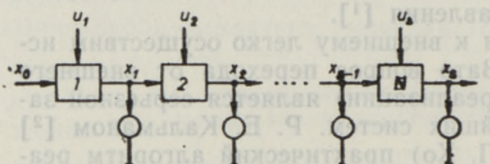

Рис. 1.

Задача состоит в определении по внешнему описанию (2) троек параметров (F_{s-1}, g_s, h_s), $s = 1, 2, \ldots, N$, внутреннего описания (3) таких, чтобы, во-первых, внутреннее описание (3) было эквивалентно внешнему описанию (2), т. е.

$$h'_s \Phi_{s,j} g_j = a_{sj} \quad (s = 1, 2, \ldots, N, \ \ j \leqslant s), \tag{4}$$

где

$\Phi_{s,j} = F_{s-1}F_{s-2}\ldots F_j$ — переходная матрица от x_j к x_s,

$\Phi_{s,s} = I$ — единичная матрица,

и, во-вторых, размерность n_s каждого вектора состояния x_s была минимальна.

2. Минимальная размерность вектора состояния s-й ступени

Введем следующие обозначения:

$u'_{j,s} = (u_j, u_{j+1}, \ \ldots, u_s)$ — вектор входов ступеней от j до s,

$y'_{j,s} = (y_j, y_{j+1}, \ \ldots, y_s)$ — вектор выходов ступеней от j до s,

$C_s = (\Phi_{s,1}g_1 \mid \Phi_{s,2}g_2 \mid \ldots \mid \Phi_{s,s}g_s)$ — матрица порядка $n_s \times s$, (5)

$$D'_s = (\Phi'_{s,s} h_s \mid \Phi'_{s+1} h_{s+1} \mid \ldots \mid \Phi'_{s,N} h_N) \quad — \tag{6}$$

матрица порядка

$$n_s \times (N - s + 1),$$

где n_s — размерность вектора состояния s-й ступени.

С учетом этих обозначений из (3) следует, что вектор состояния s-й ступени

$$x_s = C_s u_{1,s} \tag{7}$$

и вектор выходов ступеней от s до N при нулевых входах $u_{s+1,N} = 0$ выражается в виде

$$y_{s,N} = D_s x_s. \tag{8}$$

Объединяя (7) и (8), имеем

$$y_{s,N} = D_s C_s u_{1,s}. \tag{9}$$

Пусть A_s — подматрица порядка $(N - s + 1) \times s$, стоящая в нижнем левом углу передаточной матрицы A, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} & 0 \\ A_s & \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тогда из (4)—(6) и определения A_s следует, что

$$\underset{(N-s+1)\times s}{A_s} = \underset{[(N-s+1)\times n_s](n_s \times s)}{D_s C_s}. \tag{11}$$

Так как A_s задана, то следующая задача состоит в разложении A_s в виде (11) с минимальной размерностью n_s. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Любую вещественную матрицу B порядка $k \times l$ и ранга r можно разложить на матрицу P порядка $k \times r$ и матрицу Q порядка $r \times l$, оба ранга r такие, что*

$$B = PQ. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — столбцы матрицы B и пусть $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_r$ — линейно независимые столбцы, заданные в определенной последовательности. Образуем из независимых столбцов матрицу

$$P = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_r)$$

порядка $k \times r$. В силу независимости столбцов

$$\text{ранг}\, P = r.$$

Каждый столбец b_i представим в виде

$$b_i = q_{1i} \bar{b}_1 + q_{2i} \bar{b}_2 + \ldots + q_{ri} \bar{b}_r.$$

Теперь каждому столбцу отвечает координатный вектор

$$q'_i = (q_{1i}, q_{2i}, \ldots, q_{ri}).$$

Образуем матрицу Q порядка $r \times l$ из l координатных векторов

$$Q = (q_1, q_2, \ldots, q_l).$$

В силу того, что r столбцов матрицы B линейно независимы,

$$\text{ранг}\, Q = r.$$

Так как

$$b_i = Pq_i,$$

то

$$B = PQ.$$

Для получения всех таких разложений умножим P справа на невырожденную матрицу Ω и Q — слева на Ω^{-1}. Лемма доказана.

Следствие 1. *Матрица D_s представима в виде $D_s = (a_1, \ldots, \ldots, a_{n_s})$, где $a_1, \ldots, a_{n_s}$ — линейно независимые столбцы матрицы A_s.*

Следствие 2. *Матрица C_s составима из координатных векторов столбцов матрицы A_s относительно столбцов матрицы D_s.*

Следствие 3. *Матрицы C_s и D_s определены с точностью до линейного преобразования.*

Теорема. *Минимальная размерность вектора состояния s-й ступени*

$$n_s^* = \text{ранг}\, A_s. \tag{13}$$

Доказательство. Из (11) следует, что

$$n_s \geqslant \min\,(\text{ранг}\, D_s,\ \text{ранг}\, C_s) \geqslant \text{ранг}\, A_s.$$

На основании леммы в последнем соотношении равенства достигаемы, откуда и следует (13).

Следствие 4. *Из определения A_s и теоремы следует неравенство*

$$n_s^* \leqslant \min\,(s, N - s + 1),$$

откуда видно, что средние ступени, как правило, имеют большую размерность вектора состояния по сравнению с начальными и конечными ступенями.

3. Определение троек параметров (F_{s-1}, g_s, h_s)

Определение вектора g_s. Из (3) следует, что g_s отображает вход s-й ступени u_s в состояние x_s.

Положим

$$e'_s = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-1}, 1),$$

тогда

$$u_{1,s} = \left(\frac{u_{1,\,s-1}}{0}\right) + e_s u_s. \tag{14}$$

С учетом (7) и (14)

$$x_s = C_s \left(\frac{u_{1,\,s-1}}{0}\right) + C_s e_s u_s. \tag{15}$$

Из сравнения последнего соотношения с уравнением состояния в системе (3) следует, что

$$g_s = C_s e_s, \tag{16}$$

т. е. *вектором g_s является последний столбец матрицы C_s.*

Проиллюстрируем это на рис. 2, откуда выявляется и другая возможность вычисления g_s

$$g_s = D_s^{+} A_s e_s,$$

где D_s^{+} — обобщенная обратная к D_s матрица.

Так как матрица D_s имеет порядок $(N-s+1)\times n_s^*$ и ранг n_s^*, то обобщенная обратная матрица получается в виде

$$D_s^+ = (D'_s D_s)^{-1} D'_s. \tag{17}$$

Определение вектора h_s. Из (3) видно, что h_s отображает вектор состояния x_s в выход y_s.

Положим

$$e'_1 = (1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-s}).$$

Тогда с учетом определения вектора $y_{s,N}$ и (8) получим

$$y_s = e'_1 y_{s,N} = e'_1 D_s x_s.$$

Сравнение последнего соотношения с уравнением выхода в (3) дает

$$h'_s = e'_1 D_s. \tag{18}$$

Следовательно, вектором h'_s является первая строка матрицы D_s.

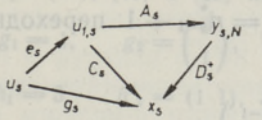

Рис. 2.

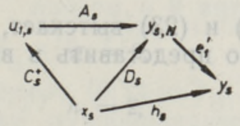

Рис. 3.

Проиллюстрируем это определение на рис. 3, откуда выявляется и другая возможность вычисления h_s

$$h'_s = e'_1 A_s C_s^+,$$

где C_s^+ — обобщенная обратная к C_s матрица

$$C_s^+ = C'_s (C_s C'_s)^{-1} \tag{19}$$

Определение переходной матрицы F_{s-1}. Матрица F_{s-1} соответствует отображению состояния x_{s-1} в состояние x_s. Из сравнения (15) с уравнением состояния в системе (3) следует

$$C_s \left(-\frac{u_{1,\,s-1}}{0} - \right) = F_{s-1} x_{s-1}.$$

С учетом (7) получим

$$C_s \left(-\frac{I_{s-1}}{0} - \right) u_{1,\,s-1} = F_{s-1} C_{s-1} u_{1,\,s-1},$$

откуда выясняется, что переходную матрицу можно определить из соотношения

$$C_s \left(-\frac{I_{s-1}}{0'} - \right) = F_{s-1} C_{s-1}$$

в форме

$$F_{s-1} = C_s \left(-\frac{I_{s-1}}{0'} - \right) C_{s-1}^+, \tag{20}$$

где обобщенная обратная матрица C_{s-1}^+ имеет вид (19).

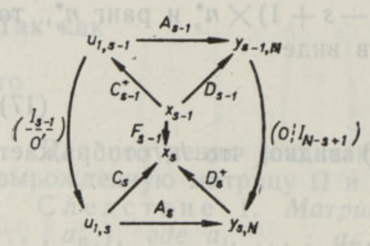

Рис. 4.

Определение F_{s-1} иллюстрирует рис. 4, полученный соединением диаграмм соседних ступеней. Из рис. 4 следует еще ряд возможностей определения F_{s-1}. Некоторые из них следующие:

$$F_{s-1} = \begin{cases} D_s^+ (0 \mid I_{N-s+1}) D_{s-1}, \\ D_s A_s \left(\frac{I_{s-1}}{0'} \right) C^+_{s-1}, \\ D_s^+ (0 \mid I_{N-s+1}) A_s C^+_{s-1}. \end{cases} \tag{21}$$

При увеличении размерности вектора состояния ($n_s^* = n_{s-1}^* + 1$) матрица D_s представима в виде

$$D_s = [(0 \mid I_{N-s+1}) D_{s-1} \mid a_s], \tag{22}$$

где a_s является s-м столбцом A_s. Из (21) получим соотношение

$$(0 \mid I_{N-s+1}) D_{s-1} = D_s F_{s-1}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) вытекает, что при $n_s^* = n_{s-1}^* + 1$ переходную матрицу F_{s-1} можно представить в виде

$$F_{s-1} = \left(\frac{I_{n^*_{s-1}}}{0'} \right).$$

Если $n_s^* \leqslant n_{s-1}^*$ и n_s^* первых столбцов A_s линейно независимы, то

$$F_{s-1} = (I_{n_s^*} \mid \overline{F}_{s-1}),$$

где $\overline{F}_{s-1}$ — матрица порядка $n_s^* \times (n_{s-1}^* - n_s^*)$.

4. Управляемость и наблюдаемость

Управляемость и наблюдаемость системы являются важными понятиями современной теории управления. Управляемость является необходимым условием существования решения для многих проблем управления, наблюдаемость играет аналогичную роль для проблем фильтрации [2, 5].

Так как

$$x_s = C_s u_{1,s} \quad (s = 1, 2, \ldots, N)$$

и матрица C_s имеет порядок $n_s^* \times s$ и ранг n_s^*, то все векторы состояния ступени s размерностью n_s^* полностью управляемы с помощью последовательности входов $u_{1,s}$.

С другой стороны, выпишем общее решение уравнения (8)

$$x_s = D_s^+ y_{s,N} + (I - D_s^+ D_s) z_s,$$

где z_s — произвольный вектор. В силу того, что матрица D_s имеет порядок $(N - s + 1) \times n_s^*$ и ранг n_s^*, ее обобщенной обратной матрицей является (17) и вектор состояния s-й ступени

$$x_s = (D'_s D_s)^{-1} D'_s y_{s,N}$$

определен однозначно. Следовательно, все векторы состояния x_s размерностью n_s^* являются полностью наблюдаемыми.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = (2\,4\,2\,4).$$

Последние матрицы можно разложить на следующие:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_4 = 2,$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_4 = (1\,2\,1\,2).$$

На основе формул (16), (18) и (20) получим

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_4 = 2,$$

$$h_1 = 3, \quad h'_2 = (1\ 1), \quad h'_3 = (2\ 1), \quad h_4 = 2,$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = (1\ 1).$$

В заключение авторы благодарят И. Петерсена за обсуждение результатов и конструктивные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Elmaghraby S. E., J. Math. Anal. Appl., 29, 523 (1970).
2. Kalman R. E., Falb P. L., Arbib M. A., Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, 1969.
3. Tether A. J., IEEE Trans. Autom. Control, 15, 427 (1970).
4. Arbib M. A., Zeiger H. P., Automatica, 5, 589 (1969).
5. Sarachik P. E., Kreindler E., Inter. J. Control, 1, 419 (1965).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/III 1971

Ü. JAAKSOO, Ü. NURGES

MUUTUVA DIMENSIOONIGA LINEAARSE SÜSTEEMI MINIMAALSEST REALISEERIMISEST

Vaadeldakse tundmatu lineaarse süsteemi minimaalset realiseerimist antud välise kirjelduse alusel juhul, kui olekuvektor on muutuva dimensiooniga. Näidatakse, et minimaalne realisatsioon on täielikult juhitav ja jälgitav.

Ü. JAAKSOO, Ü. NURGES

ON THE MINIMAL REALIZATION OF A VARYING-DIMENSIONAL LINEAR SYSTEM

The authors present a procedure of constructing minimal realization (internal description) of an unknown linear system from an input-output relationship (external description) when the dimension of state vector is allowed to vary. Complete controllability and observability properties are shown to hold for the constructed system. The procedure is illustrated with an example.